Übungen (1)

1) Gegeben sind die Punkte $A = (2, 1)$, $B = (-2, -3)$ und $C = (4, -1)$.
a) Skizzieren Sie diese drei Punkte in einem Koordinatensystem.
b) Verschieben Sie das Dreieck ABC um den Vektor $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eckpunkte A', B', C' des verschobenen Dreiecks.
c) Überprüfen Sie Ihre Zeichnung durch eine entsprechende Rechnung.
d) Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, sowie die entsprechenden Vektoren $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'A'}$. Was stellen Sie fest?

2) Gegeben sind die Punkte $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$ und $C = (4, 1, 2)$ im Raum. Berechnen Sie die Vektoren

$$\overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{BC}\,,\ \overrightarrow{AC}\,,\ \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})\,,\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\,.$$

3) Es seien A, B und C drei beliebige Punkte. Zeigen Sie auf der Basis der Definition von Vektoraddition und skalarer Multiplikation:
a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = o$,
c) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, d) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

4) Es sei $O = (0, 0, 0)$ der Koordinatenursprung eines fest gewählten Koordinatensystems. Überprüfen Sie die folgenden einfachen, aber nützlichen Beziehungen zwischen Ortsvektoren und formulieren Sie ihre Bedeutung in Worten:
a) $A = (a_1, a_2, a_3) \implies \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$,
c) Ist $v = \overrightarrow{AB}$, so gilt $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + v$ und $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - v$.

5) a) Zeigen Sie, dass für 4 beliebige Punkte A, B, C, D die folgenden Äquivalenzen gelten:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Ein Viereck $ABCD$ mit diesen Eigenschaften heißt *Parallelogramm.*
b) Bestimmen Sie einen vierten Punkt D so, dass er mit den drei Punkten $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$, $C = (4, 1, 2)$ ein Parallelogramm bildet.

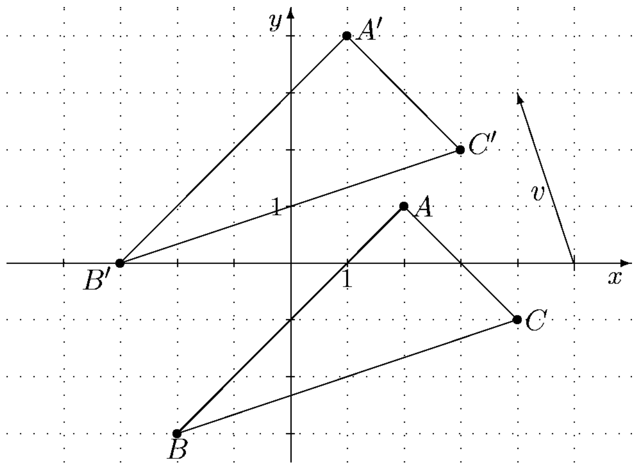
6) a) Zeigen Sie, dass für *beliebige* Punkte die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$$

b) Erläutern Sie an einer geeigneten Skizze, warum der Punkt M *Mittelpunkt* zwischen A und B genannt wird.
c) Welche Bedeutung für Ortsvektoren hat die zweite Eigenschaft in der Äquivalenz von a), wenn man darin für P den Koordinatenursprung O wählt?
d) Berechnen Sie mittels c) die Seitenmitten des Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$ und $C = (4, 1, 2)$.

Übungen (1) — Lösungen

1) Skizze zu a), b):



c) Die Eckpunkte des verschobenen Dreiecks sind charakterisiert durch

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Man muss also die Endpunkte von Pfeilen bestimmen, wenn der Anfangspunkt und der Vektor gegeben sind. Nun gilt (mit den Bezeichnungen $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $A = (a_1, a_2)$ und entsprechend für A'):

$$v = \overrightarrow{AA'} \iff \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' - a_1 \\ a_2' - a_2 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} v_1 &=& a_1' - a_1 \\ \wedge\ v_2 &=& a_2' - a_2 \end{array}.$$

Damit lassen sich die Koordinaten a_i' von A' sofort berechnen:

$$a_1' = a_1 + v_1\,, \quad a_2' = a_2 + v_2\,.$$

Mit den konkret gegebenen Punkten erhält man so

$$A' = (1,4)\,, \quad B' = (-3,0) \quad \text{und} \quad C' = (3,2)\,.$$

d) Man stellt fest

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{A'B'}\,,\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{B'C'} \text{ und } \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{C'A'}\,.$$

Bei Verschiebung ändern sich zwar die Punkte, nicht aber die Vektoren!

2) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = o$ (Nullvektor). (Zu den letzten beiden Gleichungen siehe auch die nächste Aufgabe.)

3) Gemäß der Definition der Vektorsumme gilt $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. Insbesondere gilt dann $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = o$ und damit ist $\overrightarrow{QP}$ der Gegenvektor zu $\overrightarrow{PQ}$: $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.
Daraus ergibt sich dann:
a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = o$.
c) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
d) Hier kann man die beiden Seiten der Behauptung nicht einfacher darstellen; vielmehr formt man die Vektorgleichung unter Verwendung der Rechengesetze für Vektoren *äquivalent* um, z. B. indem man auf beiden Seiten $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ addiert:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ \iff & \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \\ \iff & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist nun tatsächlich wahr (nach Definition der Vektoraddition), also auch die ursprüngliche Behauptung.

4) a) Es gilt (siehe Skript S. 2) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 - 0 \\ a_2 - 0 \\ a_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$. Dies bedeutet, dass die Koordinaten des Ortsvektors mit denen des Punktes übereinstimmen:

$$\boxed{\text{Punkt } A \text{ und Ortsvektor } \overrightarrow{OA} \text{ haben dieselben Koordinaten.}}$$

b) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$. Unter Verwendung von a) bedeutet dies, dass die Koordinaten des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AB}$ die Differenzen der Koordinaten von End- und Anfangspunkt sind:

Die Koordinaten des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AB}$ sind die Differenzen der Koordinaten von Endpunkt B und Anfangspunkt A.

c) Die Behauptungen dieses Aufgabenteils erhält man aus b) durch einfache Äquivalenzumformungen (Addition/Subtraktion eines Vektors auf beiden Seiten der Gleichung):

$$v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \iff v + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \iff \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - v\,.$$

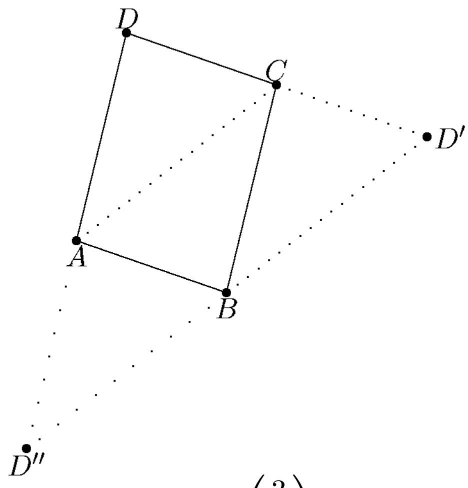
Man erhält also die Koordinaten des Endpunktes B, indem man die Koordinaten des Verbindungsvektors $v = \overrightarrow{AB}$ zu den Koordinaten des Anfangspunktes A addiert.
Und entsprechend erhält man die Koordinaten des Anfangspunktes A, indem man die Koordinaten des Verbindungsvektors v von den Koordinaten des Endpunktes B subtrahiert.

5) a) Es gilt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, womit die erste Äquivalenz bewiesen ist. Weiter gilt

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}\,.$$

Anmerkung: Wir werden noch sehen, dass die hier gewählte vektorielle Charakterisierung von Parallelogrammen mit der üblichen geometrischen gleichwertig ist, die besagt: *Ein Parallelogramm ist ein Viereck $ABCD$ mit zwei Paaren paralleler Seiten.*

b) Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten für die Wahl von D, je nachdem welchem der drei Punkte A, B, C er in dem entstehenden Parallelogramm gegenüberliegen soll. Wenn D der dem Punkt B gegenüberliegende vierte Punkt eines Parallelogramms $ABCD$ sein soll, muss gelten



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\,.$$

Für die Ortsvektoren der vier Punkte muss dann gelten

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $D = (3, 2, 3)$. Die anderen Möglichkeiten wären $D' = (5, 0, 1)$ (gegenüber von A) und $D'' = (1, 0, -3)$ (gegenüber von C).

6) a) beweist man durch geeignete Äquivalenzumformungen (Addition desselben Vektors auf beiden Seiten einer Gleichung oder skalare Multiplikation beider Seiten mit derselben Zahl $r \neq 0$):

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \iff \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$$
$$\iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} = (1 - \frac{1}{2})\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

b) Die erste Eigenschaft $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ bedeutet, dass der Punkt M auf halbem Wege zwischen A und B liegt, also der *Mittelpunkt* zwischen A und B ist.
c) Wählt man in der zweiten Eigenschaft P speziell als Koordinatenursprung O, so erhält man die folgende Beziehung zwischen den Ortsvektoren von A, B und M:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\,.$$

Dies bedeutet, dass der Ortsvektor $\overrightarrow{OM}$ des Mittelpunktes M zwischen A und B das arithmetische Mittel der Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ von A und B ist. Dies beinhaltet eine sehr einfache Methode zur Berechnung des Mittelpunktes M_{AB} zwischen zwei Punkten A, B:

Man erhält die Koordinaten des Mittelpunktes M_{AB} von A und B, indem man die Koordinaten von A und B addiert und die Summe dann halbiert.

d) Seien A', B', C' die dem jeweiligen Eckpunkt gegenüberliegenden Seitenmittelpunkte. Unter Verwendung der eben formulierten Regel berechnet man die Koordinaten der Mittelpunkte wie folgt:

$$A' = (\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad B' = (3, 1, 1), \quad C' = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\,.$$

5L2 Mathematik (Kg) **21. August 2001**

Übungen (2)

1) a) Geben Sie für jede der folgenden Mengen U_i einen Vektorraum V an, in dem U enthalten ist.
b) Welche der Mengen U_i sind Untervektorräume des entsprechenden V? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Bestimmen Sie – wenn möglich – erzeugende Vektoren für die Unterräume U_i.

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -r \\ 2r \\ -\frac{r}{2} \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}, \qquad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

$$U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}, \qquad U_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$U_5 = \left\{ \begin{pmatrix} r-s & 0 \\ s+t & r+t \end{pmatrix} \mid r, s, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_6 = \left\{ \begin{pmatrix} t-r \\ s-t \\ r-s \end{pmatrix} \mid r, s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$U_7 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

2) Überprüfen Sie für die folgenden Vektoren bzw. Matrizen, zu welchem Unterraum U_i sie gehören und zu welchem nicht.

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Lehrbuch S. 50, Aufgaben 4–10
(Anm.: Statt *u ist eine Linearkombination von $v_1, \dots, v_k$* benutzt das Buch die Formulierung: *u lässt sich aus $v_1, \dots, v_k$ linear erzeugen.*)

4) Stellen Sie – wenn möglich – jeden der drei Vektoren als Linearkombination der beiden übrigen dar. Welche der angegebenen Tripel von Vektoren sind linear unabhängig?
a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

5) Entscheiden Sie, ob die Vektoren linear abhängig sind oder nicht.
a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix}$

Übungen (2) — Lösungen

1) a) Die Mengen U_4 und U_5 sind Teilmengen des Vektorraumes $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller 2×2-Matrizen, die übrigen Mengen U_i sind Teilmengen des $\mathbb{R}^3$.

b) Nur U_3 ist kein Unterraum, denn: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_3$, aber $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U_3$.

Damit ist U_3 nicht gegen skalare Multiplikation abgeschlossen.

Man kann für die anderen U_i jeweils die 3 Unterraumkriterien nachprüfen, z. B. für U_4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U_4 \quad (a = b = 0)\,,$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & a+a' \end{pmatrix} \in U_4$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & \lambda a \end{pmatrix} \in U_4$$

Damit gehört die Nullmatrix zu U_4 und U_4 ist gegenüber Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen.

Genauso kann man bei allen anderen U_i (außer U_3) vorgehen.

c) Oder man beweist direkt, dass sich alle U_i $(i \neq 3)$ als Mengen von Linearkombinationen darstellen lassen.

$$U_1: \quad \begin{pmatrix} -r \\ 2r \\ -\frac{r}{2} \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$U_2: \quad \begin{pmatrix} 3a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$U_4: \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_5: \quad \begin{pmatrix} r-s & 0 \\ s+t & r+t \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_6: \quad \begin{pmatrix} t-r \\ s-t \\ r-s \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$U_7: \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also

$$U_1 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$U_2 = I\!\!R \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$U_4 = I\!\!R \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + I\!\!R \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_5 = I\!\!R \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + I\!\!R \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + I\!\!R \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_6 = I\!\!R \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + I\!\!R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + I\!\!R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$U_7 = I\!\!R^3 = I\!\!R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + I\!\!R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + I\!\!R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit werden U_1 und U_2 jeweils von *einem* Vektor erzeugt, U_4 von zwei und die übrigen von jeweils 3 Vektoren.
Zusatz: U_5 und U_6 lassen sich bereits durch 2 der drei Vektoren erzeugen. Warum? Gilt dies auch für U_7?

2) u gehört zu U_1 $(r = -4)$ und natürlich zu $U_7 = I\!\!R^3$, aber zu keinem der anderen Unterräume. Der Nachweis für $u \notin U_6$ führt auf ein lineares Gleichungssystem mit 3 Unbekannten (r, s, t). Man kann die Untersuchung vereinfachen, indem man bemerkt $(t - r) + (s - t) + (r - s) = 0$, also muss bei Vektoren in U_6 die Summe der Koordinaten 0 ergeben. Dies ist für u (und auch w) nicht der Fall.
Die weiteren Ergebnisse sind in folgender Tabelle enthalten:

	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
u	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
v	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
w	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
A	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
B	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$

Hier noch die Parameterwerte zum Nachweis von $v \in U_6$ $(t = 3,\ s = 7,\ r = 0)$, $w \in U_3$ $(a = -\frac{1}{3})$, $B \in U_5$ $(r = 3,\ s = t = 0)$.
Warnung: Bei U_5 und U_6 sind diese Parameterwerte nicht eindeutig bestimmt. Was bedeutet das für die angegebenen Erzeugenden?

3) S. 50, Nr. 4:

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \implies r = 3 \wedge r = \frac{9}{-3} = -3$, Widerspruch. Genauso für die umgekehrte Darstellung des ersten Vektors durch den zweiten.

b) $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \implies r = -2 \wedge r = -\frac{7}{5}$, Widerspruch. Genauso argumentiert man für die umgekehrte Darstellung.

c) Vielfache des ersten Vektors müssen als dritte Koordinate 0 haben, und umgekehrt: Der erste Vektor kann (wieder wegen der 0 in der dritten Koordinate) allenfalls des 0-fache des zweiten Vektors sein, was aber nicht der Fall ist.

d) Der zweite Vektor ist allenfalls das $-\sqrt{2}$-fache des ersten (siehe letzte Koordinate), aber die mittlere Koordinate erfüllt diese Beziehung nicht: $\sqrt{6} \neq (-\sqrt{2}) \cdot (-3)$! Genauso schließt man umgekehrt: Die Vektoren unter d) sind keine Vielfachen voneinander.

S. 50, Nr. 5:

a) Die Frage dieser Aufgabe führt auf lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten:

$$\begin{aligned}\vec{b} = r\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 &\iff \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &\iff 1 = -r + 3s \ \wedge \ -4 = 2r - 2s \\ &\iff r = 3s - 1 \ \wedge \ -4 = 2(3s-1) - 2s = 4s - 2 \\ &\iff s = -\frac{1}{2} \ \wedge \ r = -\frac{5}{2}\,.\end{aligned}$$

Also gilt $\vec{b} = -\frac{5}{2}\vec{a}_1 - \frac{1}{2}\vec{a}_2$. Genauso findet man weiteren Ergebnisse:

$$\vec{b} = -\frac{7}{5}\vec{a}_1 - \frac{2}{5}\vec{a}_3\,, \quad \vec{b} = \frac{7}{11}\vec{a}_2 - \frac{10}{11}\vec{a}_3\,.$$

b) löst man, indem man eine die obigen Darstellungen für $\vec{b}$ nach den gewünschten Vektoren auflöst:

$$\vec{b} = -\frac{5}{2}\vec{a}_1 - \frac{1}{2}\vec{a}_2 \iff \vec{a}_2 = -5\vec{a}_1 - 2\vec{b}\,,$$

womit $\vec{a}_2$ eine Linearkombination bereits von a_1, b und dann erst recht von a_1, a_3, b ist. Genauso argumentiert man für die weitere Behauptung:

$$\vec{b} = -\frac{7}{5}\vec{a}_1 - \frac{2}{5}\vec{a}_3 \iff a_3 = -\frac{7}{2}\vec{a}_1 - \frac{5}{2}\vec{b}\,.$$

Warnung: Je nach Umformung kann man sehr unterschiedliche Darstellungen finden.

S. 50, Nr. 6:

Es gilt (vgl. S. 43) $\vec{b} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2$. Löst man diese Vektorgleichung nach $\vec{a}_2$ auf, erhält man die gewünschte Darstellung:

$$\vec{b} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 \iff a_2 = 2 \cdot \vec{a}_1 - \vec{b}\,.$$

S. 50, Nr. 7:

a) $\vec{b} = -5\vec{a}_1 - 7\vec{a}_2$, b) $\vec{b} = 4\vec{a}_1 - 5\vec{a}_2$,

c) $\vec{b} = -2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, d) $\vec{b} = 3\vec{a}_1 - 4\vec{a}_2$.

S. 50, Nr. 8:

Es gilt $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$, denn:

$$\begin{aligned}&\vec{b}_1 = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + r_3\vec{a}_3 \iff -4 = r_1 + r_2 - 2r_3 \ \wedge \ 4 = 2r_1 + r_3 \ \wedge \ 0 = -r_1 - r_2 \\ &\iff r_2 = -r_1 \ \wedge \ r_3 = 4 - 2r_1 \ \wedge \ -4 = r_1 - r_1 - 2(4 - 2r_1) = 4r_1 - 8 \\ &\iff r_1 = 1 \ \wedge \ r_2 = -1 \ \wedge \ r_3 = 2\,.\end{aligned}$$

Entsprechend erhält man $\vec{b}_2 = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

S. 50, Nr. 9:

a) $\vec{b} = \vec{a}_1 + 3\vec{a}_3 = -\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$,

b) $\vec{b} = -2\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_3 = -\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2$.

S. 50, Nr. 10:

Unter den obigen Darstellungen für $\vec{b}$ befinden sich auch solche durch jeweils nur 2 der Vektoren $\vec{a}_i$. Diese Darstellungen müssen eindeutig sein, da die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ keine Vielfachen voneinander, also linear unabhängig sind.

4) Wir bezeichnen die Vektoren jeweils als u_1, u_2, u_3. Dann gilt:

a) Die drei Vektoren sind linear abhängig, denn es gilt $u_1 - u_2 + u_3 = o$. Diese Relation kann man nun nach jedem der drei Vektoren auflösen und erhält so eine Darstellung eines jeden Vektors durch die anderen beiden.

b) Es gilt $4u_1 + u_2 - 3u_3 = o$, also sind die drei Vektoren linear abhängig. Wieder erhält man aus dieser Relation eine Darstellung jedes Vektors durch die beiden übrigen.

c) Offenbar sind u_1 und u_2 Vielfache voneinander: $u_1 = -2u_2$. Dagegen lässt sich u_3 nicht als Linearkombination von u_1, u_2 darstellen:

$$u_3 = ru_1 + su_2 = -2ru_2 + su_2 = (-2r + s)u_2$$

aber $u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ ist kein Vielfaches von $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5) Linear abhängig sind a), b), d), f) und h):

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$,

f) $3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, h) $7\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alle anderen sind linear unabhängig.

Übungen (3)

1) Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC.
a) Bestimmen Sie allgemein den Schnittpunkt zweier Seitenhalbierender.
[Ergebnis: Der Schnittpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2 : 1$, wobei die längere Seite beim Eckpunkt liegt.]
b) Folgern Sie, dass sich in einem beliebigen Dreieck alle *drei* Seitenhalbierenden in demselben Punkt schneiden. Dies ist der sog. *Schwerpunkt S* des Dreiecks.
c) Zeigen Sie, dass für den Schwerpunkt S (und jeden beliebigen Punkt O) die folgende Berechnungsformel gilt

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\,.$$

2) a) Zeigen Sie, dass ein Viereck $ABCD$ mit 2 Paaren paralleler Seiten ein Parallelogramm ist (Definition siehe Übung (1), Aufgabe 5).
b) Zeigen Sie, dass sich die Diagonalen eines beliebigen Parallelogramms gegenseitig halbieren.
c) Zeigen Sie, dass ein Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen sich gegenseitig halbieren, ein Parallelogramm sein muss.

3) Ein *Trapez* ist ein ebenes Viereck mit *einem* Paar paralleler Seiten. Sei $ABCD$ ein solches Trapez, wobei $\overrightarrow{DC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ sei. (Welche geometrische Bedeutung hat k?)
a) In welchem Verhältnis teilt der Diagonalenschnittpunkt die beiden Diagonalen?
b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis am Spezialfall $k = 1$. (Was bedeutet dieser geometrisch?)

4) Gegeben sei ein beliebiges Tetraeder $ABCD$. Unter einer *Schwerelinie* eines Tetraeders versteht man eine Gerade durch eine Ecke und den Schwerpunkt des gegenüberliegenden Dreiecks.
a) Bestimmen Sie allgemein den Schnittpunkt zweier Schwerelinien.
[Ergebnis: Der Schnittpunkt zweier Schwerelinien teilt diese im Verhältnis $3 : 1$.]
b) Folgern Sie, dass sich alle vier Schwerelinien in einem einzigen Punkt schneiden, dem sog. *Schwerpunkt S* des Tetraeders.
c) Zeigen Sie, dass für diesen Schwerpunkt S (und jeden beliebigen Punkt O) gilt:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})\,.$$

5) Gegeben ist ein beliebiges Tetraeder $ABCD$.
a) Verbindet man die Mittelpunkte einander *gegenüberliegender* (d. h. sich nicht schneidender) Kanten (also M_{AB} mit M_{CD}, M_{AC} mit M_{BD} und M_{AD} mit M_{BC}), so schneiden sich diese Geraden in einem einzigen Punkt. Welcher ist es?
b) Zeigen Sie, dass die *benachbarten* Kantenmittelpunkte M_{AB}, M_{BC}, M_{CD}, M_{DA} ein Parallelogramm bilden und daher in einer Ebene liegen. Für welche anderen 4 benachbarten Kantenmittelpunkte gilt dies ebenso?

Übungen (3) — Lösungen

1) Da ABC ein Dreieck ist, sind die drei Punkte nicht *kollinear* (d. h. sie liegen nicht alle auf einer Geraden). Dies bedeutet, dass die Vektoren $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ linear unabhängig sind. Wir wählen als affines Koordinatensystem der Ebene, in der ABC (und alle gesuchten Punkte) liegen, den *Ausgangspunkt* A und die linear unabhängigen *Richtungsvektoren* u, v.

a) Wir untersuchen die Seitenhalbierenden $g(A, M_{BC})$ und $g(B, M_{AC})$. Dazu stellen wir zunächst Bedingungen dafür auf, dass ein Punkt X zu diesen Geraden gehört:

$$X \in g(A, M_{BC}) \iff \overrightarrow{AX} = r \cdot \overrightarrow{AM_{BC}} \qquad \text{für ein } r \in \mathbb{R}\,.$$
$$X \in g(B, M_{AC}) \iff \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BM_{AC}} \quad \text{für ein } s \in \mathbb{R}\,.$$

Als nächsten Schritt stelle man in diesen Parameterdarstellungen die rechten Seiten als *Linearkombinationen* der zugrundegelegten linear unabhängigen Vektoren u, v dar. Dabei orientiere man sich an einer kleinen Skizze.

$$\begin{aligned} X \in g(A, M_{BC}) \iff \overrightarrow{AX} &= r\overrightarrow{AM_{BC}} = r(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) \\ &= r\big(u + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\big) = r\big(u + \frac{1}{2}(-u+v)\big) \\ &= \frac{r}{2} \cdot u + \frac{r}{2} \cdot v\,. \\ X \in g(B, M_{AC}) \iff \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BM_{AC}} = u + s(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}) \\ &= u + s(-u + \frac{1}{2}v) = (1-s) \cdot u + \frac{s}{2} \cdot v\,. \end{aligned}$$

Nun ist der gesuchte Schnittpunkt dadurch charakterisiert, dass er zu *beiden* Geraden gehört, also *beide* obigen Darstellungen für $\overrightarrow{AX}$ gelten. Dies ergibt die folgende Vektorgleichung:

$$X \in g(A, M_{BC}) \cap g(B, M_{AC}) \iff \overrightarrow{AX} = \frac{r}{2} \cdot u + \frac{r}{2} \cdot v = (1-s) \cdot u + \frac{s}{2} \cdot v \quad (r, s \in \mathbb{R}).$$

Da u, v linear unabhängig sind, kann man in dieser Vektorgleichung nun *Koeffizientenvergleich* durchführen und erhält das folgende lineare Gleichungssystem für r, s:

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} = 1 - s \\ \frac{r}{2} = \frac{s}{2} \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} r = s \\ \frac{r}{2} = 1 - r \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} r = s \\ r = \frac{2}{3} \end{bmatrix} \iff r = s = \frac{2}{3}\,.$$

Dies bedeutet, dass sich die beiden Seitenhalbierenden in einem Punkt S schneiden, und dass dieser beide Seitenhalbierende im Verhältnis $\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$ teilt. Der größere Abschnitt liegt dabei auf Seiten der jeweiligen Ecke.

b) Da die Überlegungen von a) für *jedes* beliebige Dreieck und je zwei ebenfalls beliebige Seitenhalbierende darin gelten, muss auch die dritte Seitenhalbierende die anderen im genannten Verhältnis teilen, also in demselben Punkt S schneiden: Alle

drei Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt.
c) Den Schnittpunkt S erhält man, indem man einen der gefundenen Parameterwerte in die zugehörige Parameterdarstellung einsetzt:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2/3}{2} \cdot u + \frac{2/3}{2} \cdot v = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\,.$$

Dies formt man wie folgt zum gewünschten Ergebnis um:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ \Longleftrightarrow\ & \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(3 \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ \Longleftrightarrow\ & \overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\,. \end{aligned}$$

2) a) Da $ABCD$ ein Viereck bilden, können keine drei Punkte auf auf einer Geraden liegen, also müssen die Vektoren $u = \overrightarrow{AB}$ und $v = \overrightarrow{AC}$ unterschiedliche Richtung haben: sie sind linear unabhängig.
Wegen der Parallelität der Seiten gilt $\overrightarrow{DC} = r.\overrightarrow{AB} = r.u$ und $\overrightarrow{BC} = s.\overrightarrow{AD} = s.v$ mit geeigneten Koeffizienten $r, s \in \mathbb{R}$. Wir erhalten daraus 2 verschiedene Darstellungen für eine der Diagonalen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = u + s.v\,, \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = v + r.u = r.u + v\,. \end{aligned}$$

Da u, v linear unabhängig sind, folgt daraus durch Koeffizientenvergleich $1 = r$ (Koeffizienten von u) und $s = 1$ (Koeffizienten von v). Dies bedeutet aber gerade $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$: $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
b) Sei $ABCD$ das Parallelogramm. Das bedeutet, dass keine drei der vier Punkte auf einer Geraden liegen und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ sowie $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ ist. Wieder sind die Vektoren $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AD}$ linear unabhängig.
Wir stellen zunächst Parameterdarstellungen für die beiden Diagonalen auf:

$$\begin{aligned} X \in g(A,C) &\iff \overrightarrow{AX} = r \cdot \overrightarrow{AC} && \text{für ein } r \in \mathbb{R}\,, \\ X \in g(B,D) &\iff \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD} && \text{für ein } s \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Wir stellen die rechten Seiten als Linearkombinationen von u, v dar:

$$\begin{aligned} X \in g(A,C) &\iff \overrightarrow{AX} = r \cdot \overrightarrow{AC} = r \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = r \cdot u + r \cdot v\,, \\ X \in g(B,D) &\iff \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD} = u + s \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ & \qquad\qquad = u + s \cdot (-u + v) = (1-s) \cdot u + s \cdot v\,. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Schnittpunkts beider Diagonalen lösen wir die durch Vergleich beider Parameterdarstellungen entstehende Vektorgleichung mittels Koeffizientenvergleich (u, v sind linear unabhängig!):

$$r \cdot u + r \cdot v = (1-s) \cdot u + s \cdot v \iff \begin{bmatrix} r & = & 1-s \\ r & = & s \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} r & = & s \\ r & = & 1-r \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} r & = & s \\ 2r & = & 1 \end{bmatrix} \iff r = s = \frac{1}{2}\,.$$

Dies bedeutet, dass sich beide Diagonalen schneiden, und zwar im (gemeinsamen) Mittelpunkt beider Diagonalen.

c) Sei $ABCD$ das Viereck und S der Diagonalenschnittpunkt. Nach Voraussetzung ist er der Mittelpunkt beider Diagonalen, d. h. $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Letzteres ergibt $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Vergleicht man beide Darstellungen für $\overrightarrow{AS}$ so erhält man

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\,.$$

Damit gilt $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ und dies ist nach Übung (1), Aufgabe 5 eine der Charakterisierungen von Parallelogrammen.

3) Die Gleichung $\overrightarrow{DC} = k\cdot\overrightarrow{AB}$ zeigt zunächst an, dass das Paar paralleler Seiten durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ gegeben ist. k gibt dabei das Längenverhältnis von $\overrightarrow{DC}$ zu $\overrightarrow{AB}$ an.

a) Wir wählen als affines Koordinatensystem den Punkt A mit den linear unabhängigen Richtungsvektoren $u = \overrightarrow{AB}$ und $v = \overrightarrow{AD}$. Als Parameterdarstellungen der beiden Diagonalen erhalten wir

$$\begin{aligned} X \in g(A,C) &\iff \overrightarrow{AX} = r\cdot\overrightarrow{AC} && \text{für ein } r \in \mathbb{R}\,,\\ X \in g(B,D) &\iff \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{BD} && \text{für ein } s \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Wir stellen die rechten Seiten als Linearkombinationen von u, v dar:

$$\begin{aligned} X \in g(A,C) \iff \overrightarrow{AX} &= r\cdot\overrightarrow{AC} = r\cdot(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})\\ &= r(v + k\cdot u) = kr\cdot u + r\cdot v\,,\\ X \in g(B,D) \iff \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{BD} = u + s\cdot(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})\\ &= u + s\cdot(-u+v) = (1-s)\cdot u + s\cdot v\,. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Schnittpunkts beider Diagonalen lösen wir die durch Vergleich beider Parameterdarstellungen entstehende Vektorgleichung mittels Koeffizientenvergleich (u, v sind linear unabhängig!):

$$kr\cdot u + r\cdot v = (1-s)\cdot u + s\cdot v \iff \begin{bmatrix} kr & = & 1-s\\ r & = & s \end{bmatrix}$$
$$\iff \begin{bmatrix} kr & = & 1-r\\ r & = & s \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} (k+1)r & = & 1\\ r & = & s \end{bmatrix} \iff r = s = \frac{1}{k+1}\,.$$

Die Diagonalen schneiden sich also in einem Punkt, der beide Diagonalen in demselben Verhältnis teilt, nämlich im Verhältnis $\frac{1}{k+1} : \frac{k}{k+1} = 1 : k$. Dies ist dasselbe Verhältnis wie das der parallelen Trapezseiten zueinander!

In einem Trapez teilt der Diagonalenschnittpunkt die Diagonalen in dem Verhältnis, in dem auch die angrenzenden parallelen Seiten zueinander stehen.

b) Im Spezialfall $k = 1$ ist das Trapez ein Parallelogramm und die Diagonalen teilen sich im Verhältnis $1 : k = 1 : 1$, d. h. sie halbieren sich.

4) Die vier Punkte $ABCD$ bilden ein Tetraeder, d. h. sie liegen nicht in einer Ebene. Also sind die Vektoren $u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{AC}, w = \overrightarrow{AD}$ linear unabhängig. Wir wählen als affines Koordinatensystem für diese (räumliche) Problemstellung den Punkt A mit diesen drei Vektoren.

a) Es bezeichne allgemein S_{ABC} den Schwerpunkt eines Dreiecks ABC. Dann können wir nun zunächst die Parameterdarstellungen zweier Schwerelinien des Tetraeders aufstellen:

$$\begin{aligned} X \in g(A, S_{BCD}) &\iff \overrightarrow{AX} = r \cdot \overrightarrow{AS_{BCD}} && \text{für ein } r \in \mathbb{R}, \\ X \in g(B, S_{ACD}) &\iff \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BS_{ACD}} && \text{für ein } s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Um nun die rechten Seiten als Linearkombinationen der drei Vektoren u, v, w darzustellen, müssen wir die Richtungsvektoren der Geraden $\overrightarrow{AS_{BCD}}$ und $\overrightarrow{BS_{ACD}}$ so darstellen. Wir benutzen dazu das Ergebnis aus Aufgabe 1). Dieses beschreibt den Verbindungsvektor von einem *beliebigen* Punkt (dort O genannt) zum Schwerpunkt eines *beliebigen* Dreiecks (dort ABC) als *arithmetisches Mittel* der Verbindungsvektoren von demselben Punkt zu den drei Eckpunkten. Angewendet auf $\overrightarrow{AS_{BCD}}$ ergibt sich (A als Ausgangspunkt, BCD als Dreieck):

$$\overrightarrow{AS_{BCD}} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}),$$

und entsprechend

$$\overrightarrow{BS_{ACD}} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}).$$

Nun können wir die Parameterdarstellungen mittels der Vektoren des affinen Koordinatensystems ausdrücken:

$$\begin{aligned} X \in g(A, S_{BCD}) \iff \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AS_{BCD}} = r \cdot \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{r}{3} \cdot (u + v + w) = \frac{r}{3} \cdot u + \frac{r}{3} \cdot v + \frac{r}{3} \cdot w, \\ X \in g(B, S_{ACD}) \iff \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BS_{ACD}} = u + s \cdot \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) \\ &= u + \frac{s}{3} \cdot \big(\overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})\big) \\ &= u + \frac{s}{3} \cdot (-3u + v + w) = (1 - s) \cdot u + \frac{s}{3} \cdot v + \frac{s}{3} \cdot w. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir unmittelbar $r = s$ und

$$\frac{r}{3} = 1 - s = 1 - r \iff \frac{4}{3} \cdot r = 1 \iff r = \frac{3}{4}.$$

Aus $r = s = \frac{3}{4}$ entnehmen wir, dass sich die beiden Schwerelinien in einem Punkt schneiden, und dass dieser *beide* Schwerelinien in demselben Verhältnis $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3 : 1$ teilt. Dabei liegt der längere Abschnitt auf Seiten der Ecke des Tetraeders.

b) Da das Ergebnis von a) unabhängig vom Tetraeder und den Schwerelinien immer dasselbe ist, müssen auch die anderen Schwerelinien die erste in dem genannten

Verhältnis teilen, also in *demselben* Punkt S schneiden.
c) Gemäß a) gilt für den Schwerpunkt S des Tetraeders

$$\overrightarrow{AS} = \frac{3/4}{3} \cdot (u + v + w) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) .$$

Wie in Aufgabe 1) kann man dies äquivalent umformen (man addiere auf beiden Seiten den Vektor $\overrightarrow{OA}$) zu

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) .$$

Der Verbindungsvektor von einem beliebigen Punkt O zum Schwerpunkt eines Tetraeders ist das arithmetische Mittel der Verbindungsvektoren von diesem Punkt zu den 4 Eckpunkten des Tetraeders.

5) Wir wählen als affines Koordinatensystem wieder den Punkt A sowie die drei linear unabhängigen Vektoren $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$, $w = \overrightarrow{AD}$.
a) Wir berechnen den Schnittpunkt zweier dieser Verbindungslinien einander gegenüberliegender Kantenmittelpunkte.

$$\begin{aligned} X \in g(M_{AB}, M_{CD}) &\iff \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AM_{AB}} + r \cdot \overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} \quad \text{für ein } r \in \mathbb{R}, \\ X \in g(M_{AC}, M_{BD}) &\iff \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AM_{AC}} + s \cdot \overrightarrow{M_{AC}M_{BD}} \quad \text{für ein } s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst die beiden Verbindungsvektoren der Mittelpunkte als Linearkombinationen von u, v, w. Wir benutzen dabei die Formel zur Berechnung von Mittelpunkten

$$\overrightarrow{OM_{AB}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) ,$$

die für beliebige Punkte O, A, B gilt. (Siehe Übungen (1), Aufgabe 6. Beachten Sie die Analogie mit der Berechnungsformel für die Schwerpunkte von Dreieck und Tetraeder! Der Mittelpunkt zwischen zwei Punkten ist im Grunde nichts anderes als der Schwerpunkt der Verbindungsstrecke.)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} &= \overrightarrow{M_{AB}A} + \overrightarrow{AM_{CD}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w . \\ \overrightarrow{M_{AC}M_{BD}} &= \overrightarrow{M_{AC}A} + \overrightarrow{AM_{BD}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w . \end{aligned}$$

Damit lauten die Parameterdarstellungen der beiden Verbindungsgeraden

$$\begin{aligned} X \in g(M_{AB}, M_{CD}) \iff \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AM_{AB}} + r \cdot \overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot u + r \cdot (-\frac{1}{2} \cdot u + \frac{1}{2} \cdot v + \frac{1}{2} \cdot w) \\ &= \frac{1-r}{2} \cdot u + \frac{r}{2} \cdot v + \frac{r}{2} \cdot w \\ X \in g(M_{AC}, M_{BD}) \iff \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AM_{AC}} + s \cdot \overrightarrow{M_{AC}M_{BD}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot v + s \cdot (\frac{1}{2} \cdot u - \frac{1}{2} \cdot v + \frac{1}{2} \cdot w) \\ &= \frac{s}{2} \cdot u + \frac{1-s}{2} \cdot v + \frac{s}{2} \cdot w \end{aligned}$$

Wir berechnen nun den Schnittpunkt dieser beiden Geraden:

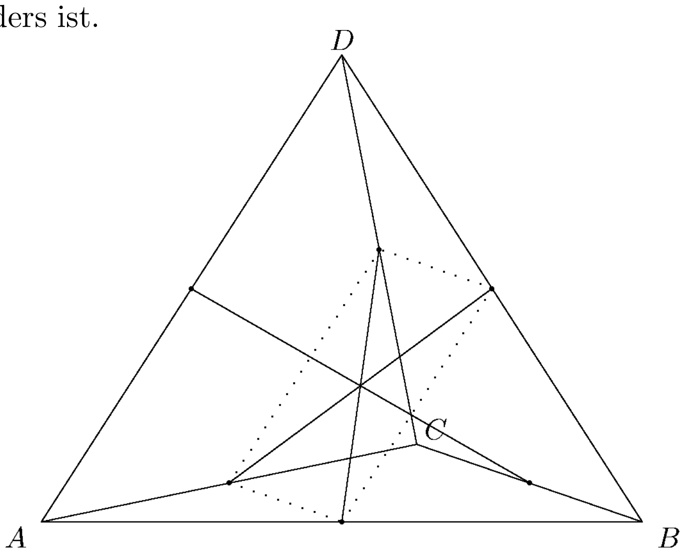
$$\frac{1-r}{2}\cdot u+\frac{r}{2}\cdot v+\frac{r}{2}\cdot w=\frac{s}{2}\cdot u+\frac{1-s}{2}\cdot v+\frac{s}{2}\cdot w$$
$$\iff \begin{bmatrix} 1-r & = & s \\ r & = & 1-s \\ r & = & s \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1-r & = & r \\ r & = & s \end{bmatrix} \iff r=s=\frac{1}{2}$$

Da diese Werte unabhängig vom Tetraeder und den gewählten gegenüberliegenden Kantenmittelpunkten sind, folgt wieder, dass auch die dritte Verbindungsgerade durch denselben Schnittpunkt S verlaufen muss. Für den Schnittpunkt erhält man aus $r=1/2$:

$$\overrightarrow{AS}=\frac{1/2}{2}\cdot u+\frac{1/2}{2}\cdot v+\frac{1/2}{2}\cdot w=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\,.$$

Der Vergleich mit der vorangehenden Aufgabe zeigt, dass S der Schwerpunkt des Tetraeders ist.

Skizze:



b) Es ist

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}}=\overrightarrow{M_{AB}B}+\overrightarrow{BM_{BC}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,.$$

Genauso berechnet man $\overrightarrow{M_{DA}M_{CD}}=\overrightarrow{M_{AD}M_{DC}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ und stellt die Übereinstimmung fest: $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ ist ein Parallelogramm. Dabei sind die Mittelpunkte der Reihe nach entsprechend der Reihenfolge $ABCD$ gebildet. Die bisherigen Überlegungen gelten für *jede* Reihenfolge der 4 Punkte: $ABDC$, $ACBD$. (Es gibt noch drei weitere Anordnungen der 4 Punkte $ACDB$, $ADBC$ und $ADCB$, die aber zu keinem neuen Parallelogramm führen.)
In obiger Skizze ist eines der 3 Parallelogramme skizziert. Die in a) betrachteten Verbindungsgeraden *gegenüberliegender* Kantenmitten sind gerade die Diagonalen dieser Parallelogramme, die sich bekanntlich gegenseitig halbieren (daher in a) $r=s=1/2$). Nach a) ist der Tetraederschwerpunkt der Diagonalenschnittpunkte aller drei Parallelogramme.

Übungen (4)

1) Wir betrachten die Gerade g durch den Punkt $A = (-2, 2, 0)$ mit dem Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Punkte auf der Geraden g liegen: $P = (32, 19, -17)$, $Q = (-18, -7, 9)$, $R = (8, 7, -5)$.

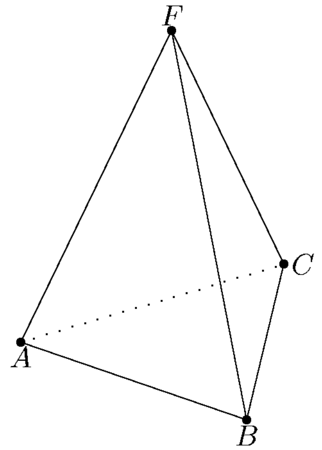
Seien im Folgenden $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$, $C = (4, 1, 2)$ sowie $D = (3, 2, 3)$, $E = (-1, 2, 1)$, $F = (0, 1, 2)$.

2) a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene $e(A, B, C)$ durch die Punkte A, B, C an.
b) Stellen Sie fest, welche der Punkte D, E, F in der Ebene $e(A, B, C)$ liegen.

3) a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene e', die durch den Punkt E verläuft und *parallel* zur Ebene $e(A, B, C)$ ist.
b) Untersuchen Sie, ob die Gerade $g(C, F)$ die Ebene e' schneidet, und wenn ja, in welchem Punkt.

4) Gesucht ist der Durchschnitt der Ebene $e = e(A, B, C)$ mit der Ebene $e'' = e(C, E, F)$.
a) Welches Ergebnis erwarten Sie aufgrund Ihrer geometrischen Anschauung?
b) Reduzieren Sie das Problem auf ein lineares Gleichungssystem. Wieviele Gleichungen und wieviele Unbekannte umfasst es?
c) Wieviele Lösungen erwarten Sie für dieses Gleichungssystem aufgrund Ihrer Antwort zu a)?

5) Wir betrachten das Tetraeder $ABCF$.
a) Warum bilden diese 4 Punkte ein Tetraeder?
b) Wir 'zersägen' das Tetraeder längs der in Aufgabe 3 a) gegebenen Ebene e'. Gesucht sind die dadurch entstehenden neuen Eckpunkte A', B', C'. Erläutern Sie einen Ansatz für dieses Problem und reduzieren Sie es auf lineare Gleichungssysteme. Wieviele Gleichungen und wieviele Unbekannte umfasst dieses?



Übungen (4) — Lösungen

1)

$$\overrightarrow{AP} = rv \iff \begin{pmatrix} 34 \\ 17 \\ -17 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rrcr} & 34 & = & 2r \\ \wedge & 17 & = & r \\ \wedge & -17 & = & -r \end{array} \iff r = 17\,,$$

also liegt P auf g. Genauso zeigt man, dass R zu g gehört: $\overrightarrow{AR} = 5v$. Für Q hingegen erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcr} & -16 & = & 2r \\ \wedge & -9 & = & r\ , \\ \wedge & 9 & = & -r \end{array}$$

welches offenbar unlösbar ist: Q liegt nicht auf der Geraden g.

2) a) Eine Parameterdarstellung für die Ebene durch drei gegebene Punkte A, B, C erhält man durch

$$X \in e(A,B,C) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \text{ für geeignete } r, s \in \mathbb{R}\,.$$

In unserem konkreten Fall also

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

b) Um zu überprüfen, ob ein Punkt (etwa E) in dieser Ebene liegt, muss man untersuchen, ob sein Ortsvektor sich in der Form $(*)$ darstellen lässt, d. h. ob die Gleichung

$$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

(mindestens) eine Lösung (r, s) hat. Die Vektorgleichung $(**)$ ist ein lineares Gleichungssystem von 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten (r, s):

$$\left[\begin{array}{rcrcr} r & + & 2\,s & = & -3 \\ -\,r & & & = & 1 \\ -\,r & + & 2\,s & = & 1 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{rcrcr} r & & & = & -1 \\ -\,1 & + & 2\,s & = & -3 \\ 1 & + & 2\,s & = & 1 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{rcr} r & = & -1 \\ 2\,s & = & -2 \\ 2\,s & = & 0 \end{array}\right]$$

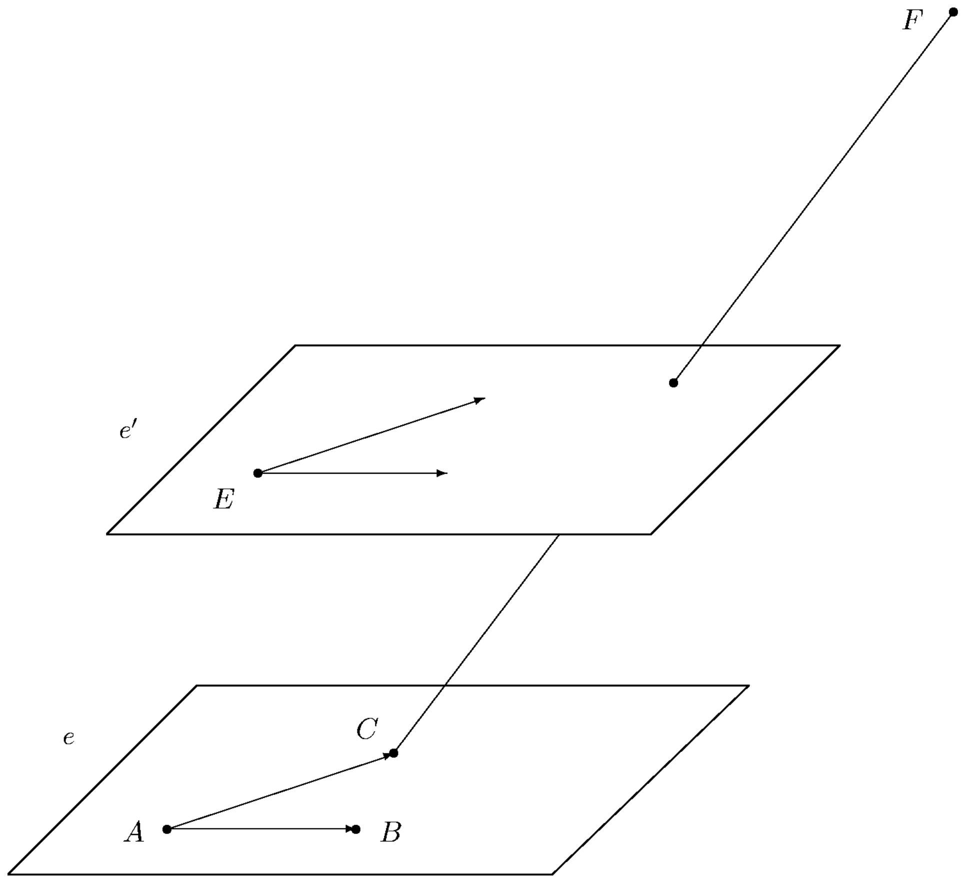
Die letzten beiden Gleichungen für s widersprechen einander: Es gibt also keine Lösung! Damit liegt der Punkt E nicht in der Ebene e.
Für F erhält man mit einer entsprechenden Rechnung ebenfalls: F liegt nicht in der Ebene e. Für den Punkt D erhält man die eindeutige Lösung $r = -1$, $s = 1$.

3) a) Da die Ebene e' *parallel* zur Ebene $e = e(A,B,C)$ verlaufen soll, können wir als Richtungsvektoren für e' dieselben wie für e wählen, nämlich

$$u = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da e' durch E verlaufen soll, erhalten wir die Parameterdarstellung

$$x = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OE} + ru + sv = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



b) Parameterdarstellung für die Gerade $g(C, F)$:

$$x = \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung des Durchschnitts $g(C, F) \cap e'$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rcl} r + 2s + 4t &=& 5 \\ -r &=& -1 \\ -r + 2s &=& 1 \end{array}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rcl} r &=& 1 \\ 2s &=& r + 1 \\ 4t &=& 5 - r - 2s \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rcl} r &=& 1 \\ 2s &=& 2 \\ 4t &=& 2 \end{array}\right] \Longleftrightarrow r = 1, s = 1, t = \frac{1}{2}$$

Da das Gleichungssystem lösbar ist, gibt es einen Schnittpunkt S. Diesen erhält man, indem man in *eine* der beiden Parameterdarstellung den entsprechenden gefundenen Parameterwert einsetzt. Dafür bietet sich die Parameterdarstellung der Geraden an:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt ist $S = (2, 1, 2)$.

4) a) Da der Punkt C zu beiden Ebenen gehört, E aber nur zu einer von beiden (siehe Aufgabe 1) b)), sind die Ebenen verschieden, aber nicht parallel. Daher schneiden sie sich in einer ganzen Geraden.

b) Wir erstellen zunächst Parameterdarstellungen für beide Ebenen:

$$X \in e \iff x = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$X \in e'' \iff x = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CE} + u \cdot \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung des Schnittes muss man also das durch 'Gleichsetzen' entstehende lineare Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - u\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten (je zwei Parametern der beiden Ebenendarstellungen).

Wir wollen dieses Gleichungssystem erst lösen, wenn wir mit dem Gauß-Verfahren ein systematisches Lösungsverfahren für beliebige lineare Gleichugnssysteme kennengelernt haben.

c) Nach a) wissen wir aber bereits, dass dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen haben muss.

5) a) Da der Punkt F nicht in der durch A, B, C bestimmten Ebene liegt, bilden die 4 Punkte $ABCF$ ein Tetraeder.

b) Wir müssen die Schnittpunkte der drei Kantengeraden $g(F, A)$, $g(F, B)$ und $g(F, C)$ mit der Ebene e' bestimmen. Dazu stellt man für die Geraden und die Ebene e' Parameterdarstellungen auf (für e' siehe oben) und setzt die Parameterdarstellung der Ebenen jeweils mit der Parameterdarstellung einer Geraden gleich. Es ergibt sich jeweils ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen (da Punkte und Vektoren drei Koordinaten haben). Die Unbekannten sind der eine Parameter aus der Geradendarstellung und die zwei Parameter aus der Ebenendarstellung, insgesamt also drei Unbekannte.

Fortführung der Aufgaben 4) und 5) mit dem Gauß-Verfahren:

4) Wir lösen das bereits bei 4) b) aufgestellte Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren. Bei Reihenfolge der Unbekannten r, s, t, u ergibt sich die nachfolgende erweiterte Matrix und ihre Umformung in Dreiecksgestalt:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 4 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

(Bei Beachtung der beiden Nullen in der letzten Spalte hätte man (durch Spaltentausch) den Rechenaufwand verringern können. Er war aber ohnehin nicht sehr groß, und die folgenden Überlegungen zeigen, dass ein solcher Spaltentausch auch Nachteile hat.)

Wir stellen nun nach Abschluss der Gauß-Verfahrens zunächst einmal fest, dass das Gleichungssystem den Rang $r = 3$ hat, lösbar ist ($m = r$, keine Nullzeile) und 1 Parameter frei wählbar ist ($d = n - r = 1$). Damit gibt es unendlich viele Lösungen (wie schon bei der Lösung der ursprünglichen Aufgabenstellung erkannt). Diese wollen wir nun bestimmen.

Wir lösen das Gleichungssystem nun wie üblich 'unten nach oben' auf. Die letzte Gleichung besagt:

$$-2t - 4u = 0 \iff t = -2u\,.$$

Löst man die Gleichungen weiter nach s und dann r auf, so erhält man Formeln für s und r in Abhängigkeit von dem (bei der Auflösung der letzten Gleichung gewählten) freien Parameter u. [Es ergibt sich $s = 2u + 1$ und $r = 2u$ und die Lösungsvektoren sind von der Form

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ 2u+1 \\ -2u \\ u \end{pmatrix}$$

mit frei wählbarem Parameter u.] Aber diese Formeln für r, s werden gar nicht mehr benötigt, um die Schnittpunkte zu bestimmen. Man muss nämlich zwischen den Parametern r, s, t, u, die in dem Gleichungssystem vorkommen, und den gesuchten Schnitt*punkten* unterscheiden. Diese Schnittpunkte kann man entweder als Punkte der Ebene e mit den Parametern r, s oder als Punkte der Ebene e'' mit den Parametern t, u beschreiben. Um also die Schnittpunkte zu beschreiben, muss man ein zusammengehörendes Parameterpaar r, s *oder* t, u in die zugehörige Parameterdarstellung einsetzen. Setzt man $t = -2u$, $u \in \mathbb{R}$ beliebig, in die Parameterdarstellung von e'' ein, erhält man die für die Schnittpunkte S:

$$e \cap e'' : \qquad \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2u \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine Parameterdarstellung für die Menge aller Schnittpunkte; diese stellt offenbar eine Gerade dar, und zwar durch den Punkt $C = (4, 1, 2)$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Man erkennt nun, dass die Berechnung von r, s hierfür gar nicht benötigt wurde! Man kann aber zur Kontrolle einmal nach r, s auflösen (s.o.) und die Ergebnisse dann in die Parameterdarstellung von e einsetzen. Man erhält dann

$$e' \cap e'': \qquad \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + (2u+1) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist genau dieselbe Parameterdarstellung für die Schnittgerade. (Das sich dieselbe Parameterdarstellung ergibt, liegt daran, dass wir auch denselben Parameter u benutzen! Bei einer anderen Auflösung des Gleichungssystems, etwa nach Zeilen- oder auch Spaltentausch oder Wahl eines anderen freien Parameters, erhält man *andere Parameterdarstellungen* für *dieselbe Schnittgerade.)*

5) Hier müssen wir die Schnittpunkte der Ebene e' mit den drei Kanten $g(F, A)$, $g(F, B)$ und $g(F, C)$ ermitteln. Die Parameterdarstellungen sind:

$$\begin{aligned} e': \qquad & \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ g(F,A): \qquad & \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \\ g(F,B): \qquad & \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \\ g(F,C): \qquad & \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Die Ermittlung des Schnittpunktes A' führt (bei Reihenfolge der Parameter r, s, t) auf folgende Rechnung

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Um den gesuchten Schnittpunkt zu ermitteln, braucht man nur den Geraden-Parameter t zu ermitteln, der sich unmittelbar aus der letzten Gleichung ergibt: $t = 1/2$. Der gesuchte Schnittpunkt A' ergibt sich, indem man diesen Wert von t in die Parameterdarstellung der Geraden einsetzt. Dies ergibt $A' = (1|1|1)$.
Die anderen Rechnungen verlaufen völlig analog, nur der Richtungsvektor der Geraden ändert sich. Sein Negatives stellt jeweils die dritte Spalte dar.
Berechnung von B':

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Wieder ergibt sich der (Geraden-)Parameter $u = 1/2$ und $B' = (\frac{3}{2}|\frac{1}{2}|\frac{1}{2})$.
Berechnung von C':

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Wieder ergibt sich der (Geraden-)Parameter $v = 1/2$ und $C' = (2|1|2)$.

Übungen (5)

1) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme

a) $\left[\begin{array}{rrrl} x & +2y & +z & =1 \\ x & +4y & +3z & =1 \\ 2x & -2y & +z & =7 \end{array}\right]$, b) $\left[\begin{array}{rrrl} 2x & +y & -2z & =-6 \\ & y & +z & =0 \\ 3x & & -2z & =1 \end{array}\right]$,

c) $\left[\begin{array}{rrrl} 3x & +4y & +2z & =0 \\ x & +y & +z & =0 \\ 4x & +4y & & =0 \end{array}\right]$, d) $\left[\begin{array}{rrrl} -x & +y & +z & =0 \\ x & -y & +z & =2 \\ x & +y & & =1 \end{array}\right]$.

2) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme

a) $\left[\begin{array}{rrrrl} 4x & +3y & -3z & -8u & =-10 \\ x & -y & +z & +4u & =13 \\ -4x & -2y & +z & +3u & =-3 \\ 3x & -y & -2z & -7u & =-6 \end{array}\right]$, b) $\left[\begin{array}{rrrrl} x & -y & +z & -u & =0 \\ x & +y & -z & -u & =6 \\ x & -y & -z & +u & =-2 \\ 2x & +y & -2z & +3u & =0 \end{array}\right]$.

3) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $\left[\begin{array}{rrrl} x & -y & +z & =6 \\ 2x & +4y & -z & =-3 \\ -x & -2y & +3z & =9 \end{array}\right]$, b) $\left[\begin{array}{rrrl} 3x & -y & +z & =1 \\ -2x & +4y & -z & =-2 \\ x & +3y & & =-1 \end{array}\right]$,

c) $\left[\begin{array}{rrrl} 2x & +3y & -4z & =-2 \\ -x & +4y & +z & =-10 \\ x & +y & +5z & =0 \end{array}\right]$, d) $\left[\begin{array}{rrrl} x & -y & +2z & =9 \\ -x & +2y & -z & =6 \\ & y & +z & =4 \end{array}\right]$,

e) $\left[\begin{array}{rrrl} 4x & -2y & +z & =2 \\ -12x & +6y & -3z & =-6 \\ -8x & +4y & -2z & =-4 \end{array}\right]$, f) $\left[\begin{array}{rrrl} -x & +y & -z & =-4 \\ 3x & +y & +2z & =3 \\ -4x & -4y & +2z & =6 \end{array}\right]$.

Bestimmen Sie – wenn möglich – Parameterdarstellungen für die Lösungsmengen. Was stellen die Lösungsmengen geometrisch dar?

4) Bestimmen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix und die Lösungsanzahl der folgenden Gleichungssysteme. Bestimmen Sie ggf. eine Parameterdarstellung für die Lösungsmenge.

a) $\left[\begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & & =3 \\ & y & +z & +u & =3 \\ x & -y & -z & +u & =0 \\ x & +2y & +2z & +u & =6 \end{array}\right]$, b) $\left[\begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & & =3 \\ & y & +z & +u & =3 \\ x & -y & -z & +u & =0 \\ x & -2y & +2z & +u & =-2 \end{array}\right]$,

c) $\left[\begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & +u & =10 \\ -x & +2y & & & =3 \\ & -2y & +3z & & =5 \\ & & 3z & -4u & =-7 \end{array}\right]$, d) $\left[\begin{array}{rrrrl} x & -y & +z & -u & =1 \\ 2x & +y & -2z & +3u & =10 \\ -x & -2y & +3z & -4u & =-9 \\ 3x & & -z & +2u & =11 \end{array}\right]$.

5) Lösen Sie die nachfolgenden linearen Gleichungssysteme. Überlegen Sie sich vor der Rechnung, welche Möglichkeiten es für den Rang r gibt und was dies für die Lösbarkeit bzw. Lösungsanzahl bedeutet.

a) $\left[\begin{array}{rrrl} 6x & -3y & +2z & =-6 \\ -3x & +9y & +4z & =18 \\ & 12y & +8z & =24 \\ 3x & -6y & +6z & =12 \end{array}\right]$, b) $\left[\begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & =5 \\ -3x & -4y & +z & =-1 \\ 2x & -y & -z & =0 \\ x & -2y & -3z & =2 \end{array}\right]$,

c) $\left[\begin{array}{rrrrl} x + & y - & z - & u = & -1 \\ x - & y + & z + & u = & 3 \\ -3x + & 3y - & 3z - & 3u = & -7 \end{array}\right]$, d) $\left[\begin{array}{rrrrl} x - & y + & z - & u = & 3 \\ 2x + & y - & z + & u = & 9 \\ -x + & 3y - & 2z - & u = & 0 \end{array}\right]$,

e) $\left[\begin{array}{rrrl} x - & y + & z = & 4 \\ 2x + & 3y - & z = & -1 \end{array}\right]$, f) $\left[\begin{array}{rrl} x + & y = & 5 \\ z - & u = & 3 \\ y + & z = & 4 \end{array}\right]$, g) $\left[\begin{array}{rrrrl} x - & 2y - & 3z + & u = & 4 \\ 2x + & y - & z + & 2u = & -2 \\ 3x - & y - & 4z + & 3u = & 3 \end{array}\right]$,

h) $\left[\begin{array}{rrrl} x - & 2y - & 2z = & 2 \\ x + & 2y + & z = & 1 \\ 2x + & 3y + & 3z = & 4 \\ x + & 3y + & z = & 0 \end{array}\right]$, i) $\left[\begin{array}{rrrrl} -2x - & y + & z & = & -2 \\ 4x + & 2y - & 2z & = & 6 \\ & 7y - & 5z + & 4w = & 2 \end{array}\right]$.

6) Auf einer Kleinkunstbühne tritt ein Rechenkünstler auf. Er fordert die Zuschauer auf, sich drei Zahlen (x, y, z) zu denken und ihm nur die Summen (A, B, C) von je zweien dieser Zahlen zu nennen. Er nennt dann unmittelbar die drei gedachten Zahlen.
a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, das der Rechenkünstler lösen muss. Lösen Sie es für
1) $A = 6$, $B = 9$, $C = 11$,
2) $A = 13$, $B = 17$, $C = 18$.
b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für *beliebige* A, B, C und ermitteln Sie so eine Lösungs*formel* zur Bestimmung von x, y, z.
c) Der Rechenkünstler verrät seinen 'Trick': Er addiert $A + B + C$ und halbiert das Ergebnis. Von diesem Wert subtrahiert er dann jeweils eine der Zahlen A, B, C und erhält dabei die drei gedachten Zahlen x, y, z. Vergleichen Sie mit Ihrer Lösungsformel aus b).
d) Der Rechenkünstler ändert die Fragestellung. Die Zuschauer sollen von den gedachten Zahlen (x, y, z) je zwei addieren und die dritte subtrahieren. Wie berechnet man jetzt aus den mitgeteilten Ergebnissen P, Q, R die gedachten Größen?

Übungen (5) — Lösungen

1) Alle Gleichungssysteme sind eindeutig lösbar. Die Lösungsvektoren sind jeweils:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Wieder sind alle Gleichungssysteme eindeutig lösbar. Die Lösungsvektoren sind:

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3) a), c) und f) sind eindeutig lösbar. Die Lösungsvektoren sind $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ für a), $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ für c) und $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ für f).

b) Dieses Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Gauß-Elimination ergibt

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & -4 \\ 0 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die letzte Gleichung $0 = 0$ ist selbstverständlich erfüