Einführung in die Mathematik

Übungen 1. Semester

Dr. Norbert Klingen, Köln-Kolleg

20. Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

1d Mathematik (Kg) **20. August 2009**

Übungen (1)

1) Bestimmen Sie mit Hilfe der Teilbarkeitskriterien möglichst viele Teiler der nachfolgenden Zahlen. Von welchen Zahlen können Sie ausschließen, dass sie Teiler sind?
$a = 553\,637\,225\,625$, $b = 456\,377\,651\,976$, $c = 239\,598\,267\,287\,400$.

2) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegungen der folgenden natürlichen Zahlen:
$a = 198$ $b = 544$ $c = 1024$
$d = 2160$ $e = 24750$ $f = 26 \cdot 13^2 \cdot 98 \cdot 170$
$g = 25^4 \cdot 16^2$ $h = 39^3 \cdot 37^4 \cdot 27^5$

3) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von
a) 27, 39 b) 10000, 500 c) 17, 3433
d) 6, 8, 12 e) 9, 30, 50 f) 34, 85, 153
g) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 11$, $2^3 \cdot 3^4 \cdot 13$ h) $6^3 \cdot 28$, $21^2 \cdot 27$ i) $25^3 \cdot 27$, $32 \cdot 18$

4) Bestimmen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache von
a) 12, 8 b) 18, 24 c) 12, 20, 30
d) 2, 3, 4, 5, 6 e) 39, 34 f) 16, 25
g) $2^3 \cdot 3 \cdot 17$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ h) $17 \cdot 39$, $34 \cdot 26$ i) $2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^8$, $3^{12} \cdot 5^{12}$

5) Stellen Sie die nachfolgenden Zahlen als Produkte von Potenzen mit möglichst kleinen Basen dar:
$a = 6^{10} \cdot 10^4 \cdot 15^5$, $b = 12^5 \cdot 24^7 \cdot 75^3$, $c = 54^4 \cdot 48^5 \cdot 250^5$, $d = 12^6 \cdot 15^7 \cdot 30^2$.
Stellen Sie fest, welche Teilbarkeiten zwischen diesen Zahlen bestehen.

6) Zeigen Sie, dass die folgenden Zahlen Potenzen sind. Mit welcher Basis und welchem Exponenten?
$a = 14^4 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 6^6 \cdot 21^3$, $b = 49^2 \cdot 51^3 \cdot 75 \cdot 17 \cdot 5^2$, $c = 10^4 \cdot 22^5 \cdot 80 \cdot 2^2$.

7) Gegeben sind drei natürliche Zahlen in dualer Darstellung:
$a = 10101$, $b = 11111$, $c = 1000001$.
a) Berechnen Sie (durch schriftliche Rechnung im Dualsystem) $d = b + c$, $e = c - a$ und $f = a \cdot b$.
b) Stellen Sie alle 6 Zahlen a, b, c, d, e, f dezimal dar und überprüfen Sie Ihre Rechnungen.

8) Stellen Sie die folgenden (in üblicher dezimaler Form angegebenen) Zahlen dual dar:
a) 1 bis 9 b) 314 c) 128 d) 255 e) 1000
f) 500 g) 250 h) 13 i) 26 j) 52

9) a) Wandeln Sie die Zahlen $a, \ldots, f$ von Aufgabe 7) ins Hexadezimalsystem um. Überprüfen Sie in dieser neuen Darstellung die Beziehungen $d = b + c$, $e = c - a$ und $f = a \cdot b$.
b) Erläutern Sie die Vor- und Nachteile der Rechnungen *innerhalb* des Dual-, Dezimal- und Hexadezimalsystems.

Übungen (1) — Lösungen

1) a ist nicht durch 2 (oder irgendeine gerade Zahl) teilbar;
a ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar (da die Quersumme durch 3, aber nicht durch 9 teilbar ist);
a ist durch 125 (und daher erst recht durch 25 und 5) teilbar, da die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl 625 durch 125 teilbar ist;
a ist durch 11 teilbar (da die Wechselsumme $5-2+6-5+2-2+7-3+6-3+5-5=11$ durch 11 teilbar ist).
b ist durch 8 teilbar (da $976 = 800 + 160 + 16$ durch 8 teilbar ist);
b ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar (Quersumme 66);
b ist nicht durch 5 teilbar;
b ist nicht durch 11 teilbar (Wechselsumme 4).
c ist durch 8, 9 und 25 teilbar; c ist nicht durch 11 teilbar.
2) $a = 198 = 2 \cdot 99 = 2 \cdot 9 \cdot 11 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$,
$b = 544 = 4 \cdot 136 = 2^2 \cdot 2 \cdot 68 = 2^3 \cdot 4 \cdot 17 = 2^5 \cdot 17$,
$c = 1024 = 2^{10}$,
$d = 10 \cdot 216 = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 24 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$,
$e = 10 \cdot 5 \cdot 495 = 2 \cdot 5^2 \cdot 5 \cdot 99 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11$,
$f = 2 \cdot 13 \cdot 13^2 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 10 \cdot 17 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13^3 \cdot 7^2 \cdot 17$,
$g = (5^2)^4 \cdot (2^4)^2 = 5^8 \cdot 2^8$,
$h = (3 \cdot 13)^3 \cdot 37^4 \cdot (3^3)^5 = 3^{18} \cdot 13^3 \cdot 37^4$.
3) a) $\mathrm{ggT}(27, 39) = \mathrm{ggT}(3^3, 3 \cdot 13) = 3$.
b) $\mathrm{ggT}(10000, 500) = 500$.
c) $\mathrm{ggT}(17, 3433) = 1$, da 17 eine Primzahl ist und 3433 nicht teilt.
d) $\mathrm{ggT}(6, 8, 12) = \mathrm{ggT}(2 \cdot 3, 2^3, 2^2 \cdot 3) = 2$.
e) $\mathrm{ggT}(9, 30, 50) = 1$, da $9 = 3^2$ und 3 kein Teiler von 50 ist.
f) $\mathrm{ggT}(34, 85, 153) = \mathrm{ggT}(2 \cdot 17, 5 \cdot 17, 9 \cdot 17) = 17$.
g) $\mathrm{ggT}(2^4 \cdot 3^3 \cdot 11, 2^3 \cdot 3^4 \cdot 13) = 2^3 \cdot 3^3 = 216$.
h) $\mathrm{ggT}(6^3 \cdot 28, 21^2 \cdot 27) = \mathrm{ggT}(2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 7, 3^2 \cdot 7^2 \cdot 3^3) = \mathrm{ggT}(2^5 \cdot 3^3 \cdot 7, 3^5 \cdot 7^2) = 3^3 \cdot 7 = 189$.
i) $\mathrm{ggT}(25^3 \cdot 27, 32 \cdot 18) = \mathrm{ggT}(5^6 \cdot 3^3, 2^5 \cdot 2 \cdot 3^2) = 3^2 = 9$.
4) a) $\mathrm{kgV}(12, 8) = \mathrm{kgV}(2^2 \cdot 3, 2^3) = 2^3 \cdot 3 = 24$.
b) $\mathrm{kgV}(18, 24) = \mathrm{kgV}(2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.
c) $\mathrm{kgV}(12, 20, 30) = \mathrm{kgV}(2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.
d) $\mathrm{kgV}(2, 3, 4, 5, 6) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
e) $\mathrm{kgV}(39, 34) = 39 \cdot 34 = 1326$, da 39 und 34 keinen Primteiler gemeinsam haben (teilerfremd sind).
f) $\mathrm{kgV}(16, 25) = 16 \cdot 25 = 400$, da 16 und 25 teilerfremd sind.
g) $\mathrm{kgV}(2^3 \cdot 3 \cdot 17, 2^2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 2040$.
h) $\mathrm{kgV}(17 \cdot 39, 24 \cdot 26) = \mathrm{kgV}(3 \cdot 13 \cdot 17, 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13) = 2^4 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 = 10608$
i) $\mathrm{kgV}(2^{10} \cdot 3^3 \cdot 2^8 \cdot 5^8, 3^{12} \cdot 5^{12}) = \mathrm{kgV}(2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5^8, 3^{12} \cdot 5^{12}) = 2^{18} \cdot 3^{12} \cdot 5^{12} = 2^6 \cdot 3^{12} \cdot (2 \cdot 5)^{12} = 34012224 \cdot 10^{12} = 34012224000000000000$.
5) $a = 6^{10} \cdot 10^4 \cdot 15^5 = (2 \cdot 3)^{10} \cdot (2 \cdot 5)^4 \cdot (3 \cdot 5)^5 = 2^{10+4} \cdot 3^{10+5} \cdot 5^{4+5} = 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^9$.
$b = 12^5 \cdot 24^7 \cdot 75^3 = (2^2 \cdot 3)^5 \cdot (2^3 \cdot 3)^7 \cdot (3 \cdot 5^2)^3 = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 2^{21} \cdot 3^7 \cdot 3^3 \cdot 5^6 = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^6$.
$c = 54^4 \cdot 48^5 \cdot 250^5 = (2 \cdot 3^3)^4 \cdot (2^4 \cdot 3)^5 \cdot (2 \cdot 5^3)^5 = 2^{4+20+5} \cdot 3^{12+5} \cdot 5^{15} = 2^{29} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$.
$d = 12^6 \cdot 15^7 \cdot 30^2 = (2^2 \cdot 3)^6 \cdot (3 \cdot 5)^7 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^9$.

Offenbar ist $d = a$, insbesondere teilen sich a und d *gegenseitig.*
a teilt c, weil die Exponenten in der Darstellung von a *sämtlich* kleiner oder gleich den entsprechenden Exponenten in der Darstellung von c sind. b ist weder Teiler noch Vielfaches einer der anderen Zahlen.

6) $a = 2^4 \cdot 7^4 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 2^6 \cdot 3^6 \cdot 3^3 \cdot 7^3 = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 7^{10} = 42^{10}$,
$b = 7^4 \cdot 3^3 \cdot 17^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 5^2 = 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 17^4 = (3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17)^4 = 1785^4$,
$c = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 2^5 \cdot 11^5 \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot 2^2 = 2^{15} \cdot 5^5 \cdot 11^5 = 8^5 \cdot 5^5 \cdot 11^5 = 440^5$.
Die Frage, ob eine natürliche Zahl eine Potenz ist, kann man also an der Primzerlegung ablesen.

- Eine natürliche Zahl ist genau dann k-te Potenz einer natürlichen Zahl, wenn in ihrer Primzerlegung *alle* Exponenten Vielfache von k sind.

7) a) Bei der schriftlichen Addition bzw. Subtraktion im Dualsystem beachte man: $\mathsf{I} + \mathsf{I} = \mathsf{0}$ mit *Übertrag* I.

$d = b + c:$

$$\begin{array}{r} \mathsf{I\ I\ I\ I\ I} \\ +\ \mathsf{I\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ I} \\ \hline \mathsf{I\ I\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0} \end{array}$$

$e = c - a:$

$$\begin{array}{r} \mathsf{I\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ I} \\ -\quad \mathsf{I\ 0\ I\ 0\ I} \\ \hline \mathsf{I\ 0\ I\ I\ 0\ 0} \end{array}$$

$f = a \cdot b:$

$$\begin{array}{l} \mathsf{I\ I\ I\ I\ I} \cdot \mathsf{I\ 0\ I\ 0\ I} \\ \hline \mathsf{I\ I\ I\ I\ I} \\ \qquad \mathsf{I\ I\ I\ I\ I} \\ \qquad\qquad \mathsf{I\ I\ I\ I\ I} \\ \hline \mathsf{I\ 0\ I\ 0\ 0\ 0\ I\ 0\ I\ I} \end{array}$$

b) Wir wandeln in dezimale Darstellung um:
$a = \mathsf{I0I0I} = 1 + 4 + 16 = 21$,
$b = \mathsf{IIIII} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$,
$c = \mathsf{I00000I} = 1 + 64 = 65$,
$d = \mathsf{II00000} = 32 + 64 = 96\ (= b + c)$,
$e = \mathsf{I0II00} = 4 + 8 + 32 = 44\ (= c - a)$,
$f = \mathsf{I0I000I0II} = 1 + 2 + 8 + 128 + 512 = 651\ (= a \cdot b)$.

8) a) $1 = \mathsf{I}$, $2 = \mathsf{I0}$, $3 = \mathsf{II}$, $4 = \mathsf{I00}$, $5 = \mathsf{I0I}$, $6 = \mathsf{II0}$, $7 = \mathsf{III}$, $8 = \mathsf{I000}$, $9 = \mathsf{I00I}$

b) Methode 1 – In Zweierpotenzen zerlegen:
$314 = 256 + 58 = 256 + 32 + 26 = 256 + 32 + 16 + 10 = 256 + 32 + 16 + 8 + 2 = 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2 = \mathsf{I00III0I0}$
Methode 2 – Halbieren mit Rest:

halbierte Zahlen	0 ←	1 ←	2 ←	4 ←	9 ←	19 ←	39 ←	78 ←	157 ←	314
Rest=Dualziffer		I	0	0	I	I	I	0	I	0

c) $128 = \mathsf{I0000000}$
d) $255 = \mathsf{IIIIIIII}$
e) $1000 = 8 \cdot 125 = \mathsf{I000} \cdot \mathsf{IIIII0I} = \mathsf{IIIII0I000}$
f) $500 = 1000 : 2 = \mathsf{IIIII0I000} : \mathsf{I0} = \mathsf{IIIII0I00}$
g) $250 = \mathsf{IIIII0I0}$
h) $13 = \mathsf{II0I}$
i) $26 = 13 \cdot 2 = \mathsf{II0I} \cdot \mathsf{I0} = \mathsf{II0I0}$
j) $52 = \mathsf{II0I00}$

9) a) Da die Basis des Hexadezimalsystems $16 = 2^4$ ist, kann man je 4 Dualziffern zu einer Hexadezimal-Ziffer zusammenfassen. (Man braucht also nur die Umwandlung von 4-stelligen Dualzahlen in Hexadezimalziffern zu beherrschen, etwa indem man eine Liste dafür anlegt.) Daher ist die Umwandlung zwischen diesen beiden Zahldarstellungen besonders einfach. (Dies ist der Grund dafür, dass in Computern über dem zugrundeliegenden Dualsystem meist mit Zahldarstellungen auf Zweierpotenz-Basis gearbeitet wird.)

Wir unterteilen also die Dualdarstellungen von $a, \ldots, f$ in Vitererblöcke und wandeln diese in Hexadezimalziffern um:
$a = \mathsf{1\ 0101}$: $\mathsf{0101} = 1 + 4 = 5 = 5_\mathrm{h}$, also $a = 15_\mathrm{h}$,
$b = \mathsf{1\ 1111}$: $\mathsf{1111} = 15 = \mathrm{F}_\mathrm{h}$, also $b = 1\mathrm{F}_\mathrm{h}$,
$c = \mathsf{100\ 0001}$: $\mathsf{0001} = 1 = 1_\mathrm{h}$, $\mathsf{100} = 4 = 4_\mathrm{h}$, also $c = 41_\mathrm{h}$,
$d = b + c = 1\mathrm{F}_\mathrm{h} + 41_\mathrm{h} = 60_\mathrm{h}$,
$e = c - a = 41_\mathrm{h} - 15_\mathrm{h} = 2\mathrm{C}_\mathrm{h}$,
$f = a \cdot b = 15_\mathrm{h} \cdot 1\mathrm{F}_\mathrm{h}$. Um dies im Hexadezimalsystem berechnen zu können, muss man das 'kleine Einmaleins' für die hexadezimalen Ziffern aufstellen. So etwa benötigt man für die nebenstehende Rechnung: $5_\mathrm{h} \cdot \mathrm{F}_\mathrm{h} = 5 \cdot 15 = 75 = 4 \cdot 16 + 11 = 4\mathrm{B}_\mathrm{h}$. Man erhält schließlich $f = 28\mathrm{B}_\mathrm{h}$. (Kontrolle: $f = 28\mathrm{B}_\mathrm{h} = 2 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16 + 11 = 2 \cdot 256 + 128 + 11 = 512 + 139 = 651$.)

$$\begin{array}{l} \underline{1\ 5\ \cdot\ 1\ \mathrm{F}} \\ 1\ 5 \\ \underline{1\ 3\ \mathrm{B}} \\ 2\ 8\ \mathrm{B} \end{array}$$

b) Im Dualsystem haben die Zahlen viermal soviel Ziffern wie im Hexadezimalsystem, dafür ist aber die Addition und besonders die Multiplikation der Dualziffern wesentlich einfacher. So einfach, dass sie in einem Microprozessor realisiert werden können.

Übungen (2)

1) Beschreiben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form:
   a) die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen,
   b) die Menge der zweistelligen durch sieben teilbaren Zahlen,
   c) die Menge T_{60} der Teiler von 60,
   d) die Menge der arabischen Ziffern,
   e) die Menge der Zweierpotenzen.
   Welche der Mengen sind endlich, welche unendlich?
2) Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch eine charakteristische Eigenschaft:
   a) $A = \{4, 8, 12, 16, \ldots\}$,
   b) $B = \{10, 100, 1000, 10000, \ldots\}$,
   c) $C = \{6, 12, 18, 24, \ldots\}$,
   d) $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,
   e) $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$,
   f) $F = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.
3) Es sei Q die Menge der Quadratzahlen und $\mathcal{P}$ die Menge der Primzahlen.
   a) Geben Sie an, welche der folgenden Zahlen

   $$1\,, 4\,, 5\,, 6\,, 9\,, 12\,, 24\,, 25\,, 27\,, 1234544554355$$

   zu diesen Mengen gehören und welche nicht. Verwenden Sie dabei die mathematischen Symbole $\in$ und $\notin$.
   b) Welche Zahlen gehören zu beiden Mengen?
4) Berechnen Sie:
   a) $(8 - 4) + (7 - 8) - (-6 + 9)$
   b) $(-3)(16 - 18) - (17 - 19)(-4) - (34 - 28)(22 - 28)$
   c) $(x - y) + (3x - 7y) - (4x + 5y)$
   d) $(-4x) \cdot 7x$
   e) $(-3x) \cdot 6y \cdot (-4x)$
   f) $(-x)(2x + y) + (3x - y)(-y) - (4x + 4y) \cdot 6y$
5) a) Definieren Sie den Betrag $|x|$ einer Zahl x.
   Berechnen Sie:
   b) $|-7|$
   c) $|7 - 12|$
   d) $|(13 - 24)(7 - 12)|$
6) Lösen Sie Klammern auf und fassen Sie zusammen:
   a) $(5x - 6y) - (3x - 7y)$
   b) $(3p - 4q) - (-5p + 7q) + (-9p - 10q)$
   c) $8(7u - v) - 12(4u - 5v)$
   d) $-5r(6k - 7r) - 6k(-5r + 6k)$

Übungen (2) — Lösungen

1) a) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$,
b) $\{14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}$,
c) $T_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$,
d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
e) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots\}$.
Die Mengen unter a) und e) sind unendlich, die anderen endlich.

2) a) A ist die Menge der Vielfachen von 4.
b) B ist die Menge der Potenzen von 10.
c) C ist die Menge der durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen.
d) D ist die Menge der Teiler von 12.
e) E soll die Menge aller Primzahlen darstellen, und
f) F die Menge aller Quadrate von natürlichen Zahlen.

3) a) Von der letzten Zahl 1234544554355 abgesehen gilt:

$$1 \in Q\,, 4 \in Q\,, 5 \notin Q\,, 6 \notin Q\,, 9 \in Q\,, 12 \notin Q\,, 24 \notin Q\,, 25 \in Q\,, 27 \notin Q\,,$$
$$1 \notin \mathcal{P}\,, 4 \notin \mathcal{P}\,, 5 \in \mathcal{P}\,, 6 \notin \mathcal{P}\,, 9 \notin \mathcal{P}\,, 12 \notin \mathcal{P}\,, 24 \notin \mathcal{P}\,, 25 \notin \mathcal{P}\,, 27 \notin \mathcal{P}\,.$$

Schließlich gilt:
$$1234544554355 \notin Q\,,\ 1234544554355 \notin \mathcal{P}\,.$$

Zur Begründung: Diese Zahl ist offensichtlich durch 5 teilbar, aber von 5 verschieden, ist also keine Primzahl. Wäre sie eine Quadratzahl, so müßte sie nicht nur durch 5, sondern dann sogar durch 25 teilbar sein. Dies ist aber nicht der Fall, weil die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl nicht durch 25 teilbar ist. Also kann 1234544554355 keine Quadratzahl sein.
b) Keine. (Eine Quadratzahl kann keine Primzahl sein.)

4) a) $(8-4)+(7-8)-(-6+9) = 4-1-3 = 0$.
b) $(-3)(16-18)-(17-19)(-4)-(34-28)(22-28) =$
$= (-3)(-2)-(-2)(-4)-6(-6) = 6-8+36 = 34$.
c) $(x-y)+(3x-7y)-(4x+5y) = x-y+3x-7y-4x-5y = -13y$.
d) $(-4x)\cdot 7x = -28x^2$.
e) $(-3x)\cdot 6y\cdot(-4x) = 72x^2y$.
f) $(-x)(2x+y)+(3x-y)(-y)-(4x+4y)\cdot 6y =$
$= -2x^2-xy-3xy+y^2-24xy-24y^2 = -2x^2-28xy-23y^2$.

5) a) Anschaulich gesprochen ist der Betrag $|x|$ einer rationalen Zahl x der Abstand von der 0. Dies bedeutet, für positive Zahlen ist der Betrag gleich der Zahl selbst, während für negative Zahlen der Betrag genau die Gegenzahl ist: $|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$.
b) $|-7| = 7$, c) $|7-12| = 5$, d) $|(13-24)(7-12)| = 55$.

6) a) $(5x-6y)-(3x-7y) = 2x+y$.
b) $(3p-4q)-(-5p+7q)+(-9p-10q) =$
$= 3p-4q+5p-7q-9p-10q = -p-21q$.
c) $8(7u-v)-12(4u-5v) = 56u-8v-48u+60v = 8u+52v$.
d) $-5r(6k-7r)-6k(-5r+6k) = -30kr+35r^2+30kr-36k^2 = 35r^2-36k^2$.

Übungen (3)

1) Schreiben Sie die folgenden Terme als Produkt, indem Sie 'ausklammern':
   a) $4x^2y - 6xy + 12xy^3 - 24x^2y^2 =$
   b) $3pq^2 + 6p^2q^3 - 6p^3q^2 - 3p^2q^2 =$
   c) $17a^2b + 7ab - 24a^2b - 14a^3b =$
   d) $4a^3b^2z - 2ab^3z^2 + 10a^2bz^2 =$
   e) $a(x-3) + b(x-3) =$
   f) $3(x-1)^2y - 9a(x-1)^3y + 6(x-1)^2y^3 =$
   g) $(u+v) - b(u+v) =$
   h) $a(x-y) + (x-y)^2 =.$
2) a) Formulieren Sie das Distributivgesetz.
   b) Folgern Sie daraus die Regel:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd\,.$$

   Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:
   c) $(2a+3b)(c+d) =$
   d) $(9x-5y)(7x-6y) =$
   e) $(x-4)(x-5) =$
   f) $(x+y)(x-y)(2x+y) =$
   g) $(2a-3b)(-2b-3a) =$
   h) $(4b^2-3b)(b-2b^2) =$
   i) $(9x-5y)(7y-6x) =$
   j) $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4) =$
   k) $(a+b)(a-b) =$
3) Lösen Sie Klammern auf und fassen Sie zusammen:
   a) $(x+y)^2 =$
   b) $(x+y)^3 =$
   c) $(x+y)^4 =$
   d) $(a+b+c)^2 =$
   e) $(a-b+c)^2 =$
   f) $(x-3)^2(x-4) =$
   g) $(3x+2y-z)^2 =$
4) Vereinfachen Sie:
   a) $(x-y)^2 + (x+y)^2 =$
   b) $(x+y)^2 - (x-y)^2 =$
   c) $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1-x) =$
   d) $(1-a+a^2-a^3+a^4-a^5)(1+a) =$
   e) Was vermuten Sie aufgrund Ihrer Ergebnisse bei c) und d) allgemein?

Übungen (3) — Lösungen

1) a) $4x^2y - 6xy + 12xy^3 - 24x^2y^2 = 2xy(2x - 3 + 6y^2 - 12xy)$.
b) $3pq^2 + 6p^2q^3 - 6p^3q^2 - 3p^2q^2 = 3pq^2(1 + 2pq - 2p^2 - p)$.
c) $17a^2b + 7ab - 24a^2b - 14a^3b = -7a^2b + 7ab - 14a^3b = 7ab(-a + 1 - 2a^2)$.
d) $4a^3b^2z - 2ab^3z^2 + 10a^2bz^2 = 2abz(2a^2b - b^2z + 5az)$.
e) $a(x - 3) + b(x - 3) = (a + b)(x - 3)$.
f) $3(x - 1)^2y - 9a(x - 1)^3y + 6(x - 1)^2y^3 = 3(x - 1)^2y\big(1 - 3a(x - 1) + 2y^2\big) = 3(x - 1)^2y(1 + 3a - 3ax + 2y^2)$.
g) $(u + v) - b(u + v) = (1 - b)(u + v)$.
h) $a(x - y) + (x - y)^2 = (a + (x - y))(x - y) = (a + x - y)(x - y)$.

2) a) Es gilt für alle Zahlen x, y, z: $x(y + z) = xy + xz$.
b) $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$.
c) $(2a + 3b)(c + d) = 2ac + 2ad + 3bc + 3bd$.
d) $(9x - 5y)(7x - 6y) = 63x^2 - 54xy - 35xy + 30y^2 = 63x^2 - 89xy + 30y^2$.
e) $(x - 4)(x - 5) = x^2 - 5x - 4x + 20 = x^2 - 9x + 20$.
f) $(x + y)(x - y)(2x + y) = (x^2 - y^2)(2x + y) = 2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3$.
g) $(2a - 3b)(-2b - 3a) = -4ab - 6a^2 + 6b^2 + 9ab = -6a^2 + 5ab + 6b^2$.
h) $(4b^2 - 3b)(b - 2b^2) = 4b^3 - 8b^4 - 3b^2 + 6b^3 = -8b^4 + 10b^3 - 3b^2$.
i) $(9x - 5y)(7y - 6x) = 63xy - 54x^2 - 35y^2 + 30xy = -54x^2 + 93xy - 35y^2$.
j) $(a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 4) = a^4 - 2a^3 + 4a^2 + 2a^3 - 4a^2 + 8a + 4a^2 - 8a + 16 = a^4 + 4a^2 + 16$.
k) $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

3) a) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,
b) $(x + y)^3 = (x^2 + 2xy + y^2)(x + y) =$
$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$,
c) $(x + y)^4 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x + y) = \ldots =$
$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.
d) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$,
e) $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$.
f) $(x - 3)^2(x - 4) = (x^2 - 6x + 9)(x - 4) = x^3 - 10x^2 + 33x - 36$.
g) $(3x + 2y - z)^2 = 9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz$.

4) a) $(x - y)^2 + (x + y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$.
b) $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = 2xy + 2xy = 4xy$.
c) $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1-x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6 = 1 - x^6$.
d) $(1-a+a^2-a^3+a^4-a^5)(1+a) = 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a-a^2+a^3-a^4+a^5-a^6 = 1 - a^6$.
Wir bemerken, dass diese Formel ein Spezialfall von c) ist; setzt man nämlich in c) für x den Term $-a$ ein, so erhält man

$$(1 + (-a) + (-a)2 + (-a)^3 + (-a)^4 + (-a)^5)(1 - (-a)) = (1 - (-a)^6)\,, \text{ also}$$
$$(1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5)(1 + a) = (1 - a^6)\,.$$

e) In Verallgemeinerung von c) gilt für alle natürlichen Exponenten n:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}\,. \qquad (*)$$

Eine Verallgemeinerung von d) erhält man, indem man wieder x durch $-a$ ersetzt.

Übungen (4)

1) a) Was versteht man unter Erweitern und Kürzen einer Bruchzahl? Was ändert sich dabei, was ändert sich nicht?
   b) Begründen Sie: $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.
   c) Welche weiteren Rechenregeln mit Vorzeichen kennen Sie bei Bruchzahlen?
2) a) Wiederholen Sie das Kriterium für die Gleichheit von Brüchen.
   b) Ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ heißt (vollständig) *gekürzt,* wenn $b > 0$ ist und a, b teilerfremd sind. Zeigen Sie: Zwei gekürzte Brüche können nur dann dieselbe Bruchzahl darstellen, wenn sowohl ihre Zähler als auch ihre Nenner übereinstimmen, m. a. W. wenn die beiden Brüche *identisch* sind.
3) Berechnen Sie die folgenden Bruchzahlen:
   a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{-3} =$ b) $3 \cdot \frac{2}{9} - \frac{-3}{-2} =$
   c) $\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14} : \frac{3}{18} =$ d) $\frac{7}{9} : (\frac{7}{18} + \frac{2}{9}) + \frac{-2}{7} =$
4) Berechnen Sie die folgenden Bruchterme:
   a) $\frac{2x - y}{x - 1} + \frac{y - 2x}{x + 1} =$ b) $\frac{x - y}{y - x} =$
   c) $\frac{(x - a)(x^2 + a^2)(x + a)}{(x^2 - a^2)(x + a)^2} =$ d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} =$
   e) $\frac{x + y}{\frac{x-y}{x^2-y^2}} =$ f) $\frac{\frac{x+y}{x-y}}{x^2 - y^2} =$
   g) $\frac{x - y}{x + y} + \frac{x + y}{x - y} =$ h) $\frac{\frac{x^2-y^2}{x-y}}{\frac{x+y}{x-y}} =$

Übungen (4) — Lösungen

1) a) Einen Bruch *erweitern* heißt Zähler und Nenner mit derselben Zahl $\neq 0$ mupltiplizieren; einen Bruch *kürzen* heißt Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl $\neq 0$ teilen. Dabei ändern sich zwar Zähler und Nenner des Bruches, nicht aber die Bruch*zahl.*
b) Die beiden Brüche entstehen auseinander durch Erweitern mit -1 und stellen daher dieselbe Bruchzahl dar.
c) Es gilt
$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}\,.$$

2) a) Es gilt
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{genau dann, wenn} \quad ad = bc\,.$$
b) Selbstverständlich stellen identische Brüche dieselbe Zahl dar. Seien nun umgekehrt zwei Brüche wie in a) gegeben, die dieselbe Zahl darstellen. Also gilt mit den Bezeichnungen aus a): $ad = bc$. Sind nun beide Brüche zusätzlich gekürzt, so gilt $b, d > 0$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(c, d) = 1$. Aus $ad = bc$ folgt, daß b ein Teiler von ad ist. Da a und b teilerfremd sind, muß b ein Teiler von d sein. Umgekehrt erhält man genauso $d \mid b$. Für zwei positive Zahlen bedeutet dies aber Gleichheit: $b = d$. Damit gilt dann $ad = bc \iff ab = bc \iff a = c$. Insgesamt sind somit die beiden gegebenen Brüche identisch.

3) Ergebnisse:

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{1}{6}$

b) $3 \cdot \dfrac{2}{9} - \dfrac{-3}{-2} = -\dfrac{5}{6}$

c) $\dfrac{7}{9} \cdot \dfrac{3}{14} : \dfrac{3}{18} = 1$

d) $\dfrac{7}{9} : (\dfrac{7}{18} + \dfrac{2}{9}) + \dfrac{-2}{7} = \dfrac{76}{77}$

4) Ergebnisse:

a) $\dfrac{2x-y}{x-1} + \dfrac{y-2x}{x+1} = \dfrac{4x-2y}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x-y}{y-x} = -1$

c) $\dfrac{(x-a)(x^2+a^2)(x+a)}{(x^2-a^2)(x+a)^2} = \dfrac{x^2+a^2}{(x+a)^2}$

d) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x^2+x}$

e) $\dfrac{x+y}{\frac{x-y}{x^2-y^2}} = (x+y)^2$

f) $\dfrac{\frac{x+y}{x-y}}{x^2-y^2} = \dfrac{1}{(x-y)^2}$

g) $\dfrac{x-y}{x+y} + \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}$

h) $\dfrac{\frac{x^2-y^2}{x-y}}{\frac{x+y}{x-y}} = x-y$

Übungen (5)

1) Berechnen Sie (ohne Taschenrechner):
   a) $2^{-4} =$
   b) $3^{-3} =$
   c) $5^{-2} =$
   d) $2^{-5} =$
   e) $\dfrac{2^{-4}}{3^{-2}} =$
   f) $\dfrac{3^{-2} \cdot 2^4 \cdot 3^3}{2^{-2} \cdot 3^4 \cdot 2^3} =$
   g) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \dfrac{3^{-2}}{2^3} =$

2) Berechnen Sie (ohne Taschenrechner) und stellen Sie das Ergebnis als Bruch und ohne negative Exponenten dar:
   a) $3^{-99} - 2 \cdot 3^{-100} =$
   b) $(2^{-100} - 2^{-99}) \cdot 2^{100} =$
   c) $\dfrac{2^{-199} - 2^{-200}}{2^{-201} - 2^{-200}} =$
   d) $\dfrac{5^{-99} + 5^{-100}}{5^{-100}}$

3) Berechnen Sie durch Ausmultiplizieren und Anwendung der Potenzgesetze:
   a) $(2^{1302} + 2^{1300})(2^{-1301} - 2^{-1300}) =$
   b) $(3^{-201} - 3^{-200})(3^{201} - 3^{200}) =$
   c) $3^{100} \cdot (3^{-99} - 3^{-100}) =$

4) Stellen Sie die folgenden Terme ohne negative Exponenten dar:
   a) $\dfrac{x^{-3}y^2z^{-2}}{x^2y^3z^{-3}} =$
   b) $\dfrac{a^{-2}b^{-3}c^4}{a^{-4}b^2c^2} =$
   c) $\dfrac{x^{-3}(yz)^{-3}}{(xy)^2z^{-2}} =$
   d) $x^2y^{-2}z^3 \cdot x^{-3}y^{-5}z^{-2} =$

Übungen (5) — Lösungen

1) Ergebnisse:

a) $\frac{1}{16}$, b) $\frac{1}{27}$, c) $\frac{1}{25}$, d) $\frac{1}{32}$, e) $\frac{3^2}{2^4} = \frac{9}{16}$,

f) $\frac{2^4 \cdot 3}{3^4 \cdot 2} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$,

g) $\frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} \cdot \frac{1}{3^2 \cdot 2^3} = \frac{3^2 \cdot 2^6}{2^2 \cdot 3^5 \cdot 2^3} = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27}$.

2) Weg 1: Definition der Potenzen mit negativen Exponenten einsetzen und Bruchrechnung anwenden:

a) $3^{-99} - 2 \cdot 3^{-100} = \frac{1}{3^{99}} - \frac{2}{3^{100}} = \frac{3}{3^{100}} - \frac{2}{3^{100}} = \frac{1}{3^{100}}$,

b) $(2^{-100} - 2^{-99}) \cdot 2^{100} = \left(\frac{1}{2^{100}} - \frac{1}{2^{99}}\right) \cdot 2^{100} = \left(\frac{1}{2^{100}} - \frac{2}{2^{100}}\right) \cdot 2^{100} = -1$,

c) $\frac{2^{-199} - 2^{-200}}{2^{-201} - 2^{-200}} = \frac{\frac{1}{2^{199}} - \frac{1}{2^{200}}}{\frac{1}{2^{201}} - \frac{1}{2^{200}}} = \frac{\frac{2-1}{2^{200}}}{\frac{1-2}{2^{201}}} = \frac{1}{2^{200}} \cdot \frac{2^{201}}{-1} = -2$,

d) $\frac{5^{-99} + 5^{-100}}{5^{-100}} = \frac{\frac{1}{5^{99}} + \frac{1}{5^{100}}}{\frac{1}{5^{100}}} = \left(\frac{5}{5^{100}} + \frac{1}{5^{100}}\right) \cdot \frac{5^{100}}{1} = 6$.

Weg 2: Potenzgesetze anwenden, indem man die Potenz mit niedrigstem Exponenten ausklammert oder mit passender Potenz erweitert oder ausmultipliziert:

a) $3^{-99} - 2 \cdot 3^{-100} = 3^{-100} \cdot (3^1 - 2) = 3^{-100} = \frac{1}{3^{100}}$,

b) $(2^{-100} - 2^{-99}) \cdot 2^{100} = 2^0 - 2^1 = 1 - 2 = -1$,

c) $\frac{2^{-199} - 2^{-200}}{2^{-201} - 2^{-200}} = \frac{(2^{-199} - 2^{-200}) \cdot 2^{200}}{(2^{-201} - 2^{-200}) \cdot 2^{200}} = \frac{2-1}{2^{-1} - 1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$,

d) $\frac{5^{-99} + 5^{-100}}{5^{-100}} = (5^{-99} + 5^{-100}) \cdot 5^{100} = 5^1 + 1 = 6$.

Ich glaube, man erkennt deutlich die Vorteile des 2. Weges: Die Anwendung der Potenzgesetze vermeidet Doppelbrüche und ersetzt weitgehend die Bruchrechnung.

3) a) $(2^{1302} + 2^{1300})(2^{-1301} - 2^{-1300}) = 2^1 - 2^2 + 2^{-1} - 2^0 = 2 - 4 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$

b) $(3^{-201} - 3^{-200})(3^{201} - 3^{200}) = 3^0 - 3^{-1} - 3^1 + 3^0 = 1 - \frac{1}{3} - 3 + 1 = -\frac{4}{3}$

c) $3^{100} \cdot (3^{-99} - 3^{-100}) = 3^1 - 3^0 = 2$

4) Wir wenden die Potenzgesetze an: $a^k a^l = a^{k+l}$, $\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$, $a^k b^k = (ab)^k$:

a) $\frac{x^{-3}y^2z^{-2}}{x^2y^3z^{-3}} = x^{-3-2}y^{2-3}z^{-2-(-3)} = x^{-5}y^{-1}z^1 = \frac{z}{x^5y}$,

b) $\frac{a^{-2}b^{-3}c^4}{a^{-4}b^2c^2} = a^{-2-(-4)}b^{-3-2}c^{4-2} = a^2b^{-5}c^2 = \frac{a^2c^2}{b^5}$,

c) $\dfrac{x^{-3}(yz)^{-3}}{(xy)^2 z^{-2}} = \dfrac{x^{-3}y^{-3}z^{-3}}{x^2y^2z^{-2}} = x^{-3-2}y^{-3-2}z^{-3-(-2)} = x^{-5}y^{-5}z^{-1} = \dfrac{1}{x^5y^5z}$,

d) $x^2y^{-2}z^3 \cdot x^{-3}y^{-5}z^{-2} = x^{2+(-3)}y^{-2+(-5)}z^{3+(-2)} = x^{-1}y^{-7}z^1 = \dfrac{z}{xy^7}$.

Übungen (6)

Lösen Sie die nachfolgenden (Un)Gleichungen über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen:

1) $3(x-2) = 4x+7$
2) $8z-(5-z) = 4(2-3z)$
3) $9x = 13+(6x-13)$
4) $8(3z-20) = 4(6z-40)$
5) $(x-3)(x-5) > (x-2)(x-6)$
6) $5(3x-1) = 3(5x-2)$
7) $(x+6)(x+1) < (x+2)(x+4)$
8) $(2x-4)(x+5) > (x-3)(2x+5)$
9) $(4-3x)(4x-7) \leq (2x+5)(7-6x)$
10) $x(x-3) = x(2x+5)$

Übertragen Sie die nachfolgenden Fragen zunächst in (Un)Gleichungen für die gesuchte(n) Zahl(en). Formulieren Sie diesen *Ansatz* so dicht wie möglich am Text der Aufgabe. Beantworten Sie dann die gestellten Fragen.

11) Von welcher Zahl ist das 3-fache um 4 größer als das 5-fache?
12) Bei welchen 5 aufeinanderfolgenden Zahlen ist die Summe viermal so groß wie die Summe der beiden kleinsten dieser Zahlen?

Lösen Sie die folgenden (Un)Gleichungen mit Formvariablen (*Parametern*).

13) a) $3x+4a = 5x+8a$, b) $(x+a)(a-2) < (x-a)(a+2)$.
14) $(x-a)(a+2)+4a = 2(x-a)$
15) $6(4x+a) = 8(3x+a)$
16) a) $ax = a$, b) $ax = 1$.
17) a) $ax < a$, b) $a^2x < a^2$, c) $ax < x$

Übungen (6) — Lösungen

1)
$$\begin{aligned} 3x-6 &= 4x+7 \quad |-3x-7 \\ \iff -13 &= x \end{aligned}$$
Also: $\mathbb{L} = \{-13\}$

2)
$$\begin{aligned} 8z-(5-z) &= 4(2-3z) \\ \iff 9z-5 &= 8-12z \quad |+12z+5 \\ \iff 21z &= 13 \quad |:21 \\ \iff z &= \tfrac{13}{21} \end{aligned}$$
Also: $\mathbb{L} = \{\tfrac{13}{21}\}$

3)
$$\begin{aligned} 9x &= 13+(6x-13) \\ \iff 9x &= 6x \quad |-6x \\ \iff 3x &= 0 \quad |:3 \\ \iff x &= 0 \end{aligned}$$
Also: $\mathbb{L} = \{0\}$

4)
$$\begin{aligned} 8(3z-20) &= 4(6z-40) \\ \iff 24z-160 &= 24z-160 \quad |-24z+160 \\ \iff 0 &= 0 \end{aligned}$$
Da die letzte Gleichung wahr ist, ist (wegen der Äquivalenz) auch die erste immer wahr. Das bedeutet, alle Zahlen sind Lösungen: $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.

5)
$$\begin{aligned} (x-3)(x-5) &> (x-2)(x-6) \\ \iff x^2-3x-5x+15 &> x^2-2x-6x+12 \quad |-x^2 \\ \iff -8x+15 &> -8x+12 \quad |+8x \\ \iff 15 &> 12 \end{aligned}$$
Da die letzte Ungleichung wahr ist, ist auch die erste immer wahr, also $L = \mathbb{Q}$.

6)
$$\begin{aligned} 5(3x-1) &= 3(5x-2) \\ \iff 15x-5 &= 15x-6 \quad |-15x \\ \iff -5 &= -6 \end{aligned}$$
Da die letzte Gleichung falsch ist, ist (wegen der Äquivalenz) auch die erste immer falsch. Das bedeutet, sie hat keine Lösung: $\mathbb{L} = \emptyset$.

7)
$$\begin{aligned} (x+6)(x+1) &< (x+2)(x+4) \\ \iff x^2+7x+6 &< x^2+6x+8 \quad |-x^2-6x-6 \\ \iff x &< 2 \end{aligned}$$
Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\} =]-\infty; 2[$.

8)
$$\begin{aligned} (2x-4)(x+5) &> (x-3)(2x+5) \\ \iff 2x^2+6x-20 &> 2x^2-x-15 \quad |-2x^2+x+20 \\ \iff 7x &> 5 \quad |:7(>0!) \\ \iff x &> \tfrac{5}{7} \end{aligned}$$
Also $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \tfrac{5}{7}\} =]\tfrac{5}{7}; \infty[$.

9)
$$\begin{aligned}
& (4-3x)(4x-7) \leq (2x+5)(7-6x) \\
\iff\ & -12x^2+37x-28 \leq -12x^2-16x+35 \quad \mid +12x^2+16x+28 \\
\iff\ & 53x \leq 63 \quad \mid :53(>0!) \\
\iff\ & x \leq \tfrac{63}{53}
\end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \frac{63}{53}\} = \left]-\infty; \frac{63}{53}\right]$.

10) Behandelt man diese Gleichung wie die anderen (ausmultiplizieren), so wird man auf eine sog. *quadratische* Gleichung geführt, die Sie zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch nicht lösen können.
Der andere, im Unterricht vorgeschlagene Weg war: Man dividiere beide Seiten der Gleichung durch x. Dies ist aber *keine* Äquivalenzumformung, denn dafür müsste sichergestellt sein, dass x nicht 0 ist; andernfalls ist die Division durch x nicht möglich! Ein möglicher Ausweg war (Vorschlag Frau Häger): Man formt die Gleichung zunächst um in eine Gleichung mit rechter Seite 0 und stelle die linke Seite nach Möglichkeit als Produkt dar. Dies ist hier durch Ausklammern möglich:

$$x(x-3) = x(2x+5) \iff x^2-3x = 2x^2+5x \iff 0 = x^2+8x = x \cdot (x+8)$$

Jetzt benutze man die grundlegende Tatsache: Ein Produkt kann nur dann Null sein, wenn wenigstens einer der Faktoren 0 ist. Dies bedeutet hier:

$$x \cdot (x+8) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x+8 = 0\,.$$

Auf diese Weise ist die die *eine quadratische* Gleichung äquivalent in *zwei* einfache lineare Gleichungen umgeformt, die sich nun sehr einfach lösen lassen: 0 und -8 sind die Lösungen der beiden linearen Gleichungen und folglich $\mathbb{L} = \{0, -8\}$.
Zu diesem Thema werden wir demnächst noch mehr hören, da sich alle Lösungsmethoden für Gleichungen höheren Grades (d. h. mit höheren x-Potenzen) darauf stützen.

11) Die gesuchte Zahl nennen wir x. Die Forderungen der Aufgabenstellung lauten dann: $3x = 5x+4$. Wir lösen nun diese Gleichung:

$$\begin{aligned}
& 3x = 5x+4 \quad \mid -5x \\
\iff\ & -2x = 4 \quad \mid :(-2) \\
\iff\ & x = -2
\end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl ist -2.

12) Hier ist nach 5 Zahlen gefragt. Da diese aber aufeinanderfolgen sollen, genügt es die kleinste davon zu kennen; nennen wir sie x. Dann sind die anderen $x+1$, $x+2$, $x+3$ und $x+4$. Die gesuchte Zahl x muss also die folgende Gleichung erfüllen:

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 4(x + (x+1))\,.$$

$$\begin{aligned}
& x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 4(x + (x+1)) \\
\iff\ & 5x+10 = 8x+4 \quad \mid -5x-4 \\
\iff\ & 6 = 3x \quad \mid :2 \\
\iff\ & 2 = x
\end{aligned}$$

Die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen sind 2, 3, 4, 5 und 6.

Parameteraufgaben löst man zunächst genauso wie solche ohne Parameter. Man muss hier nun jedoch besonders genau darauf achten, ob die beabsichtigten Umformungen auch tatsächlich Äquivalenzumformungen sind. In Aufgabe 13) ist dies noch problemlos. Aber ab Aufgabe 14) muss man im Laufe der Rechnung durch Terme dividieren, von denen nicht immer gesichert ist, dass sie $\neq 0$ sind (bzw. bei Ungleichungen, dass sie > 0 sind). Man ist dann gezwungen verschiedene *Fälle* zu *unterscheiden*.

13) a)

$$\begin{aligned} && 3x+4a &= 5x+8a & \mid -3x-8a \\ &\iff & -4a &= 2x & \mid :2(\neq 0) \\ &\iff & -2a &= x \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{-2a\}$.

b)

$$\begin{aligned} && (x+a)(a-2) &< (x-a)(a+2) \\ &\iff & xa+a^2-2x-2a &< ax-a^2+2x-2a & \mid -ax+2x+a^2+2a \\ &\iff & 2a^2 &< 4x & \mid :4\,(>0!) \\ &\iff & \tfrac{a^2}{2} &< x \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{a^2}{2}\} = \left]\frac{a^2}{2};\infty\right[$.

14)

$$\begin{aligned} && (x-a)(a+2)+4a &= 2(x-a) \\ &\iff & ax-a^2+2x-2a+4a &= 2x-2a & \mid -2x+a^2-2a \\ &\iff & ax &= a^2-4a & (*) \end{aligned}$$

Die jetzt üblicherweise anstehende Division durch a (um x zu 'isolieren') ist aber nur möglich, wenn $a \neq 0$ ist. Wir müssen also die beiden Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$ unterscheiden:

1. Fall: $a = 0$.

Dann lautet die Gleichung $(*)$:

$$\begin{aligned} (*) && 0 \cdot x &= 0^2 - 4 \cdot 0 \\ \iff && 0 &= 0 \\ && \mathbb{L} &= \mathbb{Q}\,. \end{aligned}$$

2. Fall: $a \neq 0$.

In diesem Falle können wir bei $(*)$ mit einer Division durch a fortfahren:

$$\begin{aligned} (*) && ax &= a^2-4a & \mid :a\,(\neq 0!) \\ \iff && x &= \tfrac{a^2-4a}{a} \\ \iff && x &= a-4 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{a-4\}$

Damit ist in beiden Fällen die Lösungsmenge bestimmt worden. Zusammengefasst:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{falls } a = 0, \\ \{a-4\} & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$$

15)

$$\begin{aligned} && 6(4x+a) &= 8(3x+a) \\ &\iff & 24x+6a &= 24x+8a & \mid -24x-6a \\ &\iff & 0 &= 2a \end{aligned}$$

Die Ausgangsgleichung hat also für alle x denselben Wahrheitswert wie die letzte Gleichung $2a = 0$. Deren Wahrheitswert hängt nun vom Wert von a ab:

1. Fall: $a = 0$.

Dann ist die letzte Gleichung, also auch die erste wahr; das heißt $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.

2. Fall: $a \neq 0$.

Dann ist die letzte Gleichung falsch, also auch die erste: $\mathbb{L} = \emptyset$.

$$\text{Zusammengefasst: } \mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{falls } a = 0, \\ \emptyset & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$$

16) a) Die erste Umformung, die man hier durchführen möchte, ist die Division durch a. Dies ist aber nur dann eine zulässige Äquivalenzumformung, wenn $a \neq 0$ ist. Wir unterscheiden daher wieder die beiden Fälle:

1. Fall: $a = 0$.
Dann lautet die Gleichung einfach:

$$\begin{aligned} ax &= a \quad \mid (a = 0!) \\ \iff \quad 0 &= 0 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$

2. Fall: $a \neq 0$.
Dann ist die Division durch a eine Äquivalenzumformung und wir erhalten:

$$\begin{aligned} ax &= a \quad \mid : a\,(\neq 0!) \\ \iff \quad x &= 1 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{1\}$

Zusammengefasst folgt: $\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{falls } a = 0, \\ \{1\} & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$

b) Hier ist dieselbe Fallunterscheidung nötig.
1. Fall: $a = 0$. Dann lautet die Gleichung $0 = 1$ und ist falsch: $\mathbb{L} = \emptyset$.
2. Fall: $a \neq 0$. Dann gilt $ax = 1 \iff x = \frac{1}{a}$: $\mathbb{L} = \{\frac{1}{a}\}$.

17) a) Auch hier wäre die erste Umformung eine Division durch a. Da es sich hier aber um eine Ungleichung handelt, ist die Division durch a nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn $a > 0$ ist; wenn hingegen $a < 0$ ist, muss man das Relationszeichen ($<$, $>$) 'umdrehen'. Wir haben daher hier 3 Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $a > 0$.

$$\begin{aligned} ax &< a \quad \mid : a(> 0!) \\ \iff \quad x &< 1 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\} =]-\infty; 1[$.

2. Fall: $a = 0$. Dann lautet die Ungleichung $0 \cdot x < 0$, also $0 < 0$, und ist falsch: $\mathbb{L} = \emptyset$.

3. Fall: $a < 0$.

$$\begin{aligned} ax &< a \quad \mid : a(< 0!) \\ \iff \quad x &> 1 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\} =]1\,; \infty[$.

Zusammengefasst: $\mathbb{L} = \begin{cases}]-\infty; 1[& \text{falls } a > 0, \\ \emptyset & \text{falls } a = 0, \\ ]1; \infty[& \text{falls } a < 0. \end{cases}$

b) Hier müsste man zunächst durch a^2 dividieren. Da aber a^2 nie negativ sein kann, braucht man nur zwei Fälle zu unterscheiden: $a^2 = 0$ und $a^2 > 0$. Die weiteren Überlegungen verlaufen wie in a) und man erhält:

$$\mathbb{L} = \begin{cases}]-\infty; 1[& \text{falls } a^2 > 0, \text{ d.h. falls } a \neq 0, \\ \emptyset & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

c) Vorsicht: Man führe solange wie möglich die üblichen Äquivalenzumformungen durch! Man unterscheide verschiedene Fälle erst dann, wenn dies unbedingt nötig ist, d. h. wenn man multiplizieren oder dividieren will und sicherstellen muss, dass der Divisor > 0 ist.

$$\begin{aligned} ax &< x \quad \mid -x \\ \iff \quad ax - x &< 0 \\ \iff \quad (a-1)x &< 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Jetzt wäre der nächste Schritt die Division durch $a - 1$. Man muss also nun die 3 Fälle $a - 1 > 0$, $a - 1 = 0$ und $a - 1 < 0$ unterscheiden.

1. Fall: $a - 1 > 0$.

$$\begin{aligned} (*) \quad (a-1)x &< 0 \quad \mid :(a-1)\,(> 0!) \\ \iff \quad x &< 0 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} =]-\infty; 0[$

2. Fall: $a-1=0$. Dann lautet die Ungleichung $(*)$ $0 \cdot x < 0$ und ist falsch: $\mathbb{L} = \emptyset$.

3. Fall: $a-1<0$.

$$\begin{aligned} (*) \quad (a-1)x &< 0 \qquad | :(a-1)\ (<0!) \\ \iff \quad x &> 0 \\ \text{Also:} \quad \mathbb{L} &=]0;\infty[\end{aligned}$$

Da $a-1>0$ nichts anderes besagt als $a>1$, erhält man das Endergebnis:

$$\mathbb{L} = \begin{cases}]-\infty;0[& \text{falls } a>1, \\ \emptyset & \text{falls } a=1, \\ ]0;\infty[& \text{falls } a<1. \end{cases}$$

Übungen (7)

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Bruchgleichungen:

1) $\dfrac{x+6}{x} = \dfrac{x+4}{x+1}$

2) $\dfrac{5}{x-3} = \dfrac{2}{3-x}$

3) $\dfrac{x}{x-1} = 1 - \dfrac{1}{1-x}$

4) $\dfrac{2-x}{3-x} - 1 = \dfrac{4-x}{x-3}$

5) $\dfrac{5x+1}{30-10x} = \dfrac{x+3}{4x-12}$

6) $\dfrac{4x}{6x-24} = \dfrac{x}{12-3x}$

7) $\dfrac{x+2}{6x} + \dfrac{x^2-2}{3x^2} = \dfrac{1}{2}$

8) $\dfrac{9}{x+3} - \dfrac{8}{x-2} - \dfrac{1}{x+1} = 0$

Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen durch *Faktorisieren:*

9) a) $(x-3)\cdot(x+1) = 0$,
b) $(x-3)(x+1)(x-2) = 0$,
c) $(2x-4)(3x+1) = 0$,
d) $6x^2 + 3x = 0$,
e) $2x^2 - 50 = 0$,
f) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

10) a) $x^2 + 16 = 8x$,
b) $2x^2+6x+6 = x^2-2x-10$,
c) $(2x+2)(x+2) + 5 = 9$,
d) $3(x^2+3) = 36$,
e) $x^3 + 4x = 4x^2$,
f) $2x(x+3) - 45 = (3x-2)(x-2)$.

Lösen Sie die nachfolgenden Bruchgleichungen:

11) $\dfrac{8}{x-3} - \dfrac{10}{x+3} = \dfrac{40}{x^2-9}$

12) $\dfrac{3}{x+4} + \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{5x-4}{x^2-16}$

13) $\dfrac{3}{x+4} - \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{5x-4}{x^2-16}$

14) $\dfrac{6x+1}{2x+6} - \dfrac{5x-3}{3x-9} = \dfrac{4x^2+42}{3x^2-27}$

15) $\dfrac{3-x}{x+1} + \dfrac{2+x}{x-3} = \dfrac{4x-1}{x^2-2x-3}$

16) $\dfrac{3}{x^2+3x} - \dfrac{2}{x^2-2x} - \dfrac{1}{x^2+x-6} = 0$

Übungen (7) — Lösungen

1) Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0, -1\}$. Über diesem Bereich nimmt der Term $x(x+1)$ nie den Wert 0 an, also ist die Multiplikation damit eine Äquivalenzumformung. Dies ergibt dann:

$$\begin{aligned} && \frac{x+6}{x} = \frac{x+4}{x+1} \qquad & \mid \ \cdot x(x+1) \\ \iff && (x+6)(x+1) = x(x+4) \\ \iff && x^2+7x+6 = x^2+4x \qquad & \mid \ -x^2 \\ \iff && 7x+6 = 4x \qquad & \mid \ -4x-6 \\ \iff && 3x = -6 \qquad & \mid \ : \ 3 \\ \iff && x = -2 \\ && \mathbb{L} = \{-2\}\,, \qquad \text{denn } -2 \in \mathbb{D}\,. \end{aligned}$$

2) Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$. Über $\mathbb{D}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} && \frac{5}{x-3} = \frac{2}{3-x} \\ \iff && \frac{5}{x-3} = \frac{2}{-(x-3)} \qquad & \mid \ \cdot(x-3) \\ \iff && 5 = \frac{2}{-1} = -2 \\ && \mathbb{L} = \emptyset\,. \end{aligned}$$

3) Über dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} && \frac{x}{x-1} = 1 - \frac{1}{1-x} \\ \iff && \frac{x}{x-1} = 1 - \frac{1}{-(x-1)} \qquad & \mid \ \cdot(x-1) \\ \iff && x = (x-1) - (-1) \\ \iff && x = x \qquad & \mid -x \\ \iff && 0 = 0 \\ && \mathbb{L} = \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}\,. \end{aligned}$$

4) Über $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$ gilt:

$$\begin{aligned} && \frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{x-3} \\ \iff && \frac{2-x}{-(x-3)} - 1 = \frac{4-x}{x-3} \qquad & \mid \ \cdot(x-3) \\ \iff && -(2-x) - (x-3) = 4-x \\ \iff && 1 = 4-x \\ \iff && x = 3 \\ && \mathbb{L} = \emptyset\,, \qquad \text{denn } 3 \notin \mathbb{D}\ ! \end{aligned}$$

