Aufgabe 6: Weingläser

Verwendung

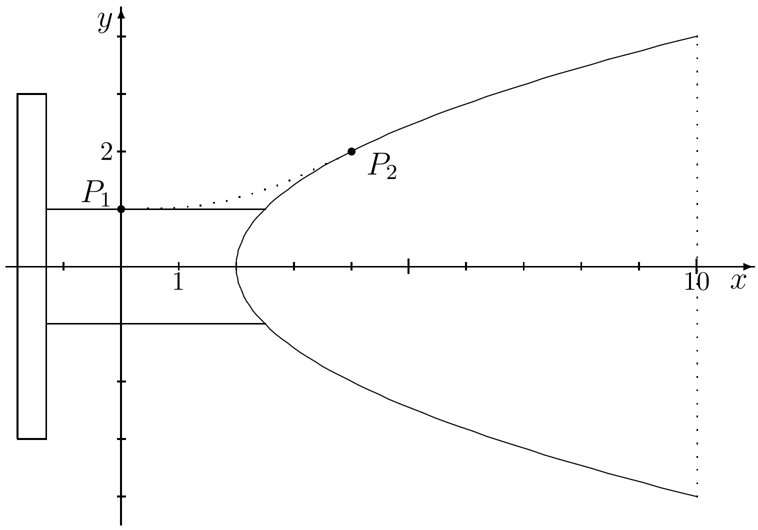
Qualifikationsphase 4. Semester
(Leistungskurs mit Modifikationsmöglichkeit für einen Grundkurs)

Bemerkungen zur Aufgabe

Diese Aufgabe behandelt verschiedene Themen der Analysis: Bestimmung konkreter Funktionen aus einer Skizze, Berechnung von Rotationsvolumina, Differenzierbarkeit stückweise definierter Funktionen, Ermittlung von Funktionsscharen mit vorgegebenen Eigenschaften, Analyse spezieller Funktionen der Schar. Die Studierenden sollen an dieser Aufgabe nachweisen, dass sie die gestellten Probleme mit den richtigen Hilfsmitteln und Methoden verknüpfen und dann erfolgreich lösen können.
Daneben soll die Aufgabe zeigen, wie man Funktionsscharen in ihrer natürlichen Bedeutung als Parametrisierung der Lösungen eines gegebenen Problems behandeln kann und sie nicht vordergründig allein zur Erhöhung des Anforderungsniveaus einsetzt. Schließlich versucht die Aufgabe durch die Thematisierung des Differenzierbarkeitsbegriffes einer schematisch-operativen Sicht der Ableitung entgegenzuwirken.

Aufgabenstellung

Ein Betrieb stellt Weingläser her, deren Schnittbild in der Zeichnung dargestellt ist.



a) Wieviel fasst das Glas, wenn die Querschnittskurve eine Parabel ist?

   [Für die nachfolgenden Aufgabenteile können Sie davon ausgehen, dass der obere Parabelast durch eine Funktion g gegeben ist mit $g'(4) = \frac{1}{2}$ und $g''(4) = -\frac{1}{8}$.]

Der Herstellerbetrieb verfügt über einen computergestützten Automaten, der es ermöglicht, für die Randfunktion der Gläser ganzrationale Funktionen bis zum Grade 4 vorzugeben.

b) Die Form des Glasansatzes soll zwischen den Punkten $P_1 = (0\,,1)$ und $P_2 = (4\,,2)$ neu gestaltet werden, und zwar so, dass ein *glatter* (= differenzierbarer) Übergang entsteht (wie in der Skizze bereits angedeutet). Bestimmen Sie alle derartigen Formen, die mit dem Automaten erzeugt werden können.

   [Ein mögliches Ergebnis: $f_c(x) = (\frac{c}{16} - \frac{1}{256})x^4 + (\frac{1}{32} - \frac{c}{2})x^3 + cx^2 + 1$.]

c) Ist es möglich, zwischen P_1 und P_2 die Verbindungskurve so zu wählen, dass an einer oder beiden Nahtstellen auch die Krümmungen der Teilstücke übereinstimmen? Realisieren Sie alle Möglichkeiten und analysieren Sie die entstehenden Formen (Wende- und Extrempunkte).

Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner

Unterrichtliche Voraussetzungen
Diese Aufgabe setzt den üblichen Kanon der Analysis-Ausbildung im 3. und 4. Semester der Qualifikationsphase voraus. Sie ist hier für einen Leistungskurs konzipiert, kann jedoch auch für einen Grundkurs modifiziert werden (siehe unten). Die Anforderungen der Aufgabe betreffen im Wesentlichen die Differentialrechnung, es sind aber auch Grundkenntnisse der Integralrechung sowie über die Lösung linearer Gleichungssysteme notwendig. Insbesondere mehrdeutig lösbare Gleichungssysteme und die dabei auftretenden parametrisierten Lösungen müssen den Studierenden bekannt sein.
Der Begriff der Differenzierbarkeit und seine anschauliche Bedeutung als Glattheit des Graphen muss den Studierenden vertraut sein, etwa durch die Behandlung stückweise definierter Funktionen mit der Problematik des glatten Übergangs an den Nahtstellen. Eine nur kalkülhafte Sicht des Ableitungsbegriffs reicht hier nicht aus.

Leistungserwartungen

a) Die Studierenden müssen zunächst einen Ansatz für die gesuchte Funktion zur Beschreibung des oberen Parabelastes finden: $g(x) = c\sqrt{x - x_0}$ mit $x_0 = 2$ (Stelle des Scheitelpunktes). c ergibt sich dann aus dem Punkt $P_2 = (4\,,2)$ auf dem Graphen von g. Dies führt zu $g(x) = \sqrt{2}\sqrt{x-2} = \sqrt{2x-4}$. (Alternativ kann man auch von der quadratischen Gleichung $x = ay^2 + 2$ für die liegende Parabel ausgehen.)

   Das gesuchte (Rotations-)Volumen berechnet sich nun sehr einfach:

$$V = \pi \int_2^{10} (2x-4)\,dx = 64\pi \approx 201{,}06\,.$$

b) Wir setzen an $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, also $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, mit den Forderungen: $e = f(0) = 1$, $f(4) = 2$ und wegen der Glattheitsforderung $d = f'(0) = 0$ sowie $f'(4) = g'(4)$. Mit $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$ erhält man $g'(4) = \frac{1}{2}$ und damit die beiden folgenden linearen Gleichungen für 3 Unbekannte a, b, c:

$$2 = 256a + 64b + 16c + 1\,, \qquad \frac{1}{2} = 256a + 48b + 8c\,.$$

   Damit ist eine Unbekannte frei wählbar (etwa c) und man erhält wie üblich (Elimination von a) für b und schließlich für a die im Kontrollergebnis angegebenen Terme.

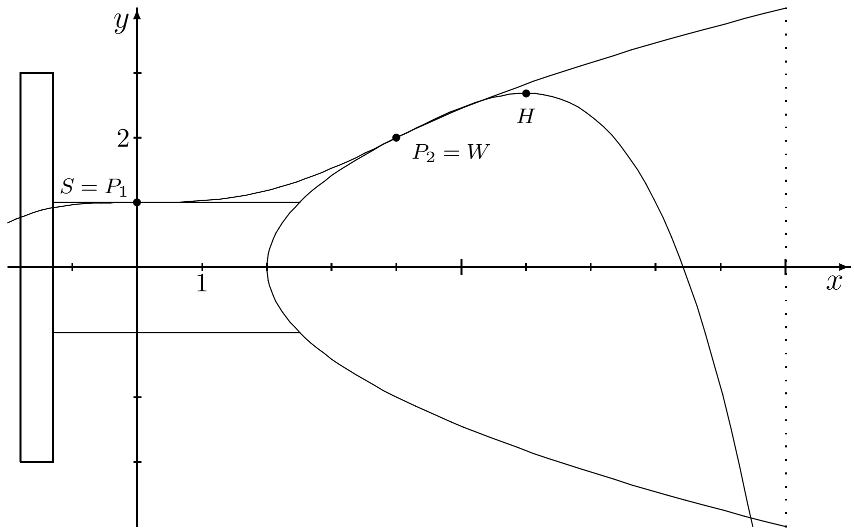
   Geht man bei der Elimination in anderer Reihenfolge vor, so können sich auch andere Beschreibungen derselben Funktionenschar ergeben, etwa mit a als freiem Parameter: $g_a(x) = ax^4 - 8ax^3 + (16a + \frac{1}{16})x^2 + 1$. Dieser Term ist zwar einfacher als der angegebene für f_c, allerdings ist bei obigem Gleichungssystem die Elimination von a naheliegender. Darüber hinaus ist auch die weitere Rechnung mit dem angegebenen $f_c(x)$ in Details etwas einfacher.

c) Man kann entweder bei P_1 gleiche Krümmung (d. h. gleiche zweite Ableitungen) erreichen, oder bei P_2, nicht jedoch an beiden Stellen.

   1. Gleiche Krümmung bei P_1 führt zur Forderung $0 = f_c''(0) = c$ und damit zu der Funktion $f_0(x) = -\frac{1}{256}x^4 + \frac{1}{32}x^3 + 1$.
   Aus $f_0'(x) = -\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{32}x^2 = -\frac{1}{64}x^2(x-6)$ entnimmt man eine Extremstelle bei $x = 6$ (Nullstelle von f' mit Vorzeichenwechsel), während bei $x = 0$ eine Sattelstelle liegt (doppelte Nullstelle von f'). An $f_0''(x) = -\frac{3}{64}x^2 + \frac{3}{16}x = -\frac{3}{64}x(x-4)$ erkennt man (neben der Sattelstelle $x = 0$) die zweite Wendestelle bei $x = 4$

(einfache Nullstelle von f_0''). Die Funktion f_0 hat also P_1 als Sattel- und P_2 als Wendepunkt, sowie $E = (6\,,\frac{43}{16})$ als einzigen Extrempunkt. Dieser muss ein Hochpunkt sein, da der führende Koeffizient von f_0 negativ ist. (Alternativ: $f_0''(6) < 0$.)

Skizze:



2. Gleiche Krümmung bei P_2 führt zu $f_c''(4) = g''(4)$. Aus $g''(x) = -(2x-4)^{-\frac{3}{2}}$ und $f_c''(x) = (-\frac{3}{64} + \frac{3c}{4})x^2 - (\frac{3}{16} - 3c)x + 2c$ erhält man dann

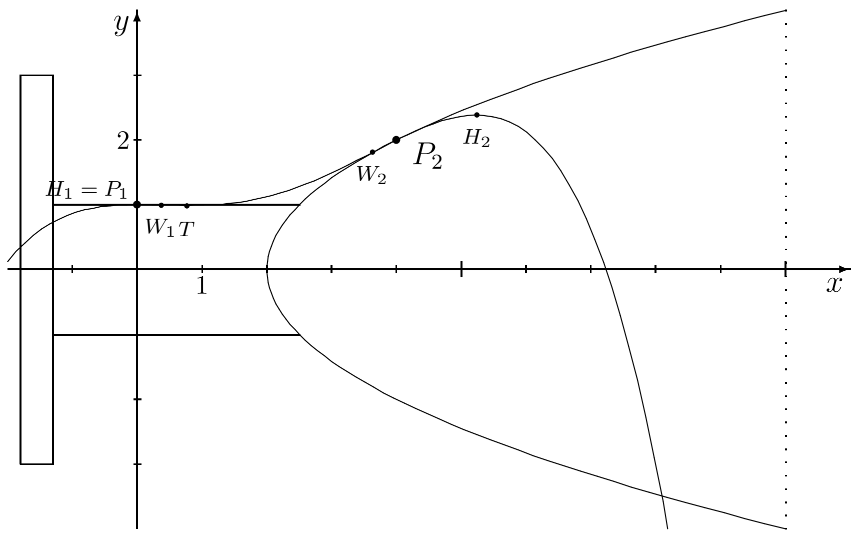
$$f_c''(4) = 2c = g''(4) = -\frac{1}{8} \iff c = -\frac{1}{16}\,.$$

Die zugehörige Funktion ist somit $f(x) = -\frac{1}{128}x^4 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + 1$.

