5L1 Mathematik (Kg) **Name:** ____________________

2. Klausur **19. November 2009**

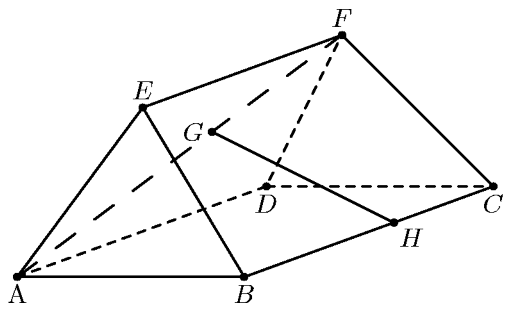
Aufgabe 1:

Gegeben ist die Gerade g durch die Punkte $A = (3, -2, 1)$ und $B = (5, 0, 4)$ sowie der Punkt $Q = (2, -5, -2)$.
a) *Bestimmen Sie den Fußpunkt F des Lotes von Q auf g.*
[Kontrollergebnis: $F = (1, -4, -2)$.]
b) *Berechnen Sie den Abstand $d(Q, g)$ des Punktes Q von der Geraden g.*
c) *Berechnen Sie* unter Verwendung von b) *den Flächeninhalt des Dreiecks ABQ* (entsprechend der Definition).
d) *Berechnen Sie* ohne Verwendung von b) *auf direktem Wege allein aus den Punktkoordinaten den Flächeninhalt des Dreiecks ABQ und bestätigen Sie damit Ihr Ergebnis von c).*
e) *Entwickeln Sie durch Vergleich der Überlegungen in c) und d) eine Methode zur Bestimmung des Abstandes eines Punktes Q von einer Geraden g* ohne Berechnung des Lotfußpunktes. *Leiten Sie damit die folgende Formel für den Abstand eines Punktes Q von einer Geraden g (im dreidimensionalen Raum) her:*

$$d(Q, g) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{AB}|} \quad \text{für } A, B \in g\,, \; A \neq B\,.$$

Aufgabe 2:

a) *Zeigen Sie, dass die Punkte $A = (0, 0, 0)$, $B = (-2, 4, -4)$, $C = (4, 10, -1)$ drei Eckpunkte eines Rechtecks sind, und bestimmen Sie den vierten Eckpunkt D, die Kantenlängen sowie die Fläche des Rechtecks.*
b) Das Rechteck $ABCD$ ist Teil eines Hausdaches (siehe Skizze) mit $E = (4, 2, -3)$ und $F = (8, 6, -1)$.

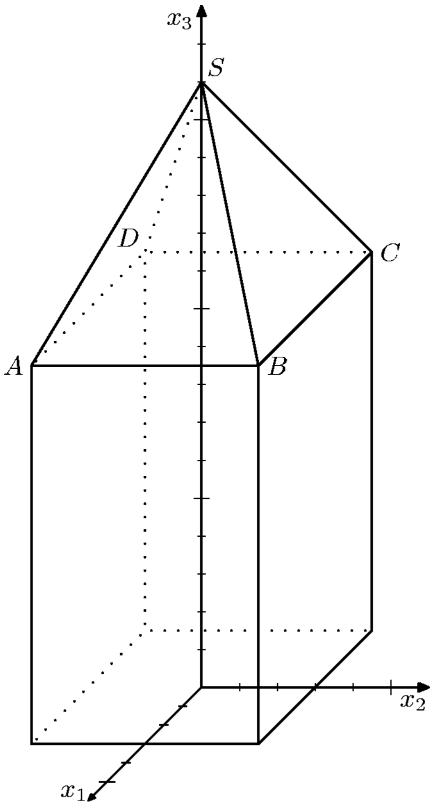


Bestimmen Sie die Höhe des Dachfirstes EF über der Bodenfläche $e = e(A, B, C)$.
c) *Zeigen Sie, dass der rückseitige Giebel CDF senkrecht zum Boden $ABCD$ verläuft. Welchen Winkel bildet der vordere Giebel ABE mit der Bodenfläche?*
d) Zur Sicherung des Daches muss ein Stützbalken zwischen der Kante $\overline{BC}$ und dem Diagonalbalken $\overline{AF}$ eingefügt werden. Dieser Stützbalken soll auf beiden Kanten senkrecht stehen.
Bestimmen Sie die Länge des benötigten Balkens sowie die Lage der Punkte G und H, zwischen die der Stützbalken gesetzt werden soll.

Aufgabe 3:

Auf einen Quader mit der Grundfläche in der x_1-x_2-Ebene ist eine Pyramide mit folgenden Eckpunkten aufgesetzt (vgl. Skizze):

$$A = (3, -3, 10)\,,\;\; B = (3, 3, 10)\,, C = (-3, 3, 10)\,,\;\; D = (-3, -3, 10)\,, S = (0, 0, 16)\,.$$



a) *Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene e, in der die Punkte A, B, S liegen.*

[Kontrollergebnis: $2x_1 + x_3 = 16$.]

b) *Bestimmen Sie den Winkel, mit dem die x_3-Achse diese Ebene e schneidet. Welchen Innenwinkel bildet die Dachfläche ABS mit der Vorderfläche des Quaders?*

c) Eine durch den Punkt $P = (6, -4, 16)$ in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ verlaufende Gerade g durchstößt die Ebene e in einem Punkt Q.

Bestimmen Sie $Q \in e$.

d) Es sei k die Gerade durch P und S. Der Punkt S' bewege sich auf der Geraden k. *Zeigen Sie, dass k parallel zur Bodenebene verläuft, und begründen Sie (ohne zuätzliche Rechnung), dass alle Pyramiden $ABCDS'$ dasselbe Volumen haben wie $ABCDS$. Wie groß ist dieses?*

Viel Erfolg!

2. Klausur — Lösungen

1) a) Gesucht ist $F \in g$ mit $\overrightarrow{QF} \perp g$.

$$F \in g \iff \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QF} \perp g \iff \overrightarrow{QF} = \overrightarrow{QA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \iff 0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 17 + 17r \iff r = -1\,. \end{aligned}$$

Damit ist $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, also $F = (1, -4, -2)$.

b) Da F der Lotfußpunkt ist, gilt $d(Q, g) = d(Q, F) = |\overrightarrow{QF}| = |\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}| = \sqrt{2}$.

c) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist ‘Grundseite mal Höhe durch 2’, also

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{17}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{34}}{2} \approx 2{,}92\,.$$

d) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist die Hälfte des Flächeninhalts eines Parallelogramms, letzterer kann als Länge eines Vektorproduktes berechnet werden:

$$\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AQ}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{34}\,.$$

e) Der Abstand des Punktes Q von der Geraden g ist die Länge der Höhe durch Q im Dreieck ABQ, und diese ist der Quotient aus Flächeninhalt des Dreiecks und halber Grundseite. Also berechne man mit dem Vektorprodukt die Dreiecksfläche von ABQ und dividiere durch die Hälfte der Grundseitenlänge $|\overrightarrow{AB}|$ ($\neq 0!$). Als Formel ergibt sich

$$d(Q, g) = h_Q = \frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AQ}|}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{AB}|}\,,$$

wie behauptet. Die Berechnung von Vektorprodukt und Längen ist unmittelbar aus den Punktkoordinaten möglich und liefert so den Abstand *ohne* Fußpunktberechnung.

2) a) Die Kantenvektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind orthogonal:

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = -12 + 24 - 12 = 0\,,$$

und haben die Längen $2\sqrt{9} = 6$ bzw. $3\sqrt{9} = 9$. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist also $6 \cdot 9 = 54$.
Den Eckpunkt D bestimmt man aus der Parallelogrammforderung

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} \implies D = (6,6,3)\,.$$

b) Die Gerade $g(E,F)$ hat den Richtungsvektor $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Damit ist $g(E,F) \parallel e$ und daher $d(g,e) = d(E,e)$. Wir bestimmen einen Normalenvektor zu e:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 18\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $2x_1 - x_2 - 2x_3 = d$ eine Gleichung für e und wegen $A = O \in e$ ist $d = 0$. Dies ergibt als Höhe des Firstes

$$d(g(E,F),e) = d(E,e) = \frac{|2 \cdot 4 - 2 - 2 \cdot (-3)|}{\sqrt{9}} = \frac{12}{3} = 4\,.$$

c) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ (siehe a)) und auch zu $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Damit ist $\overrightarrow{BC}$ ein Normalenvektor des hinteren Giebels, der in der Bodenebene verläuft, beide Ebenen sind also orthogonal.
Wir bestimmen einen Normalenvektor zu $e_1 = e(A,B,E)$:

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -22 \\ -20 \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$\angle(e,e_1) = \arccos\Big(\frac{|\vec{n}_e \bullet \vec{n}_{e_1}|}{|\vec{n}_e| \cdot |\vec{n}_{e_1}|}\Big) = \arccos\Bigg(\frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -4 \\ -22 \\ -20 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{9}\sqrt{900}}\Bigg) = \arccos\Big(\frac{54}{90}\Big) \approx 53{,}1^0\,.$$

d) Gesucht ist das gemeinsame Lot zu den Geraden

$$g_1 = g(A,F): \quad \overrightarrow{OX} = r\overrightarrow{AF} = r\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$g_2 = g(B,C): \quad \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dafür muss gelten
$$\overrightarrow{XY} \perp g_1 \iff 0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{AF}\,,$$
$$\overrightarrow{XY} \perp g_2 \iff 0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{BC}\,.$$

Wir berechnen
$$\overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und erhalten die linearen Gleichungen

$$0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{AF} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = 12 - 101r + 81s\,,$$
$$0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{BC} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = -81r + 81s\,.$$

Die Lösung ist $r = s$ und $s = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Damit erhalten wir die Auflagepunkte

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AF} \implies G = (\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{3}{5})\,,$$
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} \implies H = (\frac{8}{5}, \frac{38}{5}, -\frac{11}{5})\,,$$

und als Länge des Balkens

$$l = \left|\begin{pmatrix} -\frac{16}{5} \\ -4 \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix}\right| = \frac{4}{5}\sqrt{16+25+4} = \frac{4}{5}\sqrt{45} = \frac{12}{5}\sqrt{5} \approx 5{,}37\,.$$

3) a) Es ist

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = 6 \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 18\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Koordinatengleichung für e ist also $2x_1 + x_3 = d$ und Einsetzen von S ergibt $d = 16$.

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor von e und $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor der x_3-Achse, also der gesuchte Winkel

$$\alpha = \angle(e, x_3) = \arcsin(\frac{|\vec{n} \bullet \vec{e}_3|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{e}_3|}) = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) \approx 26{,}6^0\,.$$

Der Innenwinkel ist 90^0 plus dem Winkel β zwischen e und der x_1-x_2-Ebene. Diese hat $\vec{e}_3$ als Normalenvektor, daher ist $\beta = 90^0 - \alpha$, der gesuchte Winkel also $90^0 + (90^0 - \alpha) = 153{,}4^0$.

c) Eine Parameterdarstellung für g ist

$$g: \quad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + r\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen diese in die Koordinatengleichung für e ein, um den Schnittpunkt Q zu bestimmen:

$$16 = (2 \cdot 6 + 16) + r \cdot (2 \cdot (-3) - 2) \iff 8r = 12 \iff r = \frac{3}{2},$$

also $Q = (\frac{3}{2}, -1, 13)$.

d) Ein Richtungsvektor von k ist $\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dieser ist parallel zur x_1-x_2-Ebene (weil orthogonal zum Normalenvektor $\vec{e}_3$). Alle Punkte S' von k haben also denselben Abstand von der Ebene $e(A, B, C)$ (die zur x_1-x_2-Ebene parallel ist), alle Pyramiden $ABCDS'$ somit dieselbe Höhe und folglich dasselbe Volumen. Dieses beträgt $V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 6 = 72$.

5L1 Mathematik (Kg) **Name:** ____________________

1. Klausur **18. September 2009**

Aufgabe 1:

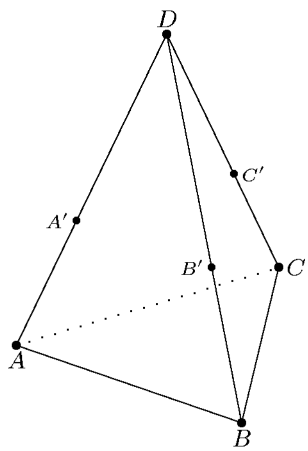
Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x + y + 4z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ x - 3y - 2z &= 4 \end{aligned} \quad .$$

a) Stellen Sie die erweiterte Matrix auf, überführen Sie sie durch Gauß-Elimination in eine Dreiecksmatrix und bestimmen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix.
b) Erläutern Sie allgemein, wie der Rang definiert ist und welche Bedeutung er für die Lösbarkeit und die Lösungsvielfalt eines linearen Gleichungssystems hat.
c) Begründen Sie aufgrund der Rechnung in a), dass die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems eine Gerade ist.
d) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für diese Gerade und geben Sie eine geometrische Beschreibung für sie.
e) Lösen Sie nun das zu a) gehörige *homogene* Gleichungssystem, das dieselben linken Seiten, aber auf der rechten Seite nur Nullen hat. Welcher geometrische Zusammenhang besteht zwischen den Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme?

Aufgabe 2:

Gegeben ist ein Tetraeder mit den Eckpunkten $A = (0, 0, 4)$, $B = (-1, 2, 4)$, $C = (1, 4, -2)$ und $D = (0, 6, 1)$.
Wir betrachten D als 'Spitze' und die Ebene e durch ABC als den 'Boden' (siehe Skizze).



a) Zeigen Sie, dass der Punkt $A' = (0, 4, 2)$ auf der Kante $g(A, D)$ *zwischen* A und D liegt. In welchem Verhältnis teilt A' die Kante AD?
b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene e', die parallel zur Bodenebene durch den Punkt A' verläuft.
c) Zerschneidet man das Tetraeder längs der Ebene e', so erhält man ein verkleinertes Tetraeder mit derselben 'Spitze' D und A' als einem Eckpunkt des neuen Bodens. Bestimmen Sie die beiden anderen Eckpunkte B', C' der neuen Bodenfläche.
d) In welchem Verhältnis teilen die Punkte B', C' die entsprechenden Kanten des Tetraeders? Haben Sie eine Erklärung für das auffallende Ergebnis?

– bitte wenden –

Aufgabe 3:

Gegeben sind vier Punkte $A = (2, 1, 0)$, $B = (2, -1, -2)$, $C = (4, 1, 2)$ und $D = (6, 3, -4)$.

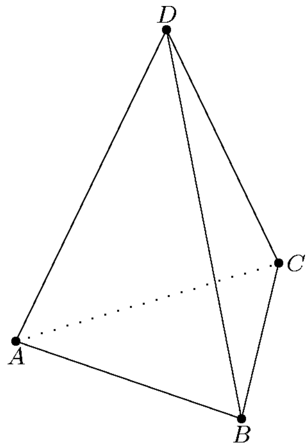
a) Bestätigen Sie rechnerisch, dass die Geraden $g(A, B)$ und $g(C, D)$ sich nicht schneiden, aber auch nicht parallel sind.

b) Folgern Sie daraus, dass die 4 Punkte nicht in einer Ebene liegen können, also ein Tetraeder bilden (siehe Skizze).

c) Berechnen Sie die Mittelpunkte M_{AB} und M_{CD} zweier gegenüberliegender Kanten sowie eine Parameterdarstellung für ihre Verbindungsgerade $g_1 = g(M_{AB}, M_{CD})$.

d) Wir betrachten nun die Gerade g_2 durch die Mittelpunkte M_{AD} und M_{BC} der beiden anderen Kanten. Zeigen Sie, dass g_1 und g_2 sich in einem Punkt S schneiden, und bestimmen Sie ihn.

e) Bestätigen Sie, dass der Ortsvektor von S das arithmetische Mittel der Ortsvektoren der 4 Eckpunkte A, B, C, D des Tetraeders ist.



Viel Erfolg!

Mittelpunktsformel: $\overrightarrow{OM_{AB}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

1. Klausur — Lösungen

1) a)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 10 & 10 & -10 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Der Rang ist 2.
b) Der Rang ist die Anzahl der Nicht-Nullzeilen der Koeffizientenmatrix nach Ende des Gaußschen Eliminationsverfahrens.
Bedeutung für die Lösbarkeit: Ist m die Anzahl der Gleichungen (= Zeilenzahl der Koeffizientenmatrix), so gibt $m - r$ die Zahl der Bedingungen an, die erfüllt sein müssen, damit das System lösbar ist („Lösbarkeitsbedingungen“). Die Bedingungen lauten: Nach Ende des Gauß-Verfahrens muss in jeder Nullzeile der Koeffizientenmatrix auch auf der rechten Seite 0 stehen. Spezialfall: Ist $m = r$, d. h. der Rang gleich der Anzahl der Gleichungen, so ist das System lösbar (unabhängig von der rechten Seite).
Bedeutung für die Lösungsvielfalt: Ist n die Zahl der Unbekannten (=Spaltenzahl der Koeffizientenmatrix), so gibt im Falle der Lösbarkeit $n - r$ die Anzahl der frei wählbaren Parameter in der Parameterdarstellung der Lösungsmenge an. Dies bedeutet bei einem *lösbaren* System: Die Lösungsmenge ist eine Gerade bei $n-r = 1$, eine Ebene bei $n - r = 2$ und ein einzelner Punkt im Falle $n - r = 0$, d. h. wenn der Rang r gleich der Zahl der Unbekannten ist.
c) Die Lösbarkeitsbedingung ist erfüllt, das System ist lösbar. Die Lösungsmenge ist eine Gerade, da $n - r = 3 - 2 = 1$ ist, also *ein* freier Parameter auftritt.
d) Wir lösen von unten nach oben auf:

$$-5y - 5z = 5 \iff y = -z - 1\,, \quad 3x + (-z - 1) + 4z = 2 \iff x = -z + 1\,.$$

Damit sind die Lösungsvektoren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z \\ -1 - z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine Parameterdarstellung für die Lösungsgerade; diese ist die Gerade durch den Punkt $(1, -1, 0)$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
e) Wenn sich die linke Seite nicht ändert, ändern sich auch die Umformungsschritte nicht, man erhält also dieselben Gauß-Umformungen und denselben Rang $r = 2$. Lediglich auf der rechten Seite stehen lauter Nullen. Diese werden durch die Gaußumformungen nicht verändert. Wegen der Nullen rechts ist das homogene System auf jeden Fall lösbar, die Lösungsmenge also wieder eine Gerade, diesmal jedoch durch den Koordinatenursprung O. Man erhält also am Ende der Gauß-Elimination die Dreiecksmatrix

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Auch die Auflösung von unten nach oben ergibt dieselben Formeln, lediglich die absoluten Terme sind 0:

$$-5y-5z=0 \iff y=-z\,, \quad 3x-z+4z=0 \iff x=-z$$

Die Parameterdarstellung ist dann

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsgerade ist *parallel* zur Lösungsgeraden des ursprünglichen Systems, sie verläuft durch den Koordinatenursprung $O=(0,0,0)$.

2) a) Es gilt

$$A' \in g(A,D) \iff \overrightarrow{AA'} = r\overrightarrow{AD} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \iff r=\frac{2}{3}.$$

Da der Parameterwert zwischen 0 und 1 liegt, liegt der Punkt A' zwischen A und D. Der Punkt A' teilt die Strecke AD im Verhältnis $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:1$.

b) Wegen $e' \parallel e$ kann man für e' dieselben Richtungsvektoren wie für e wählen, etwa $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$. Also

$$X\in e' \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA'} + r\vec{u} + s\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

c) Schnittpunkt B':

$$X \in g(B,D) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Gleichsetzen:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \iff\ & r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -6 & -4 \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung. Die letzte Gleichung ergibt $t = \frac{2}{3}$ und damit

$$\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{14}{3} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B' = (-\frac{1}{3}, \frac{14}{3}, 2)\,.$$

c) Schnittpunkt C':

$$X \in g(C,D) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gleichsetzen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \iff r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -4 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & -4 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung. Die letzte Gleichung ergibt $t = \frac{2}{3}$ und damit

$$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{16}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C' = (\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, 0)\,.$$

d) Die neuen Eckpunkte teilen die Kanten jeweils im selben Verhältnis $2:1$. Dies liegt an der Parallelität der beiden Ebenen (Strahlensatz).

3) a) Wir bestimmen die Parameterdarstellungen beider Geraden:

$$\begin{aligned} X \in g(A,B) &\iff \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \\ X \in g(C,D) &\iff \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Schnittpunktsberechnung:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

Die letzte Gleichung zeigt den Widerspruch $0 = 10$; die Geraden haben keinen Schnittpunkt.

Die Geraden sind auch nicht parallel, da ihre Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ keine Vielfachen voneinander sind (1. Komponente müsste in beiden Vektoren 0 sein).

b) Wenn die 4 Punkte in einer Ebene lägen, lägen auch die beiden Geraden in einer Ebene. Zwei Geraden in einer Ebene müssen sich aber schneiden oder parallel sein, was nachweislich nicht der Fall ist.

c) $M_{AB} = (2, 0, -1)$, $M_{CD} = (5, 2, -1)$, also

$$X \in g_1 = g(M_{AB}, M_{CD}) \iff \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

d) Genauso $M_{AD} = (4, 2, -2)$, $M_{BC} = (3, 0, 0)$ und

$$X \in g_2 = g(M_{AD}, M_{BC}) \iff \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schnittpunktsberechnung:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das System ist eindeutig lösbar; es gibt genau einen Schnittpunkt. Aus der letzten Gleichung erhält man $s = \frac{1}{2}$ und damit den Schnittpunkt

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad S = (\frac{7}{2}, 1, -1).$$

Dies ist genau das arithmetische Mittel der Ortsvektoren der 4 Eckpunkte.