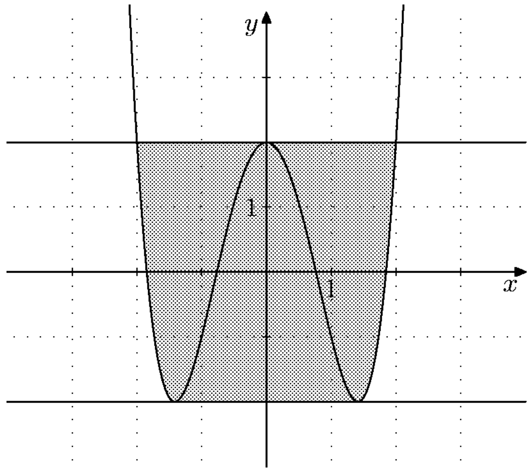
4L1 Mathematik (Kg) **Name:** ____________________

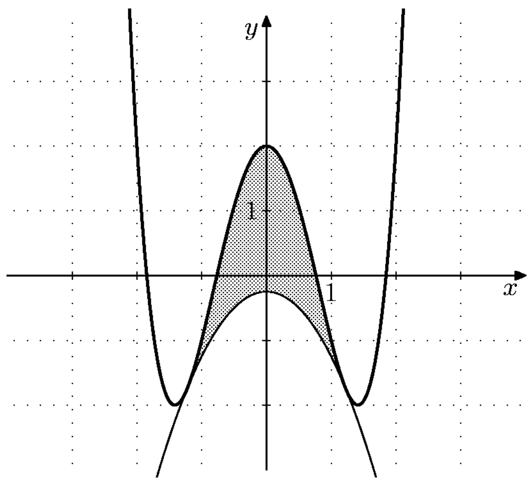
2. Klausur **24. April 2009**

Aufgabe 1:

Die nachfolgende Skizze zeigt den Graphen von $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ sowie seine Tangenten in den Extrempunkten.

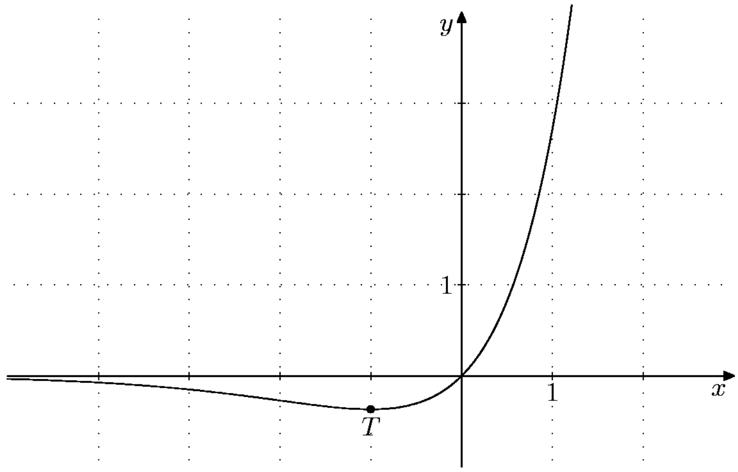


a) In welchem Verhältnis teilt der Graph das markierte Flächenstück?
b) Bestimmen Sie alle zur y-Achse symmetrischen nach unten geöffneten Normalparabeln, die den Graphen von f berühren.
[Kontrollergebnis: $g_1(x) = -x^2 + 2$ und $g_2(x) = -x^2 - \frac{1}{4}$.]
c) Eine der Parabeln berührt den Graphen in *zwei* Punkten. Welche Parabel ist dies und welches sind die beiden Berührpunkte?
d) Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der in c) bestimmten Parabel?



Aufgabe 2:

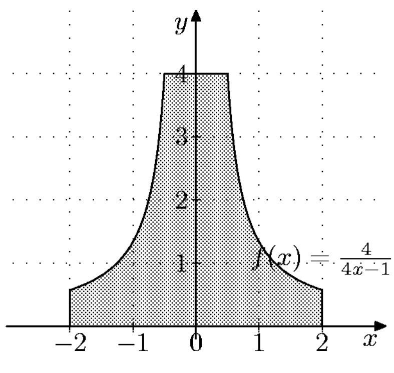
Es sei $f(x) = xe^x$.
a) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von f. Was fällt Ihnen auf?
b) Bestimmen Sie durch einen *begründeten* Ansatz eine Stammfunktion F für f. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis.
c) Bestätigen Sie mit kurzen Argumenten den nachfolgend skizzierten Verlauf des Graphen von f.



d) Zeichnen Sie in diese Skizze die beiden Normalen zum Graphen von f im Tiefpunkt bzw. im Koordinatenursprung ein und markieren Sie dann das Flächenstück, das von diesen beiden Normalen und dem Graphen eingeschlossen wird. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.
[Sollten Sie in b) keine Stammfunktion für f gefunden haben, so können Sie *ersatzweise* zeigen, dass $F_1(x) = e^x(x - e^{-x} - 1)$ eine Stammfunktion von f ist.]

Aufgabe 3:

Bei Straßenbauarbeiten werden zur Abtrennung der Fahrbahn Betonklötze aufgestellt, deren achsensymmetrischer Querschnitt nebenstehend skizziert ist (Einheit dm). Der rechts begrenzende Funktionsgraph wird durch $f(x) = \dfrac{4}{4x-1}$ beschrieben.



a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion für f.
[Sie können im folgenden Aufgabenteil *ersatzweise* mit $F_1(x) = \ln(8x-2)$ arbeiten.]
b) Bestimmen Sie die Querschnittsfläche.
[Zur Kontrolle: $A = 4 + 2\ln 7$]
c) Welche Länge sollten die Klötze haben, damit sie nicht schwerer als 200 kg werden? (Dichte von Beton 2,8 kg pro dm^3)

Viel Erfolg!

2. Klausur — Lösungen

4L1 Mathematik (Kg) **Name:** ____________________

1. Klausur **5. März 2009**

Aufgabe 1:

Es sei $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

a) Bestimmen Sie die Randgrenzwerte von f. Besitzt f Asymptoten? Wenn ja, für welchen Grenzübergang und mit welcher Gleichung?

b) Untersuchen Sie f auf Monotonie und Wendepunkte.

[Zur Kontrolle: Ein möglicher Ableitungsterm ist $f'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$.]

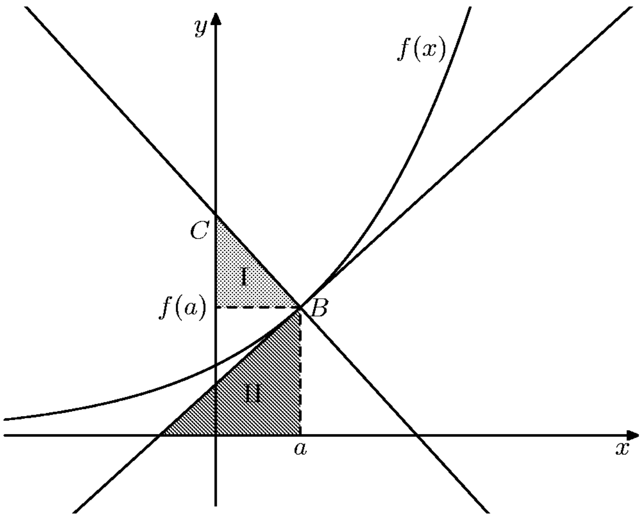
c) Skizzieren Sie die Asymptoten und die Wendetangente (= Tangente im Wendepunkt) und dann den Graphen von f. Unter welchem Winkel schneidet der Graph die x-Achse?

d) Unter welchem Winkel schneidet der Graph von $g(x) = e^{-x} - 1$ den Graphen von f?

[Tipp: Vermeiden Sie eine längere algebraische Berechnung der Schnittstellen und begründen Sie durch geeignete Monotonieaussagen über f und g, dass die Graphen sich nur einmal schneiden können. In welchem Punkt? Beantworten Sie dann die gestellte Frage.]

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^x$.



a) Bestimmen Sie Gleichungen und Achsenschnittpunkte für Tangente und Normale des Graphen von f im Punkt $B = (a, f(a))$ $(a \geq 0)$.

[Zur Kontrolle: $C = (0, ae^{-a} + e^a)$.]

b) Zeigen Sie, dass das skizzierte Dreieck II immer dieselbe Breite hat. Welche?

Für welchen Punkt B verläuft die Tangente durch den Koordinatenursprung.

c) Für welches $a \geq 0$ hat das Dreieck I seinen absolut größten Flächeninhalt. Wie groß ist dieser?

– bitte wenden –

Aufgabe 3:

^{14}C ist ein radioaktives Isotop des Kohlenstoffes, das mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren in Stickstoff ^{14}N zerfällt.

a) Allgemein kann man Zerfallsfunktionen in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) darstellen als

$$m(t) = m_0 \cdot a^t = m_0 \cdot e^{kt} = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{\alpha}} .$$

Erläutern Sie die Bedeutung der auftretenden Parameter und die rechnerischen Zusammenhänge zwischen a, k und α. Welcher Zusammenhang besteht mit der jährlichen Änderungsrate p?

b) Bestimmen Sie für den ^{14}C-Zerfall die konkreten Werte für a, k sowie α (exakt und in hinreichend genauer Näherung).
Wie groß ist die Zerfallsrate pro 100 Jahre? [Zur Kontrolle: 1,2%.]

c) Durch den ständigen Stoffwechsel ist in *lebenden* Organismen (Pflanzen, Tiere) der ^{14}C-Gehalt konstant gleich

$$4 \cdot 10^5 \text{ Atome } {}^{14}\text{C in } 1\,\text{mg Kohlenstoff}.$$

Stirbt der Organismus und hört damit der Stoffwechsel auf, so reduziert sich der ^{14}C-Anteil durch radioaktiven Zerfall.
In einem Gletscher in den österreichischen Alpen wurde die mumifizierte Leiche eines eiszeitlichen Jägers, genannt 'Ötzi', gefunden. Bei diesem wies man in einer Kohlenstoffprobe von 1 mg insgesamt

$$2{,}3 \cdot 10^5 \text{ Atome } {}^{14}\text{C}$$

nach. Bestimmen Sie das Alter von 'Ötzi'.

d) Jedes zerfallende ^{14}C-Atom strahlt ein Elektron ab, das man registrieren kann. Wieviele zerfallende Atome registriert man in einem Jahr bei der in c) genannten Kohlenstoffprobe von 'Ötzi'?

Viel Erfolg!

1. Klausur — Lösungen

1) a) Grenzübergang $x \to \infty$: Der dominierende Term ist e^{2x}, daher wird dieser ausgeklammert und man erhält

$$f(x) = \frac{e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})} = \frac{1-\overbrace{e^{-2x}}^{\to 0}}{1+\underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}} \to \frac{1-0}{1+0} = 1\,.$$

Grenzübergang $x \to -\infty$: Dann gilt $e^{2x} \to 0$ und folglich

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \to \frac{0-1}{0+1} = -1\,.$$

Damit hat f für beide Grenzübergänge waagerechte Asymptoten, $y = 1$ für $x \to \infty$ und $y = -1$ für $x \to -\infty$.
b) Wir berechnen mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - (e^{2x}-1)\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2e^{2x}\cdot 2}{(e^{2x}+1)^2}\,.$$

Damit hat f' keine Nullstellen (Zähler immer positiv) und f weder Extrem- noch Sattelstellen.

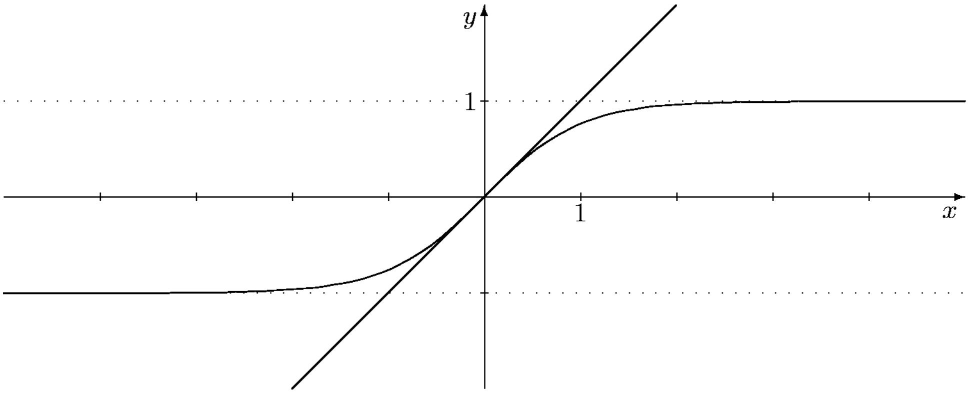
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{8e^{2x}(e^{2x}+1)^2 - 4e^{2x}\cdot 2(e^{2x}+1)\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^4} \\ &= \frac{8e^{2x}(e^{2x}+1) - 16e^{2x}\cdot e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3} \\ &= 8e^{2x}\cdot\frac{e^{2x}+1-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3} = 8e^{2x}\frac{1-e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}\,. \end{aligned}$$

Damit hat f'' nur eine Nullstelle:

$$f''(x) = 0 \iff 1-e^{2x} = 0 \iff e^{2x} = 1 \iff 2x = 0 \iff x = 0\,.$$

Da $1 - e^{2x}$ monoton ist (fallend), wechselt dieser Term an seiner Nullstelle das Vorzeichen (von + zu −). Dasselbe gilt für f'', da die anderen Faktoren immer positiv sind. Also ist 0 (einzige) Wendestelle von f (mit Krümmungwechsel von Links- zur Rechtskrümmung).
c) Die Wendestelle ist 0, der Anstieg der Wendetangente daher $f'(0) = \frac{4}{(1+1)^2} = 1$. Damit schneidet die Wendetangente die x-Achse unter einem Winkel von 45^0. Der Wendepunkt ist $W = (0, f(0)) = (0,0)$. Dies ergibt die folgende Skizze. (Sie lässt

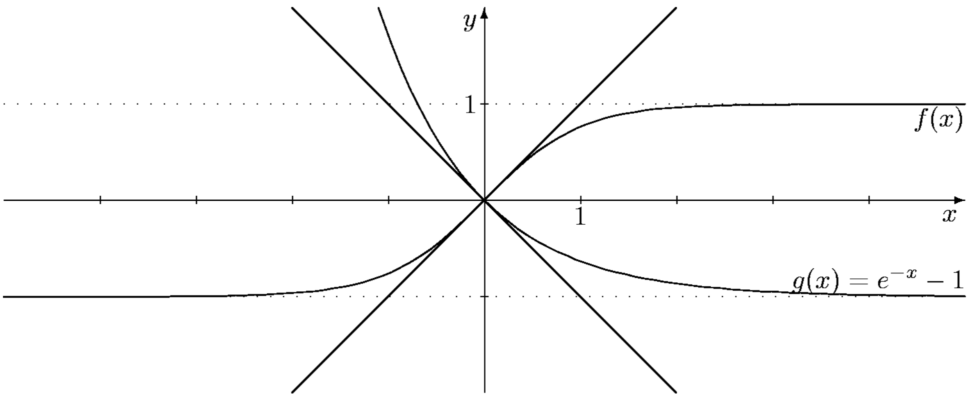
Punktsymmetrie vermuten.)



d) f ist monoton steigend, $g(x) = e^{-x} - 1$ monoton fallend, also können sich die beiden Graphen höchstens einmal schneiden. Der Schnittpunkt $(0,0)$ ist leicht zu erraten. Der Tangentenanstieg von g im Schnittpunkt ist

$$g'(x) = -e^{-x}\,, \quad g'(0) = -1\,.$$

Im Schnittpunkt sind die Tangentenanstiege also $+1$ und -1, ihr Produkt also -1: Die Tangenten sind rechtwinklig zueinander. Die folgende Skizze veranschaulicht dieses Ergebnis:



2) a) Wir berechnen die Tangentenfunktion

$$t_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = e^a + e^a(x-a) = e^a(x-a+1)$$

und die Normalenfunktion

$$n_a(x) = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a) = e^a - e^{-a}(x-a) = -e^{-a}(x-a-e^{2a})\,.$$