5) Über $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$ gilt:

$$\begin{array}{rll}
& \dfrac{5x+1}{30-10x} = \dfrac{x+3}{4x-12} & \\
\Longleftrightarrow & \dfrac{5x+1}{-10(x-3)} = \dfrac{x+3}{4(x-3)} & \mid \cdot(-20)(x-3) \\
\Longleftrightarrow & (5x+1)\cdot 2 = (x+3)\cdot(-5) & \\
\Longleftrightarrow & 10x+2 = -5x-15 & \\
\Longleftrightarrow & 15x = -17 & \\
\Longleftrightarrow & x = -\dfrac{17}{15} & \\
& L = \{-\dfrac{17}{15}\}\,, & \text{denn } -\dfrac{17}{15} \in \mathbb{D}\ !
\end{array}$$

6) Über $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$ gilt:

$$\begin{array}{rll}
& \dfrac{4x}{6x-24} = \dfrac{x}{12-3x} & \\
\Longleftrightarrow & \dfrac{4x}{6(x-4)} = \dfrac{x}{-3(x-4)} & \mid \ \cdot 6(x-4) \\
\Longleftrightarrow & 4x = -2x & \\
\Longleftrightarrow & x = 0 & \\
& \mathbb{L} = \{0\}\,, & \text{denn } 0 \in \mathbb{D}.
\end{array}$$

7) Über dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{array}{rll}
& \dfrac{x+2}{6x} + \dfrac{x^2-2}{3x^2} = \dfrac{1}{2} & \mid \cdot 6x^2 \\
\Longleftrightarrow & (x+2)\cdot x + (x^2-2)\cdot 2 = 3x^2 & \mid -3x^2 \\
\Longleftrightarrow & x^2+2x+2x^2-4-3x^2 = 0 & \mid +4 \\
\Longleftrightarrow & 2x = 4 & \mid :\ 2 \\
\Longleftrightarrow & x = 2 & \\
& \mathbb{L} = \{2\}\,,\ \ \text{denn } 2 \in \mathbb{D}. &
\end{array}$$

8) Über dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-3, 2, -1\}$ gilt:

$$\begin{array}{rll}
& \dfrac{9}{x+3} - \dfrac{8}{x-2} - \dfrac{1}{x+1} = 0 & \mid \cdot(x+3)(x-2)(x+1) \\
\Longleftrightarrow & 9(x-2)(x+1) - 8(x+3)(x+1) - (x+3)(x-2) = 0 & \\
\Longleftrightarrow & 9(x^2-x-2) - 8(x^2+4x+3) - (x^2+x-6) = 0 & \\
\Longleftrightarrow & -42x - 36 = 0 & \\
\Longleftrightarrow & x = -\frac{6}{7} & \\
& \mathbb{L} = \{-\frac{6}{7}\}\,,\ \text{denn } -\frac{6}{7} \in \mathbb{D}\,. &
\end{array}$$

9) a) $(x-3)(x+1)=0 \iff x-3=0 \vee x+1=0 \iff x=3 \vee x=-1$, also $\mathbb{L}=\{-1\,,\,3\}$.

b) $(x-3)(x+1)(x-2)=0 \iff x-3=0 \vee x+1=0 \vee x-2=0 \iff$ $\iff x=3 \vee x=-1 \vee x=2$, also $\mathbb{L}=\{-1\,,\,2\,,\,3\}$.

c) $(2x-4)(3x+1)=0 \iff 2x=4 \vee 3x=-1 \iff x=2 \vee x=-1/3$, also $\mathbb{L}=\{-1/3\,,\,2\}$.

d) Hier faktorisiert man zunächst durch Ausklammern und schließt dann wie oben weiter: $6x^2+3x=0 \iff 3x(2x+1)=0 \iff 3x=0 \vee 2x=-1 \iff$ $\iff x=0 \vee x=-1/2$, und damit ist $\mathbb{L}=\{-1/2\,,\,0\}$ die Lösungsmenge.

e) Hier wird der Term mit der dritten binomischen Formel faktorisiert: $2x^2-50=0 \iff x^2-25=0 \iff (x+5)(x-5)=0 \iff$ $\iff x+5=0 \vee x-5=0 \iff x=-5 \vee x=5$, also $\mathbb{L}=\{-5\,,\,+5\}$.

f) $x^2-6x+9=0 \iff (x-3)^2=0 \iff x-3=0 \iff x=3$, also $\mathbb{L}=\{3\}$.

10) a) $x^2+16=8x \iff x^2-8x+16=0 \iff (x-4)^2=0 \iff x-4=0 \iff$ $x=4$, also $\mathbb{L}=\{4\}$.

b) $2x^2+6x+6=x^2-2x-10 \iff x^2+8x+16=0 \iff (x+4)^2=0 \iff$ $x=-4$, also $\mathbb{L}=\{-4\}$.

c) $(2x+2)(x+2)+5=9 \iff 2x^2+6x+4-4=0 \iff x^2+3x=0 \iff$ $x(x+3)=0 \iff x=0 \vee x=-3$, also $\mathbb{L}=\{-3\,,\,0\}$.

d) $3(x^2+3)=36 \iff x^2+3=12 \iff x^2-9=0 \iff$ $\iff (x+3)(x-3)=0 \iff x=\pm 3$, also $\mathbb{L}=\{-3\,,\,+3\}$.

e) Auch diese (*kubische*) Gleichung ist durch Faktorisieren lösbar:

$$x^3+4x=4x^2 \iff x^3-4x^2+4x=0 \iff x(x^2-4x+4)=0$$
$$\iff x(x-2)^2=0 \iff x=0 \vee x=2\,,$$

also $\mathbb{L}=\{0\,,\,2\}$.

f) $2x(x+3)-45=(3x-2)(x-2) \iff 2x^2+6x-45=3x^2-8x+4 \iff$ $x^2-14x+49=0 \iff (x-7)^2=0 \iff x=7$, also $\mathbb{L}=\{7\}$.

Bei den nun folgenden Bruchgleichungen muss man zur Bestimmung des Definitionsbereiches die auftretenden Nenner faktorisieren. Dies erleichtert zugleich die Bestimmung des Hauptnenners.

11) Die Nenner $x-3$ und $x+3$ werden 0 für $x=+3$ bzw. für $x=-3$. Der quadratische (!) Nenner x^2-9 wird mit der dritten binomischen Formel zerlegt: $x^2-9=(x+3)(x-3)$. Dieser Term kann nur dann den Wert 0 haben, wenn $x-3=0$ oder $x+3=0$ ist. Damit ist der Definitionsbereich der gesamten Gleichung $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-3,+3\}$.

Zugleich erkennen wir $(x+3)(x-3)$ als Hauptnenner, mit dem wir dann die Bruchgleichung multiplizieren. Über $\mathbb{D}$ gelten dann die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
& \frac{8}{x-3}-\frac{10}{x+3}=\frac{40}{x^2-9} \\
\iff\ & \frac{8}{x-3}-\frac{10}{x+3}=\frac{40}{(x-3)(x+3)} \quad \mid\ \cdot(x-3)(x+3) \\
\iff\ & 8(x+3)-10(x-3)=40 \\
\iff\ & -2x+54=40 \quad \mid\ -54 \\
\iff\ & -2x=-14 \quad \mid\ :\ (-2) \\
\iff\ & x=7 \\
& \mathbb{L}=\{7\}\,,\quad \text{denn } 7\in\mathbb{D}\,.
\end{aligned}$$

12) Hier benutzt man entsprechend $x^2-16=(x-4)(x+4)$ und erhält $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-4,+4\}$. Über $\mathbb{D}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
&& \frac{3}{x+4}+\frac{2}{x-4} &= \frac{5x-4}{x^2-16} \\
\iff && \frac{3}{x+4}+\frac{2}{x-4} &= \frac{5x-4}{(x-4)(x+4)} && \mid \cdot(x-4)(x+4) \\
\iff && 3(x-4)+2(x+4) &= 5x-4 \\
\iff && 5x-4 &= 5x-4 && \mid -5x+4 \\
\iff && 0 &= 0 \\
&& \mathbb{L}=\mathbb{D} &= \mathbb{Q}\setminus\{-4,+4\}
\end{aligned}$$

13) Über $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-4,+4\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&& \frac{3}{x+4}-\frac{2}{x-4} &= \frac{5x-4}{x^2-16} \\
\iff && \frac{3}{x+4}-\frac{2}{x-4} &= \frac{5x-4}{(x-4)(x+4)} && \mid \cdot(x-4)(x+4) \\
\iff && 3(x-4)-2(x+4) &= 5x-4 \\
\iff && x-20 &= 5x-4 && \mid -x+4 \\
\iff && -16 &= 4x && \mid :\ 4 \\
\iff && -4 &= x \\
&& \mathbb{L} &= \emptyset\,, && \text{denn } -4\notin\mathbb{D}\ !
\end{aligned}$$

14) Wir stellen die drei Nenner als Produkte dar (durch Ausklammern bzw. mittels binomischer Formeln) und erhalten: $2(x+3)$, $3(x-3)$ und $3(x+3)(x-3)$. Daraus entnehmen wir den Definitionsbereich $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-3,3\}$, sowie den Hauptnenner $6(x-3)(x+3)$. Über $\mathbb{D}$ gelten dann die nachfolgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
&& \frac{6x+1}{2x+6}-\frac{5x-3}{3x-9} &= \frac{4x^2+42}{3x^2-27} \\
\iff && \frac{6x+1}{2(x+3)}-\frac{5x-3}{3(x-3)} &= \frac{4x^2+42}{3(x-3)(x+3)} && \mid \cdot 6(x-3)(x+3) \\
\iff && (6x+1)\cdot 3(x-3)-(5x-3)\cdot 2(x+3) &= (4x^2+42)\cdot 2 \\
\iff && 18x^2-51x-9-(10x^2+24x-18) &= 8x^2+84 \\
\iff && -75x &= 75 \\
\iff && x &= -1 \\
&& \mathbb{L} &= \{-1\}\,, && \text{denn } -1\in\mathbb{D}.
\end{aligned}$$

15) Hier muss man zur Bestimmung des Definitionsbereiches die quadratische Gleichung $x^2-2x-3=0$ lösen. Da man weder ausklammern noch eine binomische Formel anwenden kann, fehlen Ihnen (noch) die nötigen Hilfsmittel. Wenn man jedoch den Verdacht hat, dass dabei die schon durch die anderen Nenner ($x+1$, $x-3$) bestimmten Ausnahmen -1, $+3$ eine Rolle spielen könnten, so berechne man einmal das Produkt $(x+1)(x-3)$ und erhält gerade $(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$. Damit

folgt $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 3\}$. Zugleich erleichtert die Zerlegung $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ auch die weiteren Äquivalenzumformungen über $\mathbb{D}$:

$$
\begin{array}{rrcll}
 & \dfrac{3-x}{x+1} + \dfrac{2+x}{x-3} & = & \dfrac{4x-1}{x^2-2x-3} & \\
\Longleftrightarrow & \dfrac{3-x}{x+1} + \dfrac{2+x}{x-3} & = & \dfrac{4x-1}{(x+1)(x-3)} & \mid \cdot (x+1)(x-3) \\
\Longleftrightarrow & (3-x)(x-3) + (2+x)(x+1) & = & 4x-1 & \\
\Longleftrightarrow & -x^2 + 6x - 9 \ + \ x^2 + 3x + 2 & = & 4x - 1 & \\
\Longleftrightarrow & 9x - 7 & = & 4x - 1 & \\
\Longleftrightarrow & 5x & = & 6 & \\
\Longleftrightarrow & x & = & \frac{6}{5} & \\
 & \mathbb{L} & = & \{ \frac{6}{5} \}\,, & \text{denn } \frac{6}{5} \in \mathbb{D}.
\end{array}
$$

16) Wieder zerlegen wir zuerst die Nenner in Faktoren. Die ersten beiden durch Ausklammern: $x(x+3)$, $x(x-2)$. Wir vermuten, dass der dritte Nenner aus den beiden Linearfaktoren $x+3$ und $x-2$ zusammengesetzt ist; in der Tat gilt $(x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$. Damit ist der Definitionsbereich dieser Gleichung $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0, -3, 2\}$ und über $\mathbb{D}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \dfrac{3}{x^2+3x} - \dfrac{2}{x^2-2x} - \dfrac{1}{x^2+x-6} & = & 0 \\
\Longleftrightarrow & \dfrac{3}{x(x+3)} - \dfrac{2}{x(x-2)} - \dfrac{1}{(x+3)(x-2)} & = & 0 \mid \cdot x(x+3)(x-2) \\
\Longleftrightarrow & 3(x-2) - 2(x+3) - x & = & 0 \\
\Longleftrightarrow & 3x - 6 - 2x - 6 - x & = & 0 \\
\Longleftrightarrow & -12 & = & 0 \\
 & \mathbb{L} & = & \emptyset\,.
\end{array}
$$

Übungen (Geometrie)

1) a) Zeigen Sie mit einem geeigneten Kongruenzsatz:
Stimmen in einem Dreieck an zwei Eckpunkten die Winkel überein, so ist das Dreieck spiegelsymmetrisch zur Winkelhalbierenden durch den dritten Eckpunkt.
b) Folgern Sie daraus, dass das Dreieck gleichschenklig ist und diese Winkelhalbierende zugleich Höhe, Seitenhalbierende und Mittelsenkrechte ist.
Mit den üblichen Dreiecksbezeichnungen gilt also: $\alpha = \beta \iff a = b$.

2) Ein *gleichseitiges* Dreieck ist ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten. Zeigen Sie:
a) In einem gleichseitigen Dreieck betragen alle Winkel 60^0.
b) Ein Dreieck, in dem sämtliche Winkel 60^0 betragen, ist gleichseitig.

3) Zeigen Sie:
a) Ein Punkt P hat genau dann von zwei verschiedenen Punkten A und B *denselben* Abstand, wenn er auf der Mittelsenkrechten zu A und B liegt.
b) Es sei ABC ein Dreieck und M der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten. Zeigen Sie, dass M von allen drei Eckpunkten denselben Abstand hat und der gemeinsame Schnittpunkt aller drei Mittelsenkrechten ist.
c) M ist der Mittelpunkt des *Umkreises* des Dreiecks.

4) Zeigen Sie mit Hilfe der Kongruenzsätze:
a) Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen gegenseitig, so liegt ein Parallelogramm vor.
b) Schneiden sich die Diagonalen eines Vierecks in ihrem jeweiligen Mittelpunkt im rechten Winkel, so ist das Viereck eine Raute.

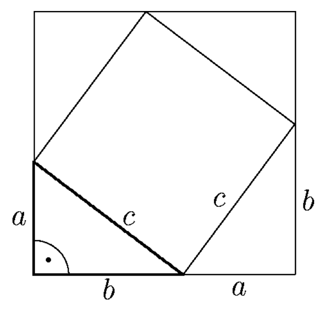
5) Welche Bedingungen müssen die Diagonalen eines Vierecks erfüllen, damit ein Drachenviereck vorliegt? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe geeigneter Kongruenzsätze.

