Übungen zur Taylorapproximation

1) Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \sqrt[4]{16+x}$.
   a) Bestimmen Sie das dritte Taylorpolynom p_3 zu f und berechnen Sie damit einen Näherungswert für $\sqrt[4]{18}$.
   b) Geben Sie die Definition des Restgliedes R_3 und begründen Sie, daß R_3 und f dieselbe vierte Ableitung besitzen: $R_3^{(4)}(x) = f^{(4)}(x)$.
   c) Bestimmen Sie den betraglich größten Wert C, den die vierte Ableitung $f^{(4)}$ im Intervall $[0,2]$ annimmt.
   [Zur Kontrolle: $C = \dfrac{231}{2^{23}}$.]
   d) Geben Sie eine Abschätzung für den bei a) auftretenden Fehler.
   e) Lösen Sie die gleiche Aufgabe zur Berechnung von $\sqrt[4]{15}$.

2) a) Bestimmen Sie die fünften Taylorpolynome zu $\ln(1+x)$ und $\ln(1-x)$ an der Stelle 0.
   b) Berechnen Sie damit Näherungswerte für $\ln(2)$ und $\ln(\frac{1}{2})$. Vergleichen Sie mit den vom Taschenrechner gelieferten Näherungswerten.
   c) Berechnen Sie Näherungswerte für $\ln(2)$ und $\ln(\frac{1}{2})$ mit Hilfe der Integralrechnung. Geben Sie eine Abschätzung des Fehlers.
   d) Untersuchen Sie den Verlauf des Graphen der Funktion $f(x) = \ln(1-x^2)$ (einschließlich Skizze).
   e) Bestimmen Sie das fünfte Taylorpolynom zu f an der Stelle 0.

3) Es sei $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   a) Skizzieren Sie mit kurzer Begründung den Verlauf des Graphen von f.
   b) Bestimmen Sie das vierte Taylorpolynom p_4 zu $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   c) Es sei F die Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$. Begründen Sie die Existenz und Eindeutigkeit von F.
   d) Zeigen Sie allgemein: Ist p_n n-tes Taylorpolynom von f, so ist p_n' $(n-1)$-tes Taylorpolynom von f'. Wie lautet eine entsprechende Aussage für Stammfunktionen? (Vorsicht! Nicht blind raten.) Begründen Sie Ihre Antwort.
   e) Bestimmen Sie das fünfte Taylorpolynom von F und damit einen Näherungswert für $F(1)$.
   f) Zeigen Sie $F(1) = \int_0^1 f(x)\,dx$ und bestimmen Sie damit einen Näherungswert für $F(1)$ mit einem Fehler von höchstens 0,05.
   g) Zeigen Sie, dass $F(\tan(x))$ eine konstante Ableitung hat und folgern Sie dann, dass $F(\tan(x)) = x$ ist.
   h) Zeigen Sie dann: $F(1) = \frac{\pi}{4}$.

4) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$.

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion für $k = 1, 2, 3 \ldots$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot \frac{1}{(1+x)^k} \quad (x \in \mathbb{D}_f)$$

und folgern Sie, dass jedes $\left|f^{(k)}\right|$ über $\mathbb{D}_f$ monoton fallend ist.

b) Bestimmen Sie das n-te Taylorpolynom p_n von f zur Stelle $a = 0$.

c) Es sei $x \in \mathbb{D}_f$ und I das Intervall mit den Grenzen 0 und x. Dann gilt für alle $t \in I$:

$$\left|f^{(k+1)}(t)\right| \leq C(k,x) = \begin{cases} k! & \text{für } x > 0, \\ k! \cdot \frac{1}{(1+x)^{k+1}} & \text{für } x < 0, \end{cases} \cdot$$

d) Folgern Sie daraus für das n-te Restglied:

$$|R_n(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} & \text{für } x > 0 \\ \frac{1}{n+1} \cdot (\frac{-x}{1+x})^{n+1} & \text{für } -1 < x < 0. \end{cases}$$

e) Zeigen Sie, dass $R_n(x)$ eine Nullfolge ist, wenn $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ gilt, und folgern Sie:

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots)$$

Restgliedabschätzung:

$$|R_n(x)| \leq C \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ falls } \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq C \text{ für alle } t \text{ zwischen 0 und } x.$$

Übungen zur Taylorapproximation — Lösungen

1) a) Man berechnet die ersten drei Ableitungen von $f(x) = (16+x)^{\frac{1}{4}}$ sowie deren Werte bei 0 und erhält $p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = 2 + \frac{1}{2^5}x - \frac{3}{2^{12}}x^2 + \frac{7}{2^{18}}x^3$. Dies ergibt für $\sqrt[4]{18} = f(2)$ als Näherungswert $p_3(2) = \frac{67495}{2^{15}} \approx 2{,}0597839355$.

b) Es ist $R_3 = f - p_3$. Da p_3 höchstens den Grad 3 hat, ist $p_3^{(3)}$ vom Grad 0, also konstant. Mithin ist $p_3^{(4)} = 0$ und daher $R_3^{(4)} = f^{(4)} - p_3^{(4)} = f^{(4)}$.

c) Für die Fehlerabschätzung bestimmt man zunächst die Schranke C für $\left|f^{(4)}\right|$ über dem Intervall $[0,2]$. Es ist $f^{(4)}(t) = -\frac{231}{256}(16+t)^{-\frac{15}{4}}$ stets negativ, während $f^{(5)}$ wieder positiv ist. Daher ist $f^{(4)}$ monoton steigend, hat also im Intervall $[0,2]$ den kleinsten (betraglich größten) Wert am linken Rand bei $t = 0$. Dies ergibt als Schranke für $\left|f^{(4)}\right|$ den Wert $C = \frac{231}{256} \cdot 16^{-\frac{15}{4}} = \frac{231}{2^{23}}$ wie angegeben.

d) Für den Fehler erhält man so die Abschätzung $\left|\sqrt[4]{18} - p_3(2)\right| = |R_3(2)| \leq \frac{231}{2^{23}} \cdot \frac{2^4}{24} = \frac{77}{2^{22}} \leq 1{,}8 \cdot 10^{-5}$. Der Näherungswert weicht also vom wahren Wert um höchstens zwei Einheiten in der fünften Stelle hinter dem Komma ab. Der Taschenrechner liefert als (Näherungs-)Wert 2,059767144; dieser weicht vom oben bestimmten Ergebnis um weniger als $1{,}7 \cdot 10^{-5}$ ab.

e) In diesem Fall wird $\sqrt[4]{15} = f(-1)$ durch $p_3(-1) = 2 - \frac{1}{2^5} - \frac{3}{2^{12}} - \frac{7}{2^{18}} = 1{,}9679908752$ angenähert.
Für die Abschätzung des Fehlers muss man das Intervall $[-1,0]$ betrachten und $f^{(4)}(t) = -\frac{231}{256}(16+t)^{-\frac{15}{4}}$ über diesem Intervall abschätzen. Wieder wird der betraglich größte Wert am linken Rand angenommen, also an der Stelle -1. Dies ergibt für C den Wert

$$C = \frac{231}{256} \cdot 15^{-\frac{15}{4}} = \frac{231}{256 \cdot (\sqrt[4]{15})^{15}}\,.$$

Hier taucht nun das Problem auf, dass der exakte Wert von C die Berechnung von $\sqrt[4]{15}$ voraussetzt. Allerdings wird ja nur eine *Abschätzung* von C nach oben benötigt und dafür genügt eine *Abschätzung* von $\sqrt[4]{15}$ nach unten. Etwa $\sqrt[4]{15} \geq 1{,}95$, da $1{,}95^4 = 14{,}45900625 \leq 15$. Damit erhält man für C die Schranke

$$C \leq \frac{231}{256 \cdot 1{,}95^{15}} \leq 4{,}0258 \cdot 10^{-5}\,.$$

Als Fehlerabschätzung erhält man nach der Restgliedformel

$$\left|\sqrt[4]{15} - p_3(-1)\right| = |R_3(-1)| \leq C \cdot \frac{1^4}{4!} \leq 1{,}6774 \cdot 10^{-6}\,.$$

Wir vergleichen einmal den Näherungswert $p_3(-1) = 1{,}9679908752$ mit dem vom Taschenrechner gelieferten Wert 1,9679896713, der tatsächlich nur um $1{,}2 \cdot 10^{-6}$ abweicht.