Es ist $f'(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{8}x$ mit drei verschiedenen Nullstellen $x = 0$ sowie $x = 3 \pm \sqrt{5}$. Diese sind folglich sämtlich einfache Nullstellen von f' und somit Extremstellen von f. Da der führende Koeffizient von f negativ ist, ergibt dies zwei Hochpunkte $H_1 = P_1$ und H_2 bei $x = 3 + \sqrt{5} \approx 5{,}2$ sowie ein Tiefpunkt T dazwischen bei $x = 3 - \sqrt{5} \approx 0{,}76$. Bei dieser Lösung entsteht im Stiel eine kleine Verengung bei T.

Es ist $f''(x) = -\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}$ mit den beiden (ebenfalls notwendig einfachen) Nullstellen $2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{6}$. Im Gegensatz zu f_0 hat dieses f also keinen Sattel-, sondern 2 Wendepunkte.

Skizze:



3. Um an beiden Punkten die Krümmungen anpassen zu können, muss ein neuer Automat angeschafft werden, der auch Funktionen höheren Grades realisieren kann.

Bewertung

Die Note *gut* sollen Studierende erhalten, die die zentralen Aufgabenteile b) und c) erfolgreich bearbeiten. Kleinere Mängel in diesem Bereich können durch die erfolgreiche Bearbeitung des als Einstieg gedachten Teils a) kompensiert werden.
Die Note *ausreichend* erzielen Studierende, die neben Aufgabenteil a) in den Funktionsuntersuchungen von c) (auf der Basis des Kontrollergebnisses) die Beherrschung der grundlegenden Techniken nachweisen.

Modifikationsmöglichkeiten

Die Grundstruktur der Aufgabe kann auch in einem Grundkurs verwendet werden, etwa indem man in a) die Randfunktion des Graphen angibt. Dies erleichtert die Lösung von a) sowie den Ansatz von b). In c) könnte man zwar beide Funktionen bestimmen, aber nur eine analysieren lassen.
Setzt man die Aufgabe im Abitur ein, so kann man Bezüge zur linearen Algebra herstellen, etwa indem man thematisiert, dass die Lösungsschar von b) eine Gerade im Vektorraum der ganzrationalen Funktionen vom Grade ≤ 4 ist, und die Bedeutung eines Richtungsvektors sowie eines Basispunktes dieser Geraden herausarbeiten lässt.
Über den Differenzierbarkeitsbegriff hinaus kann man auch die Stetigkeit explizit ansprechen, sofern diese im Unterricht thematisiert wurde. Die Forderungen des stetigen oder glatten Übergangs an den Punkten sowie die Forderung von c) kann man wieder im Lichte der linearen Algebra deuten.

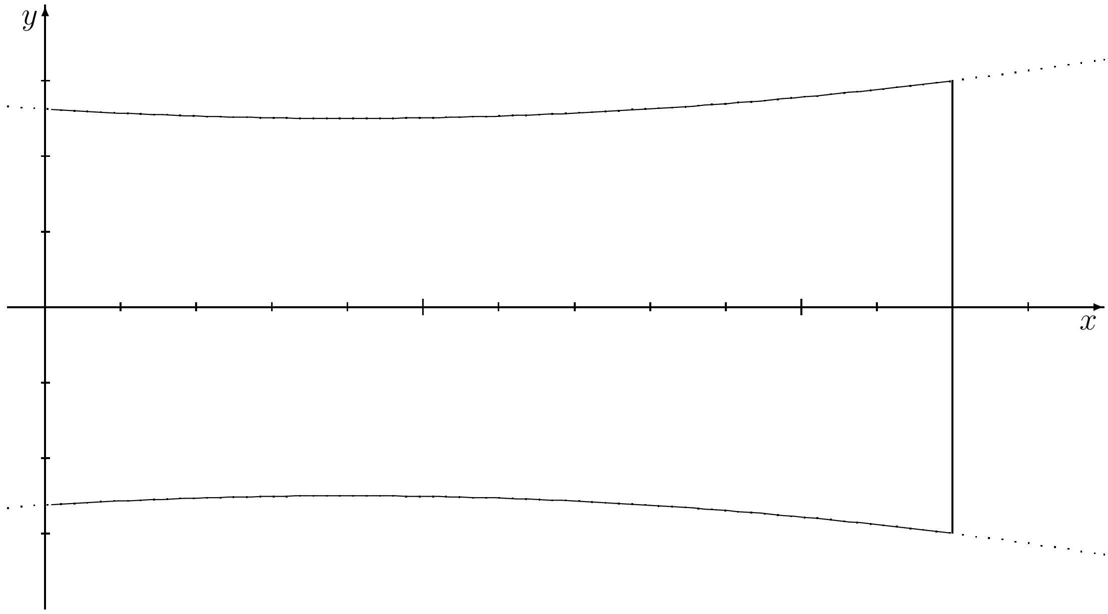
Aufgabe 7: Design eines Bierglases

Verwendung
Abitur (Leistungskurs)

Bemerkungen zur Aufgabe
Diese zweite Aufgabe zum Thema Glasgestaltung behandelt als Abituraufgabe für einen Leistungskurs diverse Inhalte der Analysis-Ausbildung, nämlich die Bestimmung von Funktionsgraphen mit geforderten Eigenschaften kombiniert mit Integralrechnung sowie der Verwendung von Approximationsmethoden zur Bestimmung von Nullstellen u. ä. Im Vergleich zur Aufgabe für das vierte Semester ist diese vielfältiger in den Fragestellungen und auch umfangreicher. Dabei ist die Aufgabe so konzipiert, dass die erforderlichen Rechnungen von einem Computer-Algebra-System übernommen werden (hier beispielhaft DERIVE). Dies ermöglicht die Behandlung des gewählten Themas unter Berücksichtigung unterschiedlichster Aspekte, ohne wegen des rechnerischen Zeitaufwandes Abstriche machen zu müssen. Die Leistung der Studierenden besteht dabei zum großen Teil in der Wahl der richtigen mathematischen sowie programmtechnischen Mittel sowie der Darstellung der zugrundeliegenden Gedankengänge.

Aufgabenstellung
Eine Brauerei hat bei einem Designer den Entwurf eines Bierglases in Auftrag gegeben. Gewünscht wird ein becherförmiges Glas von 12 cm Höhe mit einem oberen Innendurchmesser von 6 cm. Ergonomische Untersuchungen haben ergeben, dass sich ein solches Glas am bequemsten fassen lässt, wenn in 4 cm Höhe die „Taille“ des Glases mit einem Innendurchmesser von 5 cm liegt.

a) Der Designer entscheidet sich für einen parabelförmigen Verlauf des Längsschnittes (siehe Skizze). Markieren Sie in nachstehender Skizze die Vorgaben der Brauerei und bestimmen Sie einen quadratischen Funktionsterm, der diese Vorgaben realisiert.



b) Welchen Bruttoinhalt hat das entstehende Glas (wenn 12 cm die innere Höhe ist)?

c) Das Glas soll nun als 0,2-l-Glas geeicht werden. Bestimmen Sie durch ein geeignetes Approximationsverfahren den Abstand des Eichstriches von der oberen Kante. Erläutern Sie die Grundideen des benutzten Näherungsverfahrens und dokumentieren Sie alle Approximationsschritte genau.

d) Der Designer hat wegen der kleinen Grundfläche Sorge um die Standfestigkeit des Glases und möchte ein Glas entwerfen, bei dem auch der Boden einen Innendurchmesser von 6 cm hat. Begründen Sie, warum diese zusätzliche Forderung mit einer quadratischen Funktion nicht erfüllbar ist, und bestimmen Sie eine andere Funktion, die alle bislang geforderten Eigenschaften realisiert. Erstellen Sie eine Skizze des Längsschnittes durch diese Glasform (DERIVE-Ausdruck).

e) Bei der Herstellung des Glases werden mit den zuvor bestimmten Innenmaßen der Boden 4 mm dick, während die Wände überall 2 mm dick sind (senkrecht zur Glasachse gemessen). Wie schwer wird das Bierglas, wenn die verwendete Glassorte eine Dichte von 2,1 g/cm^3 hat?