6) Zeigen Sie: Ein Drachenviereck mit Diagonalen der Länge a, b hat die Fläche $\dfrac{a \cdot b}{2}$.

7) In welchem Verhältnis teilen sich die Diagonalen eines Trapezes, dessen Grundlinie doppelt so lang ist wie die parallele Deckenlinie? Begründen Sie Ihre Antwort mit dem Strahlensatz.

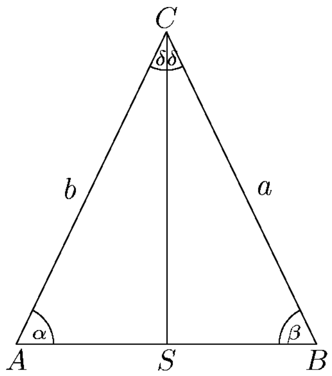
8) Ein *regelmäßiges n-Eck* wird gebildet durch n Punkte auf einem Kreis, bei denen benachbarte Punkte stets denselben Abstand haben. Den Kreis, auf dem die Ecken liegen, nennt man den *Umkreis.* Verbindet man benachbarte Eckpunkte mit dem Umkreismittelpunkt, so erhält man n Dreiecke.
a) Zeigen Sie, dass diese Dreiecke kongruent sind und bestimmen Sie ihre Winkel.
b) Zeigen Sie: Die Kantenlänge eines regelmäßigen 6-Ecks ist gleich dem Umkreisradius.
c) Begründen Sie damit eine Konstruktionsvorschrift für das regelmäßige Sechseck.

9) Beweisen Sie mit Hilfe nebenstehender Figur durch geeignete Flächenberechnung den Satz des Pythagoras.



Übungen (Geometrie) — Lösungen

1) Die nebenstehende Skizze veranschauliche das gegebene Dreieck. Wir setzen voraus, dass die Winkel α und β übereinstimmen: $\alpha = \beta$. (Dies ist in der Zeichnung bewusst nicht genau erfüllt, damit man nicht durch die Zeichnung zu voreiligen Schlüssen kommt, sondern immer gezwungen ist, eventuelle Behauptungen genau zu begründen.) Die eingezeichnete Winkelhalbierende durch C zerlegt das Dreieck in zwei Teildreiecke. Beide Teildreiecke haben identische Winkel δ sowie nach Voraussetzung einen weiteren übereinstimmenden Winkel $\alpha = \beta$. Nach dem Winkelsummensatz müssen dann auch die jeweiligen dritten Winkel beider Dreiecke an der Ecke S übereinstimmen[1)].



Daraus folgt nun, dass die beiden Teildreiecke in einer Seite (der Winkelhalbierenden) und den beiden angrenzenden Winkeln übereinstimmen. Nach dem Kongruenzsatz **(WSW)** sind die beiden Teildreiecke *kongruent,* und zwar werden sie durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden deckungsgleich. Damit ist das Gesamtdreieck symmetrisch zur Winkelhalbierenden.
b) Wenn die Teildreiecke deckungsgleich sind, müssen insbesondere die Seitenlängen a und b (Bezeichnungen laut Skizze) übereinstimmen: Das Dreieck ist gleichschenklig. Dass dann die Winkelhalbierende auch Seitenhalbierende, Höhe und Mittelsenkrechte ist, wurde bereits im Unterricht gefolgert.

2) a) In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Seitenpaare gleich lang, also die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich groß. Damit sind alle drei Winkel gleich groß, wegen des Winkelsummensatzes also jeweils 60^0.
b) Umgekehrt schließt man genauso, da zwei gleich großen Winkeln immer gleich lange Seiten gegenüberliegen.

3) a) Eine ‘genau dann, wenn’-Aussage setzt sich immer aus zwei Teilbehauptungen zusammen. In unserem Falle:
1. Wenn der Punkt P auf der Mittelsenkrechten zu A und B liegt, dann hat er von A und B den gleichen Abstand.
2. Wenn P von A und B denselben Abstand hat, dann liegt P auf der Mittelsenkrechten.
1. Wir setzen voraus, dass P auf der Mittelsenkrechten zu A und B liegt. Es bezeichne M den Mittelpunkt zwischen A und B (Skizze anfertigen!). Dann sind die beiden Dreiecke AMP und BMP kongruent (Kongruenzsatz (SWS), denn sie haben die Seite $\overline{MP}$ gemeinsam, die Seitenlängen $|AM|$ und $|BM|$ sind gleich (da M der Mittelpunkt ist), und der eingeschlossene Winkel ist auch derselbe, nämlich 90^0). Wenn die beiden Dreiecke kongruent sind, sind insbesondere die Seitenlängen $|PA|$ und $|PB|$ gleich, das heißt: P hat von A und B denselben Abstand.
2. Wir betrachten das Dreieck ABP. Dieses ist nach Voraussetzung gleichschenklig. Also stimmen in ihm die Höhe durch P und Mittelsenkrechte der gegenüberliegenden Seite überein (siehe Satz über gleichschenklige Dreiecke, Skript S. 24). Damit

[1)] Da beide zusammen einen gestreckten Winkel (180^0) ergeben, müssen beide 90^0 betragen und die Winkelhalbierende ist zugleich Höhe.

liegt P auf der Mittelsenkrechten.
b) Da M auf einer der Mittelsenkrechten liegt, etwa der zu A und B, hat M von beiden Punkten denselben Abstand (siehe a)). Dasselbe gilt etwa auch für B und C. Also hat M von allen *drei* Ecken denselben Abstand. Wenn aber der Abstand von A und C übereinstimmt, muss M auch auf der dritten Mittelsenkrechten zu A und C liegen: Alle drei Mittelsenkrechten verlaufen durch den Punkt M, schneiden sich also in einem einzigen Punkt.
c) Der Kreis ist die Ortslinie aller Punkte, die von einem festen Punkt (genannt *Mittelpunkt*) einen festen Abstand (genannt *Radius*) haben. Da alle drei Eckpunkte des Dreiecks von M denselben Abstand haben, liegen sie auf einem Kreis mit Mittelpunkt M. Diesen Kreis durch die drei Eckpunkte nennt man den *Umkreis* des Dreiecks.

8) a) In den Teildreiecken sind die vom Mittelpunkt ausgehenden Seiten alle gleich lang, nämlich gleich dem Kreisradius. Die Länge der dritten Seiten in diesen Dreiecken ist der Abstand je zweier benachbarter Punkte auf dem Kreis und daher gemäß der Voraussetzung auch in allen Dreiecken dieselbe. Damit sind die Teildreiecke gemäß dem Kongruenzsatz (SSS) kongruent. Insbesondere haben damit die Teildreiecke am Mittelpunkt alle denselben Winkel $\varphi = \frac{360^0}{n}$. Außerdem sind die Teildreiecke gleichschenklig, da die vom Mittelpunkt ausgehenden Seiten dieselbe Länge haben (nämlich den Kreisradius). Daher sind die an der Peripherie liegenden Winkel ebenfalls alle gleich groß sind, und zwar nach dem Winkelsummensatz

$$\frac{180^0 - \varphi}{2} = 90^0 - \frac{360^0}{2n} = 90^0 - \frac{180^0}{n} .$$

b) Bei $n = 6$ ergibt sich $\varphi = 60^0$ und damit sind die beiden verbleibenden (gleich großen) Winkel ebenfalls 60^0 und das Dreieck gleichseitig (siehe Aufgabe 2b)). Damit ist auch die dritte Seitenlängen gleich dem Radius.
c) Nach b) ist die Seitenlänge des regelmäßigen 6-Ecks gleich dem Radius seines Umkreises. Man zeichnet daher einen Kreis, setzt den Zirkel auf einen beliebigen Peripheriepunkt und schlägt um diesen einen Kreis mit unverändertem Radius. Von den entstehenden zwei Schnittpunkten mit dem Ausgangskreis ausgehend wiederholt man dies und erhält so die Eckpunkte des regelmäßigen 6-Ecks auf dem Kreis.

9) Die skizzierte Figur entsteht, indem man die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks verlängert und jeweils dasselbe Dreieck um 90^0 gedreht ansetzt. Dies bedeutet, dass das innen liegende Viereck rechte Winkel hat und dort folglich ein Quadrat der Kantenlänge c entsteht. Zusammen mit den 4 angrenzenden rechtwinkligen Dreiecken erhält man eine Gesamtfläche $A = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab$.
Andererseits kann man die Fläche auch über das große Quadrat ermitteln; dieses hat die Kantenlänge $a+b$, so dass die Gesamtfläche auch als $A = (a+b)^2$ berechnet werden kann. Damit folgt:

$$c^2 + 2ab = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \,, \text{ also } \quad c^2 = a^2 + b^2 \,.$$

Übungen (8)

1) a) Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $y = ax + b$ mit rationalen Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ ist __________ mit dem _______ a und dem _________________ b.
b) Geraden mit dem Anstieg 0 sind ____________________.
c) Beschreiben Sie in Worten die Lösungsmengen der Gleichungen $y = 3$ und $x = 5$.
d) Welchen Anstieg haben die Geraden in c)?

2) Zeichnen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in ein Koordinatenkreuz.
a) $y = x - 2$ b) $y = -3x + 5$
c) $y = \frac{x}{2} - 1$ d) $y = 3 + \frac{x}{5}$
e) $3x - 2y = 4$ f) $3x - 2y = 4(3x - y + 1)$

3) Beschreiben Sie in Worten die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen — so genau, dass eine Zeichnung unmittelbar möglich ist.
a) $(4x - 3)(3y + 1) = (6y - 1)(2x + 1)$ b) $(9x - 4)(2y + 5) = (3y + 1)(6x - 2)$
c) $(2x + 1)(6y - 4) = (3y - 2)(4x - 3)$ d) $(2x + 1)(6y - 4) = (3y - 2)(4x + 2)$

4) a) Markieren Sie in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $P = (3, 2)$ und $Q = (-1, -1)$ und zeichnen Sie die Gerade durch diese Punkte.
b) Entnehmen Sie Ihrer Zeichnung möglichst genau den Anstieg und den y-Achsenabschnitt dieser Geraden.
c) *Berechnen* Sie nun diese Werte und vergleichen Sie sie mit den in b) gefundenen.
d) Beschreiben Sie die Gerade durch eine Gleichung, d. h. geben Sie eine Gleichung an, deren Lösungsmenge diese Gerade ist.
e) Welche der nachfolgenden Punkte liegen auf der Geraden?

$$Q_1 = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}), \quad Q_2 = (4, \frac{11}{4}), \quad Q_3 = (\frac{1}{9}, -\frac{1}{5})$$

f) Ergänzen Sie in den folgenden Punkten

$$P_1 = (2, \quad), \quad P_2 = (-3, \quad), \quad P_3 = (\quad, 1)$$

die fehlende Koordinate so, dass der jeweilige Punkt auf der gegebenen Geraden liegt. Markieren Sie die Punkte dann in ihrem Koordinatensystem.

5) Bestimmen Sie zu den gegebenen Punkten P und Q jeweils den Anstieg und den y-Achsenabschnitt der Geraden durch diese Punkte:
a) $P = (2, 3)$, $Q = (1, 1)$, b) $P = (3, 8)$, $Q = (-3, 2)$,
c) $P = (6, 4)$, $Q = (1, 3)$, d) $P = (2, 3)$, $Q = (2, -1)$.

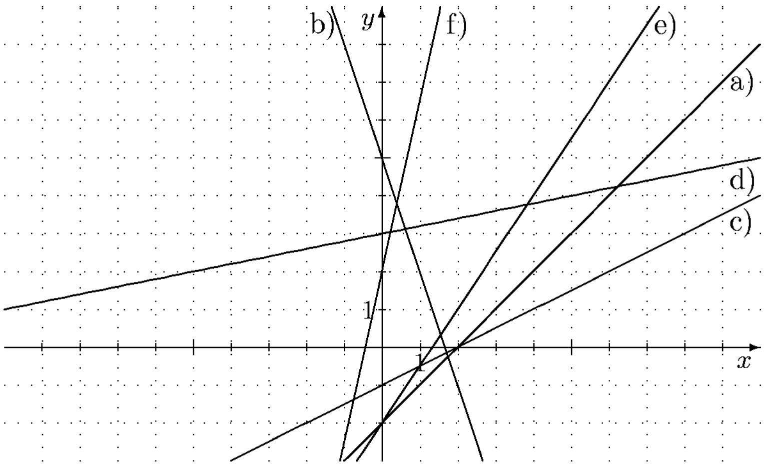
6) a) Eine Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ heißt linear, wenn ...
b) Der Graph einer Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = ax + b$ ist ...
c) Welche Teilmengen von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kommen als Graph einer linearen Funktion vor?

7) Eine Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ist linear und es gilt $f(-1) = 3$ sowie $f(3) = -3$.
a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
b) Bestimmen Sie einen Funktionsterm für f.

Übungen (8) — Lösungen

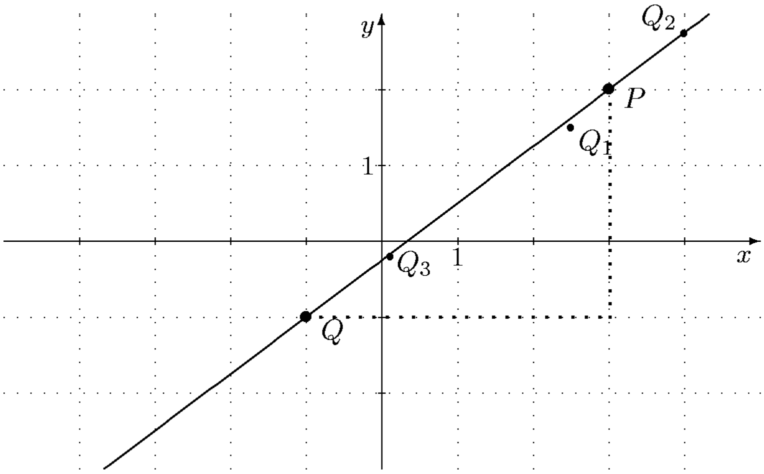
1) a) Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $y = ax + b$ mit rationalen Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ ist die Gerade mit dem Anstieg a und dem y-Achsenabschnitt b.
b) Geraden mit dem Anstieg 0 sind Parallelen zur x-Achse.
c)/d) Die Lösungsmenge der Gleichung $y = 3$ in der Koordinatenebene ist die Parallele zur x(!)-Achse, die bei 3 die y-Achse schneidet. Sie hat den Anstieg 0.
Die Lösungsmenge der Gleichung $x = 5$ ist die Parallele zur y(!)-Achse, die bei 5 die x-Achse schneidet. Für sie ist der Anstieg nicht definiert.

2)



3) a) Die Lösungsmenge ist die Gerade mit dem Anstieg $\frac{2}{5}$ und dem y-Achsenabschnitt $-\frac{2}{15}$.
b) Die Lösungsmenge ist die Gerade mit dem Anstieg $\frac{39}{2}$ und dem y-Achsenabschnitt -9.
c) Die Lösungsmenge ist die Parallele zur x-Achse mit dem y-Achsenabschnitt $\frac{2}{3}$.
d) Die Lösungsmenge ist die gesamte Koordinatenebene $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (da die gegebene Gleichung äquivalent ist zur Gleichung '$0 = 0$').

4) a) Die Skizze hat etwa folgende Gestalt.



Bei Zeichnung auf Millimeterpapier (bzw. bei Auswahl des 'richtigen' Steigungsdreiecks, siehe Skizze) kann man daraus den Anstieg $a = \frac{3}{4}$ entnehmen. Als y-Achsenabschnitt liest man etwa $-0,25$ ab. Eine (hinreichend genaue) Zeichnung

zeigt: Nur Q_2 liegt auf der Geraden. Völlige Sicherheit bietet die Zeichnung aber nicht. Dazu braucht man eine Gleichung für die Gerade.
c) Der Geradenanstieg ist $a = \frac{2-(-1)}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$. Damit ist die Gerade Lösungsmenge der Gleichung $y = ax + b = \frac{3}{4}x + b$ und es muss noch b bestimmt werden. Da der Punkt $P = (3 \mid 2)$ auf der Geraden liegt, erfüllen seine Koordinaten diese Gleichung: $2 = a \cdot 3 + b = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$, also $b = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$. (Man kann statt P auch den Punkt Q benutzen, um b zu berechnen. Führt man beide Rechnungen durch, so hat man eine gute Probe!)
Insgesamt erhalten wir als Gleichung für die Gerade: $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. Eine andere (äquivalente) Gleichung wäre etwa $3x - 4y = 1$.
d) Damit läßt sich nun leicht (und exakt) entscheiden, dass Q_2 auf der Geraden liegt (seine Koordinaten erfüllen die Gleichung: $\frac{11}{4} = \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{1}{4}$). während Q_1 und Q_3 nicht darauf liegen ($\frac{3}{2} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{4}$).
e) Man bestimmt für P_1 und P_2 die fehlende y-Koordinate gerade so, dass die Geradengleichung erfüllt ist: Also $y_1 = \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ für P_1 und $y_2 = \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot (-3) - \frac{1}{4} = -\frac{5}{2}$ für P_2.
Bei P_3 ist die y-Koordinate $y_3 = 1$ bekannt und die x-Koordinate x_3 gesucht. Da P_3 auf der Geraden liegen soll, muss x_3 so gewählt werden, dass die Geradengleichung erfüllt ist: $y_3 = 1 = \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}$. Diese Gleichung löst man wie üblich und erhält als (einzige) Lösung $x_3 = \frac{5}{3}$. Damit sind die Punkte $P_1 = (2, \frac{5}{4})$, $P_2 = (-3, -\frac{5}{2})$ und $P_3 = (\frac{5}{3} \mid 1)$.

5) a) Anstieg $a = \dfrac{1-3}{1-2} = 2$, y-Achsenabschnitt $b = y_1 - ax_1 = 3 - 2 \cdot 2 = -1$.
b) $a = \dfrac{2-8}{-3-3} = 1$, $b = 8 - 3 = 5$. c) $a = \dfrac{3-4}{1-6} = \dfrac{1}{5}$, $b = 4 - \dfrac{1}{5} \cdot 6 = \dfrac{14}{5}$.
d) Der Anstieg a ist nicht definiert; die Gerade ist eine Parallele zur y-Achse. (Dies merkt man spätestens daran, dass in der Formel für a bei Einsetzen der gegebenen Punktkoordinaten im Nenner eine 0 auftaucht!)

6) a) Eine Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ heißt linear, wenn *sie durch einen Funktionsterm der Form $f(x) = ax + b$ beschrieben werden kann.*
b) Der Graph einer Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = ax + b$ ist *eine Gerade in der Koordinatenebene mit dem Anstieg a und dem y-Achsenabschnitt b.*
c) Alle Geraden in der Koordinatenebene, die *nicht parallel zur y-Achse* sind, kommen als Graph einer linearen Funktion vor.

7) a) Wegen $f(-1) = 3$ gehört der Punkt $P = (-1, 3)$ zum Graphen von f, und wegen $f(3) = -3$ der Punkt $Q = (3, -3)$ ebenfalls. Da f eine lineare Funktion ist, ist ihr Graph eine Gerade. Man verbindet also die Punkte P und Q durch eine Gerade und erhält so den Graphen von f.
b) Da man zwei Punkte des Graphen kennt und dieser eine Gerade ist, kann man deren Anstieg und y-Achsenabschnitt berechnen:

$$a = \frac{3-(-3)}{-1-3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \quad \text{und} \quad b = 3 - a(-1) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

Ein Term für die Funktion f ist also gegeben durch $f(x) = ax + b = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.

Übungen (9)

1) a) Welche der nachfolgenden Aussageformen sind Relationen? Welche sind Funktionsgleichungen? Welche sind äquivalent zu Funktionsgleichungen? Welche besitzen einen Funktionsgraphen als Lösungsmenge? Bestimmen Sie ggf. einen Funktionsterm dazu.

1) $x^2 - y = 2$,	2) $xyz = 1$,
3) $x^2 = y^2$,	4) $y = (x^3 - 1)(x + 1)$,
5) $y(x - 2) = 5$,	6) $x^2 \leq y$,
7) $y(x - 2) = 0$.	

b) Untersuchen Sie dieselben Fragen für die *Umkehrrelationen,* bei denen x und y vertauscht sind.

2) a) Vervollständigen Sie: Eine Funktion ist ...
b) Jeder Term $f(x)$ mit höchstens einer Variablen x bestimmt eine Funktion f. Wie lautet die Funktionsvorschrift?
c) Vervollständigen Sie: Der Graph einer Funktion f ist die Menge

$$G(f) =$$

Jeder Graph einer Funktion f ist Lösungsmenge einer passenden Gleichung. Welcher?
d) Stellt eine Kreislinie einen Funktionsgraphen dar?

3) Gegeben sind drei Punkte $A = (2, 3)$, $B = (-2, -1)$ und $C = (-3, 4)$.
a) Zeigen Sie, dass diese ein Dreieck bilden, d. h. dass sie nicht zusammen auf einer Geraden liegen.
b) Bestimmen Sie Gleichungen für die drei Dreiecksseiten.
c) Sind die Dreiecksseiten Funktionsgraphen? Wenn ja, von welchen Funktionen?
d) Ist das Dreieck rechtwinklig?

4) Der Graph der Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = 7x - 4$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = x + 1$ in genau einem Punkt.
a) Woran kann man dies unmittelbar erkennen?
b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt.

5) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $\begin{bmatrix} 4x - 2y & = & 4 \\ -x - y & = & 4 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2x - y & = & 5 \\ -4x + 2y & = & 2 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 4x - 7y & = & 3 \\ 4x + y & = & -3 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} -4x - 2y & = & -2 \\ 6x + 3y & = & 3 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 4x + 7y - 1 & = & 2x + y - 1 \\ 4x - y + 1 & = & 2x - y - 1 \end{bmatrix}$,

6) Was können Sie allgemein über die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems aussagen? Benutzen Sie geometrische Überlegungen.

Übungen (9) — Lösungen

1) 2) stellt keine Relation (in dem von uns definierten Sinne) dar, da *drei* Variable darin vorkommen. Alle anderen (Un)Gleichungen stellen Relationen dar.
Nur die Gleichung 4) $y = (x^3 - 1)(x + 1)$ stellt eine Funktionsgleichung (im engen Sinne) dar. Äquivalent zu Funktionsgleichungen sind außerdem die Gleichungen 1) und 5):
1) $x^2 - y = 2 \iff y = x^2 - 2$.
5) $y(x - 2) = 5 \iff y = \frac{5}{x-2}$. (Die Division durch $x - 2$ ist eine Äquivalenzumformung, da aus $y(x - 2) = 5$ zwangsläufig folgt: $x - 2 \neq 0$.)
Diese drei Gleichungen 1), 4) und 5) haben als Lösungsmenge jeweils einen Funktionsgraphen; als Funktionsterme kann man wählen: 1) $f(x) = x^2 - 2$, 4) $f(x) = (x^3 - 1)(x + 1)$ und 5) $f(x) = \frac{5}{x-2}$.
Die Gleichungen 3) und 7) sind nicht äquivalent zu Funktionsgleichungen, denn sie haben als Lösungsmenge keinen Funktionsgraphen. Begründung: Gleichung 3) $x^2 = y^2$ hat zwei Lösungen $(-1, 1)$ und $(-1, -1)$ mit derselben x-Koordinate, aber unterschiedlicher y-Koordinate. Dasselbe gilt für die beiden Lösungen $(2, 5)$ und $(2, 4)$ der Gleichung 7) $y(x - 2) = 0$.
Aus demselben Grund haben Ungleichungen (wie z. B. 6)) als Lösungsmenge keinen Funktionsgraphen.
b) Die Umkehrrelation erhält man durch Vertauschung von x und y, also:

1′) $y^2 - x = 2$,	3′) $y^2 = x^2$,
4′) $x = (y^3 - 1)(y + 1)$,	5′) $x(y - 2) = 5$,
6′) $y^2 \leq x$,	7′) $x(y - 2) = 0$.

Von diesen ist keine eine Funktionsgleichung (im engen Sinne); äquivalent zu einer Funktionsgleichung ist lediglich
5′): $x(y - 2) = 5 \iff y - 2 = \dfrac{5}{x} \iff y = 2 + \dfrac{5}{x}$.
Die Lösungsmenge ist also der Funktionsgraph der Funktion f gegeben durch den Funktionsterm $f(x) = 2 + \dfrac{5}{x}$.
Alle anderen Umkehrrelationen sind nicht äquivalent zu Funktionsgleichungen; man kann jeweils Lösungspaare angeben, die dieselbe x-, aber verschiedene y-Koordinaten besitzen: $(2, 2)$, $(2, -2)$ für 1′) und 3′), $(0, 1)$, $(0, -1)$ für 4′), $(4, 1)$, $(4, 2)$ für 6′) und $(0, 1)$, $(0, 5)$ für 7′).

2) a) Eine Funktion ist *eine Zuordnung, die jeder Zahl (aus einer Menge D) eine eindeutig bestimmte Zahl zuordnet.*
b) Ein Term $f(x)$ mit höchstens einer Variablen x bestimmt eine Funktion f durch folgende Zuordnungsvorschrift: Zu einer Zahl r bestimmt man den Funktionswert, indem man die gegebene Zahl r *in den Term einsetzt und den Term ausrechnet.* Das dabei berechnete Ergebnis ist dann der zugeordnete (Funktions-) *Wert* $f(r)$. Definitionsbereich von f ist dabei die Menge all der Zahlen r, die sinnvoll in den Term $f(x)$ eingesetzt werden können, also genau der Definitionsbereich des Terms.
c) Der Graph einer Funktion f ist die Menge

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid y = f(x)\}.$$

Dies ist offenbar die Lösungsmenge der *Funktionsgleichung* $y = f(x)$.
d) Eine Kreislinie kann keinen Funktionsgraphen darstellen, weil Parallelen zur y-Achse die Kreislinie in der Regel in keinem oder in zwei Punkten schneiden. Funktionsgraphen dürfen von Parallelen zur y-Achse aber nur in einem Punkt geschnitten werden.

3) a) Wir bestimmen eine Gleichung für die Gerade g durch A und B, indem wir wie üblich den Anstieg a und den y-Achsenabschnitt b berechnen:

$$a = \frac{3-(-1)}{2-(-2)} = 1 \quad \text{und} \quad y = 1 \cdot x + b \implies 3 = 2 + b \iff b = 1\,.$$

Die Gerade durch A, B hat als Gleichung $y = x+1$. Da der Punkt C diese Gleichung nicht erfüllt, liegt er nicht auf der Geraden durch A, B.
b) Für die anderen Dreiecksseiten erhält man:

$$\begin{aligned} g(A,C): \quad a &= \frac{4-3}{-3-2} = -\frac{1}{5}\,,\ b = 3 - (-\frac{1}{5} \cdot 2) = \frac{17}{5}\,, \\ g(B,C): \quad a &= \frac{4-(-1)}{-3-(-2)} = -5\,,\ b = 4 - (-5 \cdot (-3)) = -11\,. \end{aligned}$$

Damit sind die gesuchten Gleichungen

$$g(A,B):\ y = x+1\,, \quad g(A,C):\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}\,, \quad g(B,C):\ y = -5x - 11\,.$$

c) Da keine der Dreiecksseiten parallel zur y-Achse verläuft, sind sie alle Funktionsgraphen. Funktionsterme dafür sind $f(x) = x + 1$, $g(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$ und $h(x) = -5x - 11$.
d) Das Dreieck ist rechtwinklig, wenn zwei der drei Seiten senkrecht zueinander verlaufen, d. h. wenn zwei Seitenanstiege negative Kehrwerte voneinander sind. Die Anstiege der Seiten sind 1, $-\dfrac{1}{5}$ und -5; keiner davon ist das Negative des Kehrwertes eines anderen: Das Dreieck ist nicht rechtwinklig.

4) a) Der Graph von f ist eine Gerade mit dem Anstieg 7 (und dem y-Achsenabschnitt -4), während die andere Gerade den Anstieg 1 hat. Da die Anstiege unterschiedlich sind, sind die Geraden nicht parallel, haben in der Ebene also einen Schnittpunkt.
b) Für den gesuchten Schnittpunkt (x, y) gilt $y = f(x) = 7x-4$ und auch $y = x+1$. Also

$$7x - 4 = x + 1 \iff 6x = 5 \iff x = \frac{5}{6}\,.$$

Damit ist die x-Koordinate des Schnittpunktes bekannt und die y-Koordinate ergibt sich dann durch $y = x + 1 = \frac{5}{6} + 1 = \frac{11}{6}$. Der gesuchte Schnittpunkt ist also $S = (\frac{5}{6}, \frac{11}{6})$.

5) a) Wir lösen eine Gleichung nach y auf, etwa die zweite $y = -x - 4$, und setzen dann in die erste ein:

$$4x - 2(-x-4) = 4 \iff 6x = -4 \iff x = -\frac{2}{3}\,.$$

Damit ergibt sich $y = -(-\frac{2}{3}) - 4 = -\frac{10}{3}$; der einzige Lösungspunkt ist $(-\frac{2}{3}, -\frac{10}{3})$.

b) $4x + y = -3 \iff y = -4x - 3$, also

$$4x - 7(-4x-3) = 3 \iff 32x = -18 \iff x = -\frac{9}{16}\,.$$

Dies ergibt $y = 4 \cdot \frac{9}{16} - 3 = -\frac{3}{4}$; der einzige Lösungspunkt ist $(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{4})$.
c) Zunächst formt man beide Gleichungen in die Standardform $Ax + By = C$ um:

$$\begin{bmatrix} 4x+7y-1 & = & 2x+y-1 \\ 4x-y+1 & = & 2x-y-1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2x+6y & = & 0 \\ 2x & = & -2 \end{bmatrix}$$

Hier macht es keinen Sinn, nach y aufzulösen, da die zweite Gleichung y gar nicht enthält. Vielmehr lösen wir die zweite Gleichung nach x auf: $x = -1$, und setzen dies in die erste ein: $-2 + 6y = 0 \iff y = \frac{1}{3}$. Die einzige Lösung ist $(-1, \frac{1}{3})$.
d) Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung: $2x - y = 5 \iff y = 2x - 5$ in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt den Widerspruch $-4x + 2(2x-5) = 2 \iff -10 = 2$.
e) Auflösen nach y ergibt $y = -2x + 1$ und einsetzen dann

$$6x + 3(-2x+1) = 3 \iff 3 = 3\,.$$

Dies bedeutet, dass x beliebig gewählt werden kann, während $y = -2x + 1$ sein muss. Es gibt also unendlich viele Lösungspunkte; es sind dies genau die Punkte der Form $(x, -2x+1)$.
Geometrisch lassen sich die letzten beiden Ergebnisse sehr gut verstehen: In beiden Fällen stellen die beiden Einzelgleichungen *parallele* Geraden dar (d) Anstieg 2, e) Anstieg -2). Während im Falle d) die beiden Geraden verschieden sind und daher keinen Punkt gemeinsam haben, sind sie im Falle e) identisch: Die Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems ist eine komplette Gerade, nämlich die mit der Gleichung $y = -2x + 1$.

6) *Ein lineares Gleichungssystem (mit 2 Variablen) hat keine, eine oder unendliche viele Lösungen.*
Zur Begründung betrachten wir die Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen. Diese sind (in der Regel[1)]) Geraden und die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist damit der Durchschnitt zweier Geraden. Nun schneiden sich zwei Geraden in *einem* Punkt, es sei denn, sie sind parallel. In diesem Falle gäbe es *keinen* gemeinsamen Punkt oder die Geraden sind sogar identisch und *alle* Geradenpunkte sind Lösungen des Gleichungssystems.

[1)] Die Ausnahmen von dieser Regel sind lineare Gleichungen $ax+by = c$ mit $a = b = 0$. Diese stellen keine Gerade dar, sondern die leere Menge (bei $c \neq 0$) oder die ganze Koordinatenebene $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (bei $c = 0$). Also bleibt auch in diesen Randfällen die obige Aussage richtig. Sie gilt sogar für mehr als 2 Variable und lässt sich dann noch verfeinern (siehe Lineare Algebra, 5. Semester).

Übungen (10)

1) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $\begin{bmatrix} 4x-2y &=& 12 \\ 3x-3y &=& 24 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 8x-6y &=& 0 \\ 4x+y &=& -3 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 4x+7y-1 &=& 2x+y-1 \\ -8x+5y+1 &=& 4x-y-1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2x-2y &=& 5 \\ -3x+3y &=& 2 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} -4x-2y &=& -2 \\ 2x+y &=& 1 \end{bmatrix}$,

2) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (Additionsverfahren):

a) $\begin{bmatrix} x+2y+z=1 \\ x+4y+3z=1 \\ 2x-2y+z=7 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2x+y-2z=-6 \\ y+z=0 \\ 3x-2z=1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 3x+4y+2z=0 \\ x+y+z=0 \\ 4x+4y=0 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} -x+y+z=0 \\ x-y+z=2 \\ x+y=1 \end{bmatrix}$.

3) Aus zwei Kaffeesorten, die 8,00 bzw. 11,00 EURO pro kg kosten, sollen 12,5 kg einer Mischung hergestellt werden, von der 1 kg 9,08 EURO kosten. Wieviel muss man von jeder Sorte nehmen?

4) Bei der Geburt ihrer Tochter war die Mutter 24 Jahre alt. In 12 Jahren wird die Mutter doppelt so alt sein wie ihre Tochter. Wie alt sind beide heute?

5) Zwei Schulklassen sind unterschiedlich besetzt. ginge nur noch ein Schüler aus Klasse A in die Klasse B, so wäre B doppelt so stark wie A. Um beide Klassen gleich stark zu machen, müssten 5 Schüler von B nach A wechseln. Wie stark sind beide Klassen?

6) Auf einer Kleinkunstbühne tritt ein Rechenkünstler auf. Er fordert die Zuschauer auf, sich drei Zahlen zu denken und ihm nur die Summen von je zweien dieser Zahlen zu nennen. Er nennt dann unmittelbar die drei gedachten Zahlen. Zeigen Sie, dass Sie dies auch können, wenn auch mit ein wenig mehr Zeitaufwand.
Herr Meier nennt die Summen 6, 9 und 11. Herr Müller die Summen 13, 17 und 18. Welche Zahlen hatten sich die beiden Herren gedacht?

Übungen (10) — Lösungen

1) Ergebnisse: Die ersten drei Gleichungssysteme sind eindeutig lösbar. Die Lösungspunkte (x, y) sind: a) $(-2, -10)$, b) $(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{4})$, c) $(\frac{1}{7}, -\frac{1}{21})$.
d) hat keine Lösungen; die Lösungsmenge ist leer.
e) hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge ist die Gerade mit der Gleichung $y = -2x+1$, also die Gerade mit dem Anstieg -2 und dem y-Achsenabschnitt 1.
Lösungswege:
a) Gleichsetzungsverfahren: Löse beide Gleichungen nach y auf und 'setze gleich':

$$\begin{bmatrix} 4x - 2y & = & 12 \\ 3x - 3y & = & 24 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} y & = & 2x - 6 \\ y & = & x - 8 \end{bmatrix}$$

$$\implies 2x - 6 = x - 8 \iff x = -2$$

$$\implies y = -2 - 8 = -10$$

b) Einsetzungsverfahren: Löse die zweite Gleichung nach y auf und setze in die erste ein.

$$4x + y = -3 \iff y = -4x - 3$$

$$\implies 0 = 8x - 6 \cdot (-4x - 3) = 32x + 18 \iff x = -\frac{9}{16}$$

$$\implies y = -4 \cdot (-\frac{9}{16}) - 3 = -\frac{3}{4}$$

c) Zunächst Umformung in die Standardform $ax + by = c$:

$$\begin{bmatrix} 4x + 7y - 1 & = & 2x + y - 1 \\ -8x + 5y + 1 & = & 4x - y - 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2x + 6y & = & 0 \\ 12x - 6y & = & 2 \end{bmatrix}$$

Dann Additionsverfahren: Addition beider Gleichungen eliminiert y und liefert x:

$$\implies 14x = 2 \iff x = \frac{1}{7}$$

Einsetzen in eine der beiden Ausgangsgleichungen ergibt y:

$$2 \cdot \frac{1}{7} + 6y = 0 \iff y = -\frac{1}{21}\,.$$

d) Additionsverfahren: Addition des 3-fachen der ersten Zeile zum 2-fachen der zweiten Zeile ergibt einen Widerspruch:

$$\begin{bmatrix} 2x - 2y & = & 5 \\ -3x + 3y & = & 2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2x - 2y & = & 5 \\ 0 & = & 19 \end{bmatrix}$$

Die Gleichung (!) $0 = 19$ ist falsch, das Gleichungssystem hat keine Lösung.

e) Additionsverfahren: Addition des Doppelten der zweiten Gleichung zur ersten zeigt, dass die erste Gleichung 'überflüssig' ist (sie folgt aus der zweiten):

$$\begin{bmatrix} -4x-2y &=& -2 \\ 2x+y &=& 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 &=& 0 \\ 2x+y &=& 1 \end{bmatrix} \iff 2x+y=1 \iff y=-2x+1$$

Die erste Gleichung $0=0$ ist immer wahr, also überflüssig, und das Gleichungs*system* ist äquivalent zu der einen linearen Gleichung $y = -2x+1$. Die gesuchte Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist also die Lösungsmenge der linearen Gleichung $y=-2x+1$, also eine Gerade, und zwar die mit dem Anstieg -2 und dem y-Achsenabschnitt 1.
Die letzten beiden Beispiele von nicht eindeutig lösbaren Gleichungssystemen zeigen die wahre Stärke des Gaußschen Eliminationsverfahrens (Additionsverfahrens): Es werden *Widersprüche* oder *Redundanzen* (*überflüsssige* Gleichungen) sichtbar gemacht.

2) Ergebnisse: Alle Gleichungssysteme sind eindeutig lösbar.
Die Lösungspunkte (x, y, z) sind:
a) $(2, -1, 1)$, b) $(3, -4, 4)$, c) $(0, 0, 0)$, d) $(1, 0, 1)$.
Lösungswege:
Wir benutzen die verkürzte Matrixschreibweise für die Gauß-Elimination.

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \cdot(-1) & \cdot(-2) \\ \cdot 1 & \\ & \cdot 1 \end{array} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{array} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Wir lösen nun 'von unten nach oben' auf:

$$\begin{aligned} 5z = 5 &\iff z = 1\,, \\ 2y+2z = 0 &\implies 2y + 2\cdot 1 = 0 \iff y = -1\,, \\ x+2y+z = 1 &\implies x + 2\cdot(-1)+1 = 1 \iff x = 2\,. \end{aligned}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \downarrow + \\ \cdot 2 \end{array} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{array} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \end{array}\right)$$

Wir lösen nun 'von unten nach oben' auf:

$$\begin{aligned} 5z = 20 &\iff z = 4\,, \\ y+z = 0 &\implies y + 4 = 0 \iff y = -4\,, \\ 2x+y-2z = -6 &\implies 2x - 4 - 2\cdot 4 = -6 \iff x = 3\,. \end{aligned}$$

c) Hier sind einige Vereinfachungen möglich: Zunächst bietet es sich an, die 'einfachste' Gleichung $x+y+z=0$ als erste zu setzen (Zeilentausch), sodann eliminiert man die Variablen in umgekehrter Reihenfolge bei z beginnend (da in der dritten Gleichung z schon fehlt) und schließlich bleibt hier die rechte Seite immer unverändert, da überall eine 0 steht. Dies ergibt folgende Umformungskette:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \\ \end{array} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \cdot 1 \end{array} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Durch Auflösen von unten nach oben erhält man sukzessive $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$.

d) Auch hier eliminieren wir zuerst z:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot 1 \\ \end{array} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Auflösen 'von unten nach oben' ergibt:

$$\begin{aligned} 4x = 4 &\iff x = 1\,, \\ 2x - 2y = 2 &\implies 2 \cdot 1 - 2y = 2 \iff y = 0\,, \\ -x + y + z = 0 &\implies -1 + 0 + z = 0 \iff z = 1\,. \end{aligned}$$

3) Seien x bzw. y die gesuchten Mengen der jeweiligen Sorte. Dann gilt:

$$x + y = 12{,}5 \qquad \text{und} \qquad x \cdot 8 + y \cdot 11 = 12{,}5 \cdot 9{,}08\,.$$

Wir lösen die erste Gleichung nach y auf und setzen in die zweite ein:

$$\begin{aligned} & y = 12{,}5 - x \implies 8x + 11 \cdot (12{,}5 - x) = 12{,}5 \cdot 9{,}08 \\ & \iff -3x + 11 \cdot 12{,}5 = 12{,}5 \cdot 9{,}08 \\ & \iff 3x = (11 - 9{,}08) \cdot 12{,}5 = 24 \iff x = 8\,. \end{aligned}$$

Man muss 8 kg der billigeren mit 4,5 kg der teureren Sorte mischen.

4) Sei x bzw. y das heutige Alter von Mutter bzw. Tochter. Da die Mutter bei der Geburt der Tochter 24 Jahre alt war, gilt $x = y + 24$. Der Vergleich der Alter in 12 Jahren ($x + 12$ bzw. $y + 12$) ergibt

$$x + 12 = 2 \cdot (y + 12) \iff x = 2y + 12\,.$$

Einsetzen von $x = y + 24$ ergibt $y + 24 = 2y + 12 \iff y = 12$. Also ist die Tochter heute 12 und die Mutter 36 Jahre alt. (Kontrolle: In 12 Jahren ist die Tochter 24 und die Mutter 48 Jahre, also doppelt so alt wie die Tochter.)

5) Seien a bzw. b die Stärken der Klassen A bzw. B. Erste Bedingung: Ginge nur ein Schüler aus Klasse A in Klasse B, so wären die Klassenstärken $a - 1$ bzw. $b + 1$ und es gilt dann nach Vorgabe: $b + 1 = 2 \cdot (a - 1)$
Zweite Bedingung: Wenn 5 Schüler von B nach A wechselten, wären die Klassenstärken $a + 5$ bzw. $b - 5$, und es gilt nach Vorgabe: $a + 5 = b - 5$.
Die letzte Bedingung nach b aufgelöst ergibt $b = a + 10$ und in die erste Bedingung eingesetzt erhält man:

$$b + 1 = 2(a - 1) \implies (a + 10) + 1 = 2a - 2 \iff 13 = a\,.$$

Klasse A hat also 13 Schüler und Klasse B demnach $b = a + 10 = 23$.

6) Die *gedachten* Zahlen seien x, y, z.
Herr Meier nennt als Summen von je zwei Zahlen die Werte 6, 9 und 11. Dann lautet das zu lösende Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 6 \\ x & & & + & z & = & 9 \\ & & y & + & z & = & 11 \end{array}\right].$$

Das Gaußsche Eliminationsverfahren (in Matrixschreibweise) liefert:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 14 \end{array}\right)$$

Auflösung von unten nach oben ergibt
$2z = 14 \iff z = 7, \quad -y + 7 = 3 \iff y = 4, \quad x + 4 = 6 \iff x = 2.$
Herr Meier hat sich die Zahlen 2, 4 und 7 gedacht.
Herr Müller nennt als Summen von je zwei Zahlen die Werte 13, 17 und 18. Dann lautet das zu lösende Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 13 \\ x & & & + & z & = & 17 \\ & & y & + & z & = & 18 \end{array}\right].$$

Wir führen wieder Gauß-Elimination durch:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & 18 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 18 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 22 \end{array}\right)$$

Auflösung von unten nach oben ergibt:
$2z = 22 \iff z = 11, \quad -y + 11 = 4 \iff y = 7, \quad x + 7 = 13 \iff x = 6.$
Herr Müller hat sich die Zahlen 6, 7 und 11 gedacht.