2) a) Es ist $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ und damit $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$, $f^{(4)}(x) = -3! \cdot (1+x)^{-4}$, $f^{(5)}(x) = 4! \cdot (1+x)^{-5}$. Aus $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$, $f^{(4)}(0) = -3!$ und $f^{(5)}(0) = 4!$ ergibt sich

$$p_5(x) = x - \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} - 3! \cdot \frac{x^4}{4!} + 4! \cdot \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}.$$

Zur Berechnung des Taylorpolynoms von $\ln(1-x)$ benutzen wir:

> Ist p_n das n-te Taylorpolynom von $f(x)$ und $c \in \mathbb{R}$, so ist $p_n(cx)$ das n-te Taylorpolynom von $f(cx)$.

Wir wiederholen die Begründung aus dem Unterricht:
1.) Da $p_n(x)$ ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist, gilt dies auch für $p_n(cx)$.
2.) Wir müssen zeigen, dass $p_n(cx)$ und $f(cx)$ an der Stelle 0 dieselben Ableitungswerte haben (bis zur n-ten Ableitung).
Beim Ableiten von $g(x) = f(cx)$ erhält man nach der Faktorregel bei jedem Ableitungsschritt einen Faktor c aus der inneren Ableitung: $g'(x) = c \cdot f'(cx)$, $f''(x) = c^2 \cdot f''(cx)$ und allgemein $g^{(k)}(x) = c^k \cdot f^{(k)}(cx)$. Dasselbe gilt für die Ableitungen von $q_n(x) = p_n(cx)$. Daraus folgt: Haben p_n und f an der Stelle 0 dieselben Ableitungswerte (von der 0-ten bis zur n-ten Ableitung), so gilt dies wegen $c \cdot 0 = 0$ auch für q_n und g:

$$q_n^{(k)}(0) = c^k \cdot p_n^{(k)}(c \cdot 0) = c^k \cdot p_n^{(k)}(0) = c^k \cdot f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0).$$

Damit hat $q_n(x) = p_n(cx)$ in Bezug auf $g(x) = f(cx)$ die beiden charakteristischen Eigenschaften des Taylorpolynoms, womit die Behauptung bewiesen ist.
Damit ist $p_5(-x)$ das 5-te Taylorpolynom zu $\ln(1-x)$. Explizit:

$$p_5(-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^4}{4} + \frac{(-x^5)}{5} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}.$$

b) Als Näherungswert berechnen wir

$$\ln(2) = \ln(1+1) \approx p_5(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} \approx 0{,}78333333,$$

$$\ln(\frac{1}{2}) = \ln(1 - \frac{1}{2}) \approx p_5(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{8}) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{5} \cdot (-\frac{1}{32})$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} - \frac{1}{64} - \frac{1}{160} = -\frac{661}{960} \approx -0{,}68854167.$$

Hier nun zusätzlich zur gestellten Aufgabe die Abschätzung des Fehlers. Um das 5-te Restglied $R_5(x)$ für $x = 1$ bzw. $x = -\frac{1}{2}$ abschätzen zu können, müssen wir die 6-te Ableitung $f^{(6)}$ über dem Intervall $I = [0, 1]$ bzw. $I = [-\frac{1}{2}, 0]$ betraglich abschätzen.
Es ist $f^{(6)}(t) = -5! \cdot (1+t)^{-6}$, also $\left|f^{(6)}(t)\right| = \frac{120}{(1+t)^6}$. Diese Funktion ist monoton fallend, also wird der größte Wert am linken Rand des jeweiligen Intervalls angenommen. Wir erhalten daher:

$$t \in I = [0, 1] \implies \left|f^{(6)}(t)\right| \leq f^{(6)}(0) = 120,$$

$$t \in I = [-\frac{1}{2}, 0] \implies \left|f^{(6)}(t)\right| \leq f^{(6)}(-\frac{1}{2}) = 120 \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^6} = 120 \cdot 2^6 = 7680.$$

Daraus ergeben sich mit dem Abschätzungssatz für das Restglied:

$$|R_5(1)| \le 120 \cdot \frac{1^6}{6!} = \frac{1}{6}\,,$$
$$\left|R_5(-\frac{1}{2})\right| \le 120 \cdot 2^6 \cdot \frac{(-\frac{1}{2})^6}{6!} = \frac{1}{6}\,.$$

Wir erhalten also in beiden Fällen dieselbe recht grobe Abschätzung des Fehler (bis zu 0,167). Aufgrund unserer obigen Näherungswerte für $\ln(2)$ und $\ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$ ergeben sich so die folgenden Abschätzungen für den wahren Wert von $\ln(2)$:

$$\frac{47}{60} - \frac{1}{6} = \frac{37}{60} \le \quad \ln(2) \le \frac{47}{60} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}\,,$$
$$-\frac{661}{960} - \frac{1}{6} = -\frac{821}{960} \le -\ln(2) \le -\frac{661}{960} + \frac{1}{6} = -\frac{501}{960}\,,$$

oder dezimal:

$$0{,}61666666 \le \quad \ln(2) \le 0{,}95$$
$$-0{,}85520834 \le -\ln(2) \le -0{,}521875$$

Kombiniert man aus beiden Abschätzungen die jeweils besseren miteinander, so erhält man

$$0{,}61666666 \le \ln(2) \le 0{,}85520834\,.$$

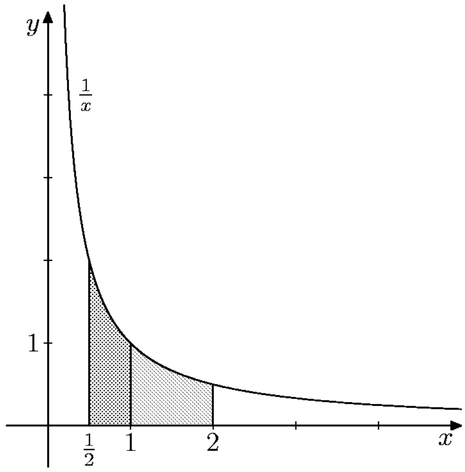
Zum Vergleich der Wert des Taschenrechners:

$$\ln(2) \approx 0{,}6931471806\,.$$

c) Es ist bekannt, dass $F(x) = \ln(x)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ ist, also gilt

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)\,,$$
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln(1) - \ln(\frac{1}{2}) = \ln(2)$$

Damit haben die nachfolgend skizzierten Flächenstücke beide den Flächeninhalt $\ln 2$.



Näherungswerte für Integrale erhält man durch Unter- und Obersummen. Wir berechnen einmal für $\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ die Untersumme U_5. Die Streifenbreite ist dann $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$. Da $f(x) = \frac{1}{x}$ monoton fällt, gilt

$$\begin{aligned} U_5 &= h \cdot (f(1+h) + f(1+2h) + f(1+3h) + f(1+4h) + f(1+5h)) \\ &= \frac{1}{5} \cdot (\frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} + \frac{5}{9} + \frac{5}{10}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \approx 0{,}64563492\,. \end{aligned}$$

Man kann nun auf gleiche Weise die Obersumme berechnen, oder benutzt

$$O_5 - U_5 = |f(b) - f(a)| \cdot h = (f(1) - f(2)) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}\,.$$

Also gilt

$$0{,}64563492 \leq \ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \leq 0{,}74563492\,.$$

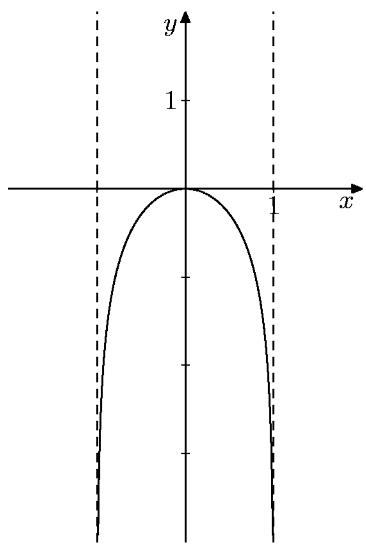
Wendet man dieselben Überlegungen auf die zweite Integraldarstellung $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}\,dx$ an, so erhält man exakt dieselben Werte.

