Vertiefung Analytische Geometrie

1) (aus Abi Profi, S. 176)

Gegeben sind die Ebenen:

E: $2x + y = -4$

und

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Schnittgerade zwischen E und F.
b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel von E und F.
c) Zeigen Sie, dass alle Ebenen der Ebenenschar

$$E_c: \begin{pmatrix} c+1 \\ 1 \\ c-1 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} + 3 + c = 0;\ c \in \mathbb{R}$$

die Schnittgerade aus a) enthalten.
Es sei nun $c_{1,2} \neq 0$. Welche Beziehung muss zwischen c_1 und c_2 bestehen, damit E_{c_1} und E_{c_2} orthogonal zueinander sind?
d) Weisen Sie nach, dass der Vektor $\vec{p}_c = \begin{pmatrix} 1-c \\ 1-c \\ 2+c \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von E_c sein kann. Zeigen Sie, dass der Richtungsvektor der Schnittgeraden g (aus a)) und der Vektor $\vec{p}_c$ linear unabhängig sind.
e) Geben Sie eine Parametergleichung der Geraden h_c an, die durch den Punkt $R(-2|0|1)$ verläuft, die in E_c enthalten ist und die rechtwinklig zur Schnittgeraden g aus a) verläuft.

Lösung:

Nachfolgend die Lösungen des Übungsbuches sowie meine Kommentare dazu.

a)

Zur Bestimmung der Schnittgeraden zwischen E und F wird zunächst aus der Parametergleichung von F eine Normalengleichung erstellt.
Ein Normalenvektor von F lässt sich als Vektorprodukt der Richtungsvektoren ermitteln:

$$\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\cdot 1 - 1\cdot 3\\ 1\cdot 1-(-3)\cdot 1\\ (-3)\cdot 3 - 1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\-10\end{pmatrix}.$$

Wegen $\begin{pmatrix}-2\\4\\-10\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix}$ wählt man als Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix}$$

Unter Benutzung des Aufpunkts von F folgt als Normalengleichung:

$$F\colon \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix} = 0$$

und schließlich eine Koordinatengleichung:

$F\colon -x+2y-5z=-3.$

Zur Berechnung der Schnittgeraden zwischen E und F untersucht man die Lösungen des LGS:

$$2x+y=-4 \qquad \text{(I)}$$
$$-x+2y-5z=-3 \qquad \text{(II)}$$

Wählt man z.B. $z=t$, so folgt nach $2\cdot\text{(I)}-\text{(II)}$ für $x=-1-t$.

Nein!

Setze P.D. von F in Normalengleichung von E ein!

$$-4 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$= -4 + r\cdot(-5) + s\cdot 5$$

$$\Leftrightarrow \quad r = s.$$

Setze in P.D. von F $r=s$:

$$E\cap F\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}$$

P.D. der Schnittgeraden.

Setzt man z und x in (II) ein, so folgt

$y=-2+2t.$

Damit folgt als Schnittgerade

$$g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix};\quad t\in\mathbb{R}.$$

b)

Der Schnittwinkel zwischen den Ebenen E mit dem Normalenvektor

$$\vec{n}_E=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

und F mit dem Normalenvektor

$$\vec{n}_F=\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix}$$

folgt aus

$$\cos\gamma=\frac{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{30}}$$

und damit ist

$\cos\gamma=0.$

Der Schnittwinkel beträgt $\gamma=90°$, die Ebenen stehen also senkrecht aufeinander.

K

Schneiden sich zwei Ebenen E und F mit den Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$, so gilt für ihren Schnittwinkel:

$$\cos\gamma=\frac{|\vec{n}_E\bullet\vec{n}_F|}{|\vec{n}_E|\cdot|\vec{n}_F|}.$$

c)

Um zu zeigen, dass alle Ebenen der Ebenenschar

$$E_c\colon \begin{pmatrix}c+1\\1\\c-1\end{pmatrix}\bullet\vec{x}+3+c=0;\quad c\in\mathbb{R}$$

die Gerade

$$g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

enthalten, wird die Geradengleichung in die Ebenengleichung eingesetzt:

$$\begin{pmatrix}c+1\\1\\c-1\end{pmatrix}\bullet\left[\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right]+3+c=0$$

Multipliziert man aus, so folgt

$$\begin{aligned}-(c+1)-2-t(c+1)&\\+2t+t(c-1)+3+c&=0\end{aligned}$$

und weiter mit $0=0$ eine wahre Aussage.
Damit liegt g für jedes $c\in\mathbb{R}$ in der Ebenenschar E_c.

Wählt man zwei Ebenen E_{c_1} und E_{c_2} mit $c_{1,2}\neq 0$, so muss wegen der Bedingung ihrer Orthogonalität für die Normalenvektoren das Skalarprodukt null sein:

$$\begin{pmatrix}c_1+1\\1\\c_1-1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}c_2+1\\1\\c_2-1\end{pmatrix}=0.$$

Die Berechnung des Skalarprodukts ergibt:

$(c_1+1)(c_2+1)+1+(c_1-1)(c_2-1)=0.$

Weiter folgt:

$$\begin{aligned}c_1c_2+c_1+c_2+2+c_1c_2-c_1-c_2+1&=0\\2c_1c_2+3&=0\\c_1c_2&=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Damit die Ebenen E_{c_1} und E_{c_2} orthogonal zueinander sind, muss gelten

$$c_1c_2=-\frac{3}{2}.$$

K

Wenn eine Gerade

$g\colon \vec{x}=\vec{q}+r\vec{u}$

in der Ebene

$E\colon \vec{a}\bullet\vec{x}=d$

liegt, so muss folgende Gleichung erfüllt sein:

$\vec{a}\bullet(\vec{q}+r\vec{u})=d.$

Rechnung mit Parameter t unnötig. Genügt 2 Punkte einzusetzen!
(-1,-2,0) erfüllt glg (E_c)
Ebenso
(-2,0,1) " " .
fertig.

d)

Damit $\vec{p}_c = \begin{pmatrix} 1-c \\ 1-c \\ 2+c \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor der Ebene E_c sein kann, muss für das Skalarprodukt gelten $\vec{p}_c \bullet \vec{n}_E = 0$, also

$$\begin{pmatrix} 1-c \\ 1-c \\ 2+c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c+1 \\ 1 \\ c-1 \end{pmatrix} = 0.$$

Die Berechnung des Skalarprodukts ergibt:

$$(1-c)(c+1)+(1-c)+(2+c)(c-1) \cancel{=0}$$

~~Weiter folgt:~~ ||

$$1-c^2+1-c+2c-2+c^2-c \cancel{=0}$$

$$\Leftrightarrow 0 \cancel{=0},$$

mithin eine wahre Aussage.

$\vec{p}_c$ kann somit ein Richtungsvektor der Ebene E_c sein.

Man stellt den Nullvektor als Linearkombination der Vektoren $\vec{p}_c = \begin{pmatrix} 1-c \\ 1-c \\ 2+c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar:

$$u \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1-c \\ 1-c \\ 2+c \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Das zugehörige Gleichungssystem lautet:

$$-u+(1-c)\,v=0 \qquad \text{(I)}$$
$$2u+(1-c)\,v=0 \qquad \text{(II)}$$
$$u+(2+c)\,v=0 \qquad \text{(III)}$$

Aus (I) − (II) folgt $-3u=0$ und damit $u=0$. Aus (I) + (II) folgt $3v=0$ und damit $v=0$. Die obige Vektorgleichung hat nur die triviale Lösung, die Vektoren sind also linear unabhängig.

K

Jeder Richtungsvektor einer Ebene steht auf dem Normalenvektor senkrecht; ihr Skalarprodukt muss null sein.

genügt nicht!
Ist äquivalent.

Dass 0=0 ist, ist wohl klar.
Die Umkehrung der Argumentation ist entscheidend.

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

nur die triviale Lösung $u=v=0$ hat.

e)

Man wählt als Aufpunkt von h_c den Punkt $R(-2|0|1)$, der auch Punkt der Geraden g ist:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektorgleichung ist für $t=1$ erfüllt.

Die Ebene E_c, in der die gesuchte Gerade h_c liegt, besitzt den Normalenvektor

$$\vec{n}_c = \begin{pmatrix} c+1 \\ 1 \\ c-1 \end{pmatrix}.$$

Als Richtungsvektor der Geraden h_c kann nun ein Vektor $\vec{n}_{c_1}$ gewählt werden, der Normalenvektor einer einer Ebene E_{c_1} ist, die zu E_c orthogonal ist:

$$\vec{n}_{c_1} = \begin{pmatrix} c_1+1 \\ 1 \\ c_1-1 \end{pmatrix}.$$

Berücksichtigt man die unter c) hergeleitete Orthogonalitätsbedingung $c \cdot c_1 = -\frac{3}{2}$, so erhält man einen Richtungsvektor von h_c, der in E_c liegt und orthogonal zu g verläuft:

$$\vec{n}_{c_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2c}+1 \\ 1 \\ -\frac{3}{2c}-1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2c}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3-2c \\ -2c \\ 3+2c \end{pmatrix}.$$

Mit dem vereinfachten Richtungsvektor

$$\vec{u}_c = (-2c) \cdot \vec{n}_{c_1}$$

folgt schließlich als gesuchte Parametergleichung für die Gerade

$$h_c\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3-2c \\ -2c \\ 3+2c \end{pmatrix}.$$

Umständlich!

Gesucht ist ein R.V. $\vec{u}$ für h_c. Es muss gelten:

$\vec{u} \perp \vec{n}_c = \begin{pmatrix} c+1 \\ 1 \\ c-1 \end{pmatrix}$ und

$\vec{u} \perp$ R.V. von g: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also wähle

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} c+1 \\ 1 \\ c-1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2c \\ -2c \\ 3+2c \end{pmatrix}$$

$$h_c\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3-2c \\ -2c \\ 3+2c \end{pmatrix}.$$

Da $R \in E_c$ gehört, ~~liegt h_c i~~ sind alle Bedingungen erfüllt.

2) (aus Abi Profi, S. 203)

Gegeben sind eine Ebene $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$, eine Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und eine Geradenschar $g(a)$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie eine Normalengleichung der Ebene E.
b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage zwischen der Ebenen E und der Geraden g. Ermitteln Sie den Abstand zwischen g und E oder den Schnittpunkt S und die Größe des Schnittwinkels α.
c) Berechnen Sie den Wert für a so, dass die betreffende Gerade der Schar parallel zu E ist. Welche Lage hat die Gerade dann?
d) Eine Kugel K mit dem Ursprung des Koordinatensystems als Mittelpunkt hat die Ebene E als Tangentialebene. Bestimmen Sie den Berührpunkt und den Radius der Kugel.

Lösung:
a) Wir bestimmen einen Normalenvektor der Ebene durch das Vektorprodukt von zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren der Ebene:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} -8 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -8 & -7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-8)\cdot 1 - 2\cdot(-7) \\ -(1\cdot 1 - 2\cdot 2) \\ 1\cdot(-7) - (-8)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ erhält man eine

Normalengleichung: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 0$, bzw. ausgerechnet eine

Koordinatengleichung: $2x + y + 3z = 14$

b) Der gegebene Richtungsvektor von g ist gleich dem in a) berechneten Normalenvektor von E, also schneidet g die Ebene E rechtwinklig. Zur Berechnung des Schnittpunktes S setze man die gegebene Parameterdarstellung von g in die Koordinatengleichung von E ein:

$$14 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = 42 + 14t \iff t = -2\,.$$

Der Schnittpunkt ist also gegeben durch

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad S = (-2, -3, 7)\,.$$

c) Damit g_a parallel zur Ebene E verläuft, muss der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ a \end{pmatrix}$ von g_a

orthogonal sein zum Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ von E:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -9 + 3a \iff a = 3\,.$$

Die Gerade g_3 verläuft also parallel zu E; sie liegt sogar in E, denn der Geradenpunkt $(-2, 6, 4)$ erfüllt die Ebenengleichung $(2 \cdot (-2) + 6 + 3 \cdot 4 = 14)$, gehört also zu E.
d) Der Kugelradius ist der Abstand des Koordinatenursprungs O von E, also nach der HESSEschen Abstandsformel

$$d(O, E) = \frac{|0 - 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}\,.$$

Die Tangentialebene an eine Kugel in einem Berührpunkt B ist orthogonal zum Radiusvektor $\overrightarrow{MB}$ vom Mittelpunkt M zum Berührpunkt B. Also ist B der Schnittpunkt der zu E orthogonalen Geraden durch O $(g(O, \vec{n}))$ mit der Ebene E. Wir setzen

$$\overrightarrow{OB} = r\vec{n} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

in die Gleichung $2x + y + 3z = 14$ für E ein:

$$14r = 14 \iff r = 1 \implies B = (2, 1, 3)\,.$$

3) (aus Abi Profi, S. 209)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $P(3|-2|1)$, $Q(3|3|1)$, $R(6|3|5)$ sowie die Menge von Punkten $S_a(3a|3+5a|\frac{19}{2}+4a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ gegeben.
a) Zeigen Sie, dass die Punkte P, Q und R genau eine Ebene E bestimmen. Ermitteln Sie eine Parametergleichung sowie eine Koordinatengleichung von E.
b) Existiert ein Punkt T, sodass das Viereck $PQRT$ ein Quadrat ist? Ermitteln Sie gegebenenfalls diesen Punkt.
c) Weisen Sie nach, dass die Punkte S_a auf einer Geraden g liegen. Zeigen Sie, dass g parallel zur Ebene E verläuft, aber nicht in E liegt.
d) Es existiert auf der Geraden g ein Punkt U so, dass U Spitze einer geraden vierseitigen Pyramide mit der Grundfläche $PQRT$ ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes U sowie die Maßzahl des Volumens der Pyramide $PQRTU$.
e) Der Punkt U soll an der Ebene E gespiegelt werden. Berechnen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes U'.

Lösung:
a) Drei Punkte PQR bestimmen genau eine Ebene, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen, und dies ist genau dann der Fall, wenn die Vektoren $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ keine Vielfachen voneinander sind. Dies ist der Fall, da sonst beide Vektoren die x-Koordinate 0 haben müssten.
Eine Parameterdarstellung für die Ebene $e = e(P, Q, R)$ ist also

$$X \in e \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + r\overrightarrow{PQ} + s\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R}).$$

Für die Koordinatengleichung ermitteln wir zunächst einen Normalenvektor über das Vektorprodukt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor für e und eine Koordinatengleichung für e hat die Form $4x - 3z = d$. Einsetzen von $P = (3, -2, 1) \in e$ ergibt $d = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 9$. Damit ist $4x - 3z = 9$ eine Koordinatengleichung für e.
[Kontrolle: Alle drei Punkte erfüllen diese Gleichung.]
b) Damit $PQRT$ ein Quadrat ist, muss zunächst bei Q ein rechter Winkel liegen:

$$\overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{QR} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0.$$

Außerdem müssen die am rechten Winkel angrenzenden Seiten gleich lang sein:

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = 5, \quad d(Q, R) = |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Ergänzt man nun PQR durch einen Punkt T zu einem Parallelogramm, so muss das Viereck $PQRT$ ein Quadrat sein.

$$PQRT \text{ Parallelogramm} \iff \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{QR} \iff \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QR}$$
$$\iff \overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \iff T = (6, -2, 5)\,.$$

c) Die Ortsvektoren der Punkte S_a habe alle die Form

$$\overrightarrow{OS_a} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3+5a \\ \frac{19}{2}+4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{19}{2} \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R})\,.$$

Dies ist die Parameterdarstellung einer Geraden g.

Diese Gerade verläuft parallel zur Ebene e, da der Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ von g orthogonal ist zum Normalenvektor $\vec{n}$ von e:

$$\vec{u} \bullet \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Die Gerade g liegt aber nicht in e, da der Punkt $(0, 3, \frac{19}{2})$ zwar zu g, aber nicht zu e gehört (er erfüllt die Normalengleichung von e nicht).
Alternative (nur sinnvoll, wenn leerer Durchschnitt vermutet wird): Berechne evtl. Schnittpunkte von g mit e, indem man die Parameterdarstellung von g in die Normalengleichung der Ebene e einsetzt

$$9 = 4x - 3z = 4 \cdot 3a - 3 \cdot (\frac{19}{2} + 4a) = -\frac{57}{2}\,, \text{ Widerspruch!}$$

Also gibt es keinen Schnittpunkt, die Gerade g verläuft parallel zu e, aber nicht in e.
d) Gesucht ist ein Punkt $U = S_a$, so dass der Vektor $\overrightarrow{MS_a}$ vom Mittelpunkt M des Quadrates zu S_a senkrecht zur Ebene e verläuft, und das heißt, senkrecht zu zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren von e. Wir berechnen $M = M_{PR} = (\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, 3)$ und erhalten damit

$$\overrightarrow{MS_a} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}+3a \\ \frac{5}{2}+5a \\ \frac{13}{2}+4a \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{MS_a} \perp \overrightarrow{PQ} \iff 0 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}+3a \\ \frac{5}{2}+5a \\ \frac{13}{2}+4a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{25}{2} + 25a \iff a = -\frac{1}{2}\,,$$

$$\overrightarrow{MS_a} \perp \overrightarrow{QR} \iff 0 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}+3a \\ \frac{5}{2}+5a \\ \frac{13}{2}+4a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{25}{2} + 25a \iff a = -\frac{1}{2}\,.$$

Damit hat $U = S_{-\frac{1}{2}} = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{15}{2})$ die geforderte Eigenschaft. Als Volumen der Pyramide erhält man damit

$$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot |\overrightarrow{MU}| = \frac{25}{3} \cdot \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{125}{2} \,.$$

Alternativ mit dem Spatprodukt:

$$V = \frac{1}{3}(\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}) \bullet \overrightarrow{QU} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(90 + \frac{195}{2}) = \frac{125}{2} \,.$$

e) Der Spiegelpunkt U' von U bzgl. der Ebene e liegt auf dem Lot zu e durch U und zwar „auf der anderen Seite von e“. Dies bedeutet: Ist F der Lotfußpunkt von U auf e, so muss gelten:

$$\overrightarrow{FU'} = -\overrightarrow{FU} \iff \overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{FU} \,.$$

Im vorliegenden Fall ist $M = (\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, 3)$ der Lotfußpunkt (siehe d)) und daher

$$\overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{MU} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \implies U' = (\frac{21}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \,.$$