Hilfsmittel: PC mit installiertem Computer-Algebra-System DERIVE und angeschlossenem Drucker.

Unterrichtliche Voraussetzungen

Die Aufgabe setzt in der hier dargestellten Form die Benutzung eines Computeralgebra-Systems voraus. Die Studierenden müssen also Erfahrung in der Nutzung von DERIVE haben; es genügt jedoch die Kenntnis der grundlegenden Funktionalitäten aus der Analysis (Integration, Differentiation) und der Algebra (Lösung eindeutig lösbarer linearer Gleichungssysteme).

Erforderliche mathematische Vorkenntnisse sind das Newton-Verfahren, Volumen von Rotationskörpern sowie die Lösung linearer Gleichungssysteme (Zusammenhang zwischen Gleichungszahl, Variablenzahl und Lösbarkeit).

Leistungserwartung

a) Man kann entweder von der Scheitelpunktsform quadratischer Funktionsterme ausgehen ($f(x) = a(x-4)^2 + \frac{5}{2}$) und dann aus der Forderung $f(12) = 3$ den Parameter a bestimmen: $a = \frac{1}{128}$ (auch ohne DERIVE). Und damit $f(x) = \frac{1}{128}(x-4)^2 + \frac{5}{2}$.

Etwas umständlicher ist der Weg über den allgemeinen Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit den Vorgaben $f(12) = 3$, $f(4) = \frac{5}{2}$ und $f'(4) = 0$. Dies ergibt ein lineares 3×3-Gleichungssystem mit der Lösung $a = \frac{1}{128}$, $b = -\frac{1}{16}$ und $c = \frac{21}{8}$. Damit

$$f(x) = \frac{1}{128}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{21}{8} = \frac{1}{128}(x^2 - 8x + 336)\,.$$

b) Es gilt das Rotationsvolumen

$$V = \pi \int_0^{12} f^2(x)\,dx$$

zu berechnen. Nebenstehend die Dokumentation der Rechnung in DERIVE. Wir erhalten als Ergebnis

$$V = \frac{6633}{80} \cdot \pi \approx 260{,}477$$

Damit fasst das Glas etwa 260 cm^3.

```
1/128*(x^2-8*x+336)

;#1^User
(1/128*(x^2-8*x+336))^2

;Int(#2,x)
INT((1/128*(x^2-8*x+336))^2,x,0,12)

;Simp(#3)
6633/80

6633/80*pi

;Approx(#5)
260.4773008
```

c) Man muss die Gleichung $\pi \int_0^b f^2(x)\,dx = 200$ mit der Unbekannten b lösen. Dies ergibt eine Gleichung 5. Grades, für die DERIVE (im Approximations-Modus, Bereich 0 bis 12) als Näherungslösung $b = 9{,}661226733$ ermittelt:

```
1/128*(x^2-8*x+336)

;#1^User
(1/128*(x^2-8*x+336))^2

;Int(#2,x)
INT((1/128*(x^2-8*x+336))^2,x,0,b)

;Expd(#3)
b^5/81920-b^4/4096+23*b^3/1536-21*b^2/128+441*b/64

b^5/81920-b^4/4096+23*b^3/1536-21*b^2/128+441*b/64-200/pi

Precision:=Approximate

;Solve(#5)
b=9.661226733
```

Wie man dieses Ergebnis mit Hilfe des Newton-Verfahrens erreichen kann, dokumentiert die folgende Rechnung in DERIVE. Da das gewünschte Volumen (200 cm^3) nur etwas mehr als drei Viertel des berechneten Gesamtvolumens von 260 cm^3 beträgt, ist die Lage des Eichstrichs in grober erster Näherung bei etwas mehr als 9 cm zu suchen. Daher startet man mit dem ersten Näherungswert $b = 9$.

Die Grundidee des Newton-Verfahrens zur Berechnung von Nullstellen differenzierbarer Funktionen besteht darin, die zu untersuchende Funktion durch ihre Tangente an der Näherungsstelle zu ersetzen. (In DERIVE ist die Tangente als Taylorpolynom 1. Grades einfach berechenbar.) Nun ermittelt man die Nullstelle der Tangentenfunktion und benutzt diese als neuen Näherungswert. Nachfolgend der Ausdruck der Rechnungen in DERIVE:

```
#8:  Precision := Mixed                                            User
```

Taylor(#5,b)

$$\#9:\quad \mathrm{TAYLOR}\left[\frac{b^5}{81920} - \frac{b^4}{4096} + \frac{23\cdot b^3}{1536} - \frac{21\cdot b^2}{128} + \frac{441\cdot b}{64} - \frac{200}{pi},\ b,\ 9,\ 1\right]$$

```
#10: 7.264709472·b - 70.28277801                                   Expd(#9)

#11: b = 9.674547658                                               Solve(#10)
```

Taylor(#5,b)

$$\#12:\quad \mathrm{TAYLOR}\left[\frac{b^5}{81920} - \frac{b^4}{4096} + \frac{23\cdot b^3}{1536} - \frac{21\cdot b^2}{128} + \frac{441\cdot b}{64} - \frac{200}{pi},\ b,\ 9.674547658,\ 1\right]$$

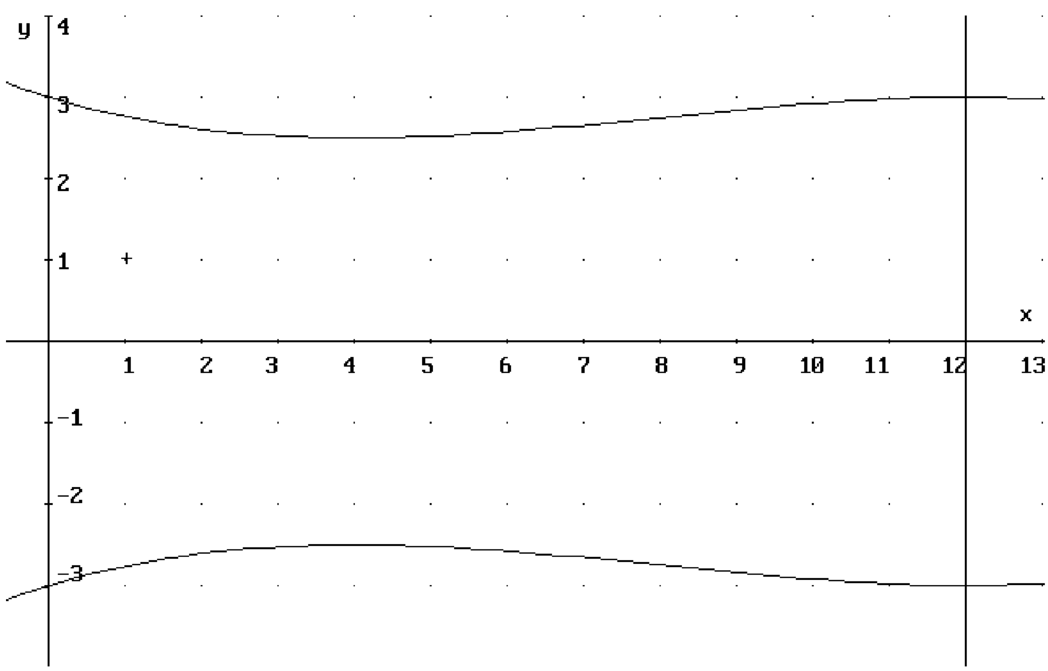
```
#13: 7.571117306·b - 73.14632417                                   Expd(#12)

#14: b = 9.661232446                                               Solve(#13)
```

Bereits beim nächsten Approximationsschritt erhält man die Genauigkeit des von DERIVE gelieferten Näherungswertes (10 Stellen). Der Abstand des Eichstrichs zur Oberkante des Glases beträgt also näherungsweise 2,34 cm.

d) Da es nur eine quadratische Funktion gibt mit den ursprünglichen Forderungen, dabei aber der Bodendurchmesser $2 \cdot f(0) = 5{,}25$ Zentimeter beträgt, kann die zusätzliche Forderung allenfalls durch eine Randfunktion höheren Grades erfüllt werden. Man setzt also eine kubische Funktion $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit den Forderungen $d = g(0) = 3$, $g(12) = 3$, $g(4) = \frac{5}{2}$ und $g'(4) = 0$ an. Dies stellt dann ein lineares 3×3-Gleichungssystem für a, b, c dar. Hier die Rechnung in DERIVE:

```
a*x^3+b*x^2+c*x+3

;Dif(#1,x)
DIF(a*x^3+b*x^2+c*x+3,x)

;Simp(#2)
3*a*x^2+2*b*x+c

;Sub(#1)
a*4^3+b*4^2+c*4+3

a*4^3+b*4^2+c*4+3=5/2

;Sub(#1)
a*12^3+b*12^2+c*12+3

a*12^3+b*12^2+c*12+3=3

;Sub(#3)
3*a*4^2+2*b*4+c

3*a*4^2+2*b*4+c=0

[a*4^3+b*4^2+c*4+3=5/2,a*12^3+b*12^2+c*12+3=3,3*a*4^2+2*b*4+c=0]

;Solve(#10)
[a=-1/512,b=3/64,c=-9/32]
```

Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{512}x^3 + \frac{3}{64}x^2 - \frac{9}{32}x + 3$. Lässt man von DERIVE die Graphen von f und $-f$ zeichnen, so erhält man den folgenden Glaslängsschnitt:



e) Anmerkung: Bei der Aufgabenstellung wurde vereinfachend eine Glasstärke von 2 mm *in y-Richtung gemessen* vorgegeben. Bei der realitätsgerechteren Messung *senkrecht zur Glaswand* wäre die Bestimmung der äußeren Begrenzung des Glasquerschnitts kaum möglich.

Das Volumen des Glasbodens beträgt (in cm^3) $V_\text{B} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot (3 + 0{,}2)^2 \cdot 0{,}4 = 4{,}096\,\pi$. Zur Berechnung des Wandvolumens muss man zwei Rotationsvolumina voneinander subtrahieren. (Mit Hilfe binomischer Formeln vermeidet man Quadrierungen kubischer Terme.)

$$\begin{aligned} V_\text{W} &= \pi \int_0^{12} ((g(x) + 0{,}2)^2 - g^2(x))\,dx \\ &= \pi \int_0^{12} (2 \cdot 0{,}2 \cdot g(x) + 0{,}2^2)\,dx \end{aligned}$$

Nebenstehende Rechnung in DERIVE ergibt $V_\text{W} = 13{,}53\,\pi$ und damit als Glasmasse insgesamt $m = 17{,}626\,\pi \cdot 2{,}1\,\text{g} \approx 116{,}3\,\text{g}$.

```
G(x):=-x^3/512+3*x^2/64-9*x/32+3

2*(0.2)*G(x)+(0.2)^2

;Int(#2,x)
INT(2*(0.2)*G(x)+(0.2)^2,x,0,12)

;Simp(#3)
13.53

13.53*pi

;Approx(#5)
42.50574860
```

Bewertung

Die Note ‘gut’ erreichen Studierende, die mindestens 4 der 5 Aufgabenteile lösen und dabei ihr Vorgehen klar und präzise kommentieren. Die Note ‘ausreichend’ kann vergeben werden, wenn die Bestimmung von Funktionstermen und Berechnung von Rotationsvolumina (Teile a), b)) beherrscht werden und in den Teilen c) und e) durch numerisch korrekte Ergebnisse wenigstens das methodische Handwerkszeug nachgewiesen wird.

Modifikationsmöglichkeiten

Die Vorgabe der Skizze in Teil a) dient dem leichteren Einstieg in die Thematik, kann aber auch entfallen. Umgekehrt kann bei einer schwächeren Lerngruppe Teil e) durch eine Untersuchung des in d) ermittelten Graphen ersetzt werden.
Unter Verzicht auf e) kann man in Teil d) den Einfluss gewisser Parameter auf Gestalt des Glases diskutieren (Maß der „Taille“, unterer bzw. oberer Durchmesser, Glashöhe) und so Funktionsscharen thematisieren.
Bei hinreichend guter Vertrautheit mit dem Programm kann man von den Studierenden in c) auch die graphische Darstellung der Grundidee und Näherungsschritte zur Newton-Approximation einfordern.