d) Wir bemerken zunächst, dass f achsensymmetrisch ist. Da ln nur auf $]0,\infty[$ definiert ist, ist $\ln(1-x^2)$ definiert für

$$1 - x^2 > 0 \iff x^2 < 1 \iff -1 < x < 1\,.$$

Wegen $\ln(1-x^2) = \ln((1+x)(1-x)) = \ln(1+x) + \ln(1-x)$ kann man die Ableitungen leicht berechen:

$$f'(x) = (1+x)^{-1} - (1-x)^{-1}\,,\ f''(x) = -(1+x)^{-2} - (1-x)^{-2}\,.$$



Da die zweite Ableitung nur negative Werte hat, ist f überall rechtsgekrümmt und besitzt keine Wendestellen.
Zur Berechnung der Extremstellen lösen wir

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x} \iff 1+x = 1-x \iff x = 0\,.$$

Da f'' überall negativ ist, ist $x = 0$ eine Maximalstelle. Der zugehörige Hochpunkt ist $H = (0, f(0)) = (0,0)$.
Wir berechnen schließlich die Grenzwerte an den Definitionsrändern ± 1:

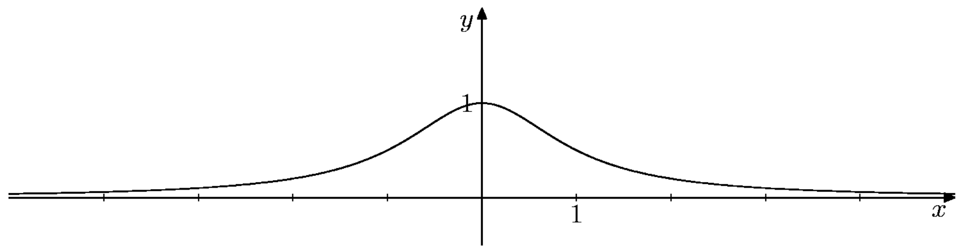
$$\lim_{x\to\pm 1} \ln(1-x^2) = \lim_{z\to 0} \ln(z) = -\infty\,.$$

Damit erhalten wir die nebenstehende Skizze.

e) Wegen $f(x) = \ln(1-x^2) = \ln(1+x) + \ln(1-x)$ ist das 5-te Taylorpolynom von f die Summe der oben berechneten Taylorpolynome von $\ln(1+x)$ und $\ln(1-x)$:

$$p_5(x) = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}) + (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}) = -x^2 - \frac{x^4}{2}\,.$$

3) a) Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, sie ist achsensymmetrisch, sie hat nur positive Werte, und wegen $1 + x^2 \geq 1$ für alle x sind alle Werte $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. Als rationale Funktion mit einem Nennergrad größer als der Zählergrad hat sie die x-Achse als Asymptote.
Im Bereich $[0, \infty[$ ist $1 + x^2$ monoton wachsend, der Kehrwert $f(x)$ also monoton fallend. Wegen der Achsensymmetrie ist f im Bereich $]-\infty, 0]$ monoton steigend, also ist 0 einzige Extremstelle, und zwar Maximalstelle. Der Hochpunkt ist $H = (0, 1)$.
So erhalten wir die nachfolgende Skizze:



b) Wir berechnen mit Produkt- und Kettenregel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x^2)^{-1}\,, \\
f'(x) &= -(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = -2x(1+x^2)^{-2}\,, \\
f''(x) &= -2(1+x^2)^{-2} - 2x \cdot (-2)(1+x^2)^{-3} \cdot 2x \\
&= (1+x^2)^{-3} \cdot (-2(1+x^2) + 8x^2) \\
&= 2(3x^2-1) \cdot (1+x^2)^{-3}\,, \\
f'''(x) &= 12x \cdot (1+x^2)^{-3} + 2(3x^2-1) \cdot (-3)(1+x^2)^{-4} \cdot 2x \\
&= (1+x^2)^{-4} \cdot (12x(1+x^2) - 2(3x^2-1) \cdot (-6x)) \\
&= 12x(2-2x^2)(1+x^2)^{-4} = 24x(1-x^2)(1+x^2)^{-4} \\
f^{(4)}(x) &= 24(1-3x^2)(1+x^2)^{-4} + 24x(1-x^2) \cdot (-4)(1+x^2)^{-5} \cdot 2x \\
&= 24(1+x^2)^{-5} \cdot ((1-3x^2)(1+x^2) - 8x^2(1-x^2)) \\
&= 24(1 - 3x^2 + x^2 - 3x^4 - 8x^2 + 8x^4) \cdot (1+x^2)^{-5} \\
&= 24(1 - 10x^2 + 5x^4) \cdot (1+x^2)^{-5}
\end{aligned}
$$

Aus den Ableitungswerten

$$f(0) = 1\,,\; f'(0) = 0\,,\; f''(0) = -2\,,\; f'''(0) = 0 \text{ und } f^{(4)}(0) = 24$$

erhalten wir das 4-te Taylorpolynom

$$p_4(x) = 1 - 2\frac{x^2}{2} + 24 \cdot \frac{x^4}{4!} = 1 - x^2 + x^4\,.$$

c) Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $F(x) = \int_0^x f$ eine Stammfunktion von f und es gilt $F(0) = \int_0^0 f = 0$.
Zwei Stammfunktionen derselben Funktion können sich über einem Intervall nur durch Addition einer Konstanten c unterscheiden. Haben die beiden Funktionen

nun an einer einzigen Stelle (hier bei 0) denselben Wert, so muss $c = 0$ sein und die Funktionswerte sind überall identisch.
d) Da p_n eine ganzrationale Funktion vom Grade $\leq n$ ist, hat p_n' einen Grad $\leq n-1$. Da die Ableitungswerte von f' bzw. p_n' zugleich Ableitungswerte von f bzw. p_n sind, nur mit einer um 1 höheren Ordnung, stimmen diese Werte von der 0-ten bis zur $n-1$-ten Ordnung überein. Damit erfüllt p_n' in Bezug auf f' die definierenden Eigenschaften des $n-1$-ten Taylorpolynoms.
Ganz ähnlich argumentiert man bei der Bildung der Stammfunktion, man muss nur berücksichtigen, dass es mehrere Stammfunktionen gibt. Wir behaupten:

Es sei F eine Stammfunktion von f und P die Stammfunktion des Taylorpolynoms p_n mit $P(0) = F(0)$. Dann ist P das $n+1$-te Taylorpolynom von F.

Begründung: Es ist nach Ansatz $P(x)$ vom Grad $\leq n+1$ und $P(0) = F(0)$. Wegen $P' = p_n$ und $F' = f$ stimmen die höheren Ableitungswerte von P mit denen von F bis der Stufe $n+1$ (=n-te Ableitung von p_n bzw. f) überein. P erfüllt also alle Forderungen des $n+1$-ten Taylorpolynoms bzgl. F.
e) Wir verwenden d) und erhalten (wegen $F(0) = 0$) als 5-tes Taylorpolynom für F die Stammfunktion P von p_4 mit $P(0) = 0$:

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\,.$$

Als Näherungswert ergibt sich so

$$F(1) \approx P(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15} \approx 0{,}86666667\,.$$

f) Da F eine Stammfunktion von f ist und $F(0) = 0$ ist, gilt nach der Integralformel

$$\int_0^1 f = \Big[F(x)\Big]_0^1 = F(1) - F(0) = F(1)\,.$$

Integrale kann man durch Ober- und Untersummen einschachteln und bei monotonem Integranden die Abweichung zwischen Ober- und Untersumme berechnen:

$$O_n - U_n = \frac{b-a}{n} \cdot |f(b) - f(a)|\,.$$

In diesem Falle ist $a = 0$, $b = 1$, $f(a) = 1$ und $f(b) = \frac{1}{2}$. Mithin

$$O_n - U_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n}\,.$$

Diese Abweichung ist genau dann $\leq 0{,}05 = \frac{1}{20}$ wenn $n \geq 10$ ist. Wir berechnen also U_{10}:

$$\begin{aligned} U_{10} &= h \cdot \sum_{i=1}^{10} f(i \cdot h) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{1 + (\frac{i}{10})^2} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} \frac{100}{100 + i^2} = 10 \cdot \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{100 + i^2} \\ &\approx 0{,}7599815 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Einschachtelung $0{,}75998150 \le F(1) \le 0{,}8099815$.
g) Wir berechnen gemäß Kettenregel (unter Beachtung von $F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$):

$$(F(\tan x))' = F'(\tan x) \cdot \tan'(x) = f(\tan x) \cdot \tan'(x) = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} \cdot \tan'(x)\,.$$

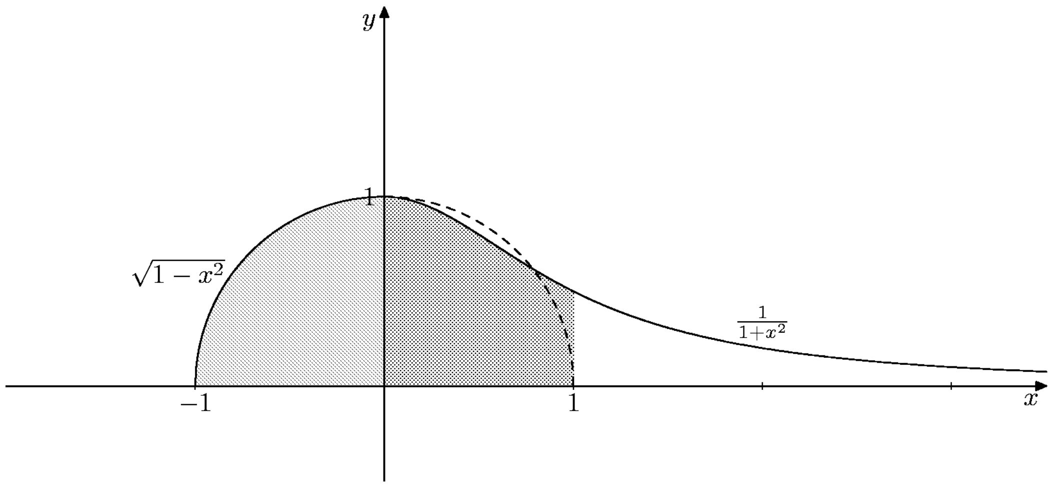
Mit Hilfe der Quotientenregel erhalten wir aus $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

und damit dann

$$(F(\tan x))' = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1\,.$$

Da die Ableitung der Funktion $F(\tan(x))$ konstant gleich 1 ist, muss sie über jedem Intervall in ihrem Definitionsbereich linear sein: $F(\tan(x)) = x + c$. Dies gilt insbesondere für das Intervall $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, über dem cos keine Nullstellen hat und folglich tan definiert ist. Setzt man nun in $F(\tan(x)) = x + c$ die Stelle $x = 0$ ein, so erhält man $F(\tan(0)) = 0 = c$, also insgesamt: $F(\tan(x)) = x$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
h) Speziell für $x = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich $F(\tan(\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}$, also wegen $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1$ schließlich $F(1) = \frac{\pi}{4}$.
Da $\frac{\pi}{4}$ definitionsgemäß die Fläche des Einheits-Viertelkreises ist, bedeutet dieses letzte Resultat, dass die beiden nachfolgend markierten Flächenstücke denselben Flächeninhalt haben:



4) a) Wir beweisen die behauptete Gleichung durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang $k = 1$: Es ist $f(x) = \ln(1+x)$, also nach Kettenregel $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ (innere Ableitung 1).
Setzt man andererseits in der behaupteten Formel $k = 1$, so erhält man $f^{(1)}(x) = (-1)^0 \cdot 0! \cdot (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$, die Behauptung ist für $k = 1$ richtig.
Induktionsschritt $k \to k+1$: Wir setzen voraus, dass die behauptete Gleichung für k gültig ist: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot (1+x)^{-k}$. Dann folgt durch Ableiten:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)})'(x) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot (-k) \cdot (1+x)^{-k-1} \\ &= (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot (-1) \cdot k \cdot (1+x)^{-(k+1)} \\ &= (-1)^k \cdot (-1) \cdot (k-1)! \cdot k \cdot (1+x)^{-(k+1)} \\ &= (-1)^k \cdot k! \cdot (1+x)^{-(k+1)}\,. \end{aligned}$$

Damit hat $f^{(k+1)}(x)$ genau die in der Behauptung angegebene Form (mit $k+1$ statt k). Damit ist die Induktion vollständig.
Da $(k-1)! \cdot (1+x)^{-k} \geq 0$ ist, folgt

$$\left|f^{(k)}(x)\right| = \left|(-1)^{k-1}\right| \cdot (k-1)! \cdot \frac{1}{(1+x)^k} = \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}\,.$$

Diese Funktion ist monoton fallend, da mit wachsendem x der Nenner wächst, der Wert des Bruches also abnimmt.
b) Das n-te Taylorpolynom berechnet sich als

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(0) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!} \\ &= \ln(1) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot 1 \cdot \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k}\,. \end{aligned}$$

c) Gemäß a) ist

$$\left|f^{(k+1)}(t)\right| = k! \cdot \frac{1}{(1+x)^{k+1}}$$

monoton fallend, also wird über einem Intervall I der größte Wert am linken Rand von I angenommen. Dies bedeutet für $x \geq 0$:

$$0 \leq t \leq x \implies \left|f^{(k+1)}(t)\right| \leq f^{(k+1)}(0) = k!\,,$$

während für $x < 0$ gilt:

$$x \leq t \leq 0 \implies \left|f^{(k+1)}(t)\right| \leq f^{(k+1)}(x) = k! \cdot \frac{1}{(1+x)^{k+1}}\,.$$

Damit erhält man die behaupteten Werte für den Maximalwert $C(k,x)$ über dem jeweiligen Intervall I (wobei $x=0$ mit eingeschlossen werden kann).
d) Aufgrund der angegebenen Abschätzungsformel für das Restglied erhält man dann

$$|R_n(x)| \leq C(n,x) \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \begin{cases} n! \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{n+1} & \text{für } x \geq 0, \\ n! \cdot \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \cdot \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{-x}{1+x}\right)^{n+1} & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

e) Wegen der Abschätzung $0 \leq |R_n(x)|$ genügt es nach dem Schachtelungssatz zu untersuchen, ob die in d) angegebenen oberen Schranken für $|R_n(x)|$ unter den in der Behauptung e) genannten Bedingungen Nullfolgen sind.
<u>1. Fall $0 \leq x \leq 1$:</u> Die Folge x^{n+1} ist eine geometrische Folge mit Quotient x. Für x zwischen 0 und 1 ist diese beschränkt. Da $\frac{1}{n+1}$ eine Nullfolge ist, ist auch das Produkt ein Nullfolge.

2. Fall $-\frac{1}{2} \leq x < 0$: Auch hier ist ein Faktor eine geometrische Folge, diesmal mit dem Quotienten $\frac{-x}{1+x} > 0$. Diese Folge ist also genau dann beschränkt, wenn

$$\frac{-x}{1+x} \leq 1 \iff -x \leq 1+x \iff -1 \leq 2x \iff x \geq -\frac{1}{2}\,.$$

(Man beachte bei der ersten Umformung, dass $1 + x > 0$ ist.) Im Falle der Beschränktheit der geometrischen Folge ist die gesamte Folge wegen des Faktors $\frac{1}{n+1}$ wiederum eine Nullfolge.
Damit ist für $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ die Restgliedfolge $R_n(x)$ eine Nullfolge:

$$0 = \lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x) - p_n(x))$$

und dies bedeutet

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x) = \ln(1+x) \quad \text{für } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1\,.$$

Speziell für $x = 1$ ergibt sich:

$$\ln(2) = \lim_{n\to\infty} p_n(1) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots .$$

Anmerkung: Wir haben in diesem Falle gezeigt, dass die Funktionswerte $f(x)$ der Grenzwert der Folge der Werte $p_n(x)$ der Taylorpolynome sind; jedoch konnte dies nur für Stellen x in einer gewissen Umgebung der Entwicklungsstelle $a = 0$, nämlich für das Intervall $[-\frac{1}{2}, 1]$ gezeigt werden. Und in der Tat: Diese Aussage gilt auch nicht generell für alle $x \in \mathbb{D}_f$. Mit höheren mathematischen Mitteln kann man zeigen, dass diese Konvergenz nur im Intervall $]-1, 1]$ gilt.