Dies ergibt die Achsenschnittpunkte

Gerade	S_y	S_x
Tangente:	$(0, e^a - ae^a)$	$(a-1, 0)$
Normale:	$(0, e^a + ae^{-a})$	$(e^{2a} + a, 0)$

b) Die Nullstelle der Tangentenfunktion ist $a-1$, damit ist die Breite des Dreiecks II immer gleich $a-(a-1)=1$. Wenn die Tangente durch den Koordinatenursprung verläuft, ist $a-1=0$, also $a=1$ und der gesuchte Punkt ist $B=(1,e)$.
c) Der y-Achsenabschnitt der Normale ist $ae^{-a}+e^a$ (Kontrollergebnis), damit betragen Höhe h und Breite b des Dreiecks I

$$b=a\,,\quad h=ae^{-a}+e^a-f(a)=ae^{-a}\,.$$

Die Fläche des Dreiecks I beträgt als

$$A(a)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot ae^{-a}=\frac{1}{2}a^2e^{-a}\,.$$

Wir untersuchen die Funktion A auf Extrema im Bereich $a\geq 0$:

$$A'(a)=ae^{-a}-\frac{1}{2}a^2e^{-a}=\frac{1}{2}e^{-a}a(2-a)\,.$$

Damit hat A' die Nullstelle 0 und 2. Bei der größten Nullstelle 2 liegt ein VZW von + zu −, da A' schließlich negativ ist. Also hat A bei 0 ein Minimum und bei 2 ein Maximum. Da dies das einzige im Bereich $a\geq 0$ ist, muss dort das absolute Maximum für diesen Bereich liegen. Der maximale Flächeninhalt ist dann $A(2)=\frac{2}{e^2}\approx 0{,}27$.

3) a) Es ist m_0 die Ausgangsmasse des ^{14}C-Kohlenstoffs und $m(t)$ die Masse zum Zeitpunkt t (in Jahren).
a der jährliche Änderungsfaktor von $m(t)$, also $a=\frac{m(t+1)}{m(t)}$ für alle t.
Damit zusammen hängt $p=a-1$, die jährliche Änderungsrate. Dies ist nichts anderes als die relative durchschnittliche Änderung pro Jahr.
Die Wachstumskonstante k ist die relative momentane Änderungsrate, d. h. $k=\frac{m'(t)}{m(t)}$ für alle t.
Schließlich ist α nichts anderes als die Halbwertszeit, denn

$$\frac{m(t+\alpha)}{m(t)}=\frac{2^{-(t+\alpha)/\alpha}}{2^{-t/\alpha}}=2^{-1}=\frac{1}{2}\,.$$

Umrechnung: $a=e^k \iff k=\ln a$, $e^k=2^{-1/\alpha} \iff k=-\frac{\ln 2}{\alpha}$.
b) Es ist $\alpha=5730$, also $k=-\frac{\ln 2}{5730}\approx -1{,}209681\cdot 10^{-4}$ und $a=2^{-1/5730}\approx 0{,}999879039$, also $p=a-1=2^{-1/5730}-1\approx 1{,}209608\cdot 10^{-4}$.
Die Zerfallsrate pro 100 Jahre ist

$$\frac{m_0-m(100)}{m_0}=1-a^{100}=1-2^{-100/5730}\approx 1{,}2024\%\,.$$

c) Es sei $N(t)$ die Zahl der ^{14}C-Atome in 1 mg Kohlenstoff zur Zeit t (in Jahren) nach dem Tode des Ötzi. Gemäß Aufgabenstellung gilt $N_0=4\cdot 10^5$ und für den Untersuchungszeitpunkt $N(t)=2{,}3\cdot 10^5$. Also

$$2{,}3\cdot 10^5=4\cdot 10^5\cdot 2^{-t/5730} \iff -\frac{t}{5730}\log 2=\log 2{,}3-\log 4$$
$$\iff t=5730\cdot\frac{\log 4-\log 2{,}3}{\log 2}\approx 4575\,.$$

Ötzi ist somit etwa 4600 Jahre alt.
d) Die Anzahl der in einem Jahr zerfallenden ^{14}C-Atome in dieser Probe ist

$$2{,}3\cdot 10^5\cdot(1-a)=2{,}3\cdot 10^5\cdot(1-2^{-1/5730})\approx 2{,}3\cdot 10^5\cdot 1{,}2096\cdot 10^{-4}=27{,}82\,.$$

Bei einer so kleinen Probe (1 mg) zerfallen pro Jahr also nur etwa 28 Atome ^{14}C, pro Monat nur 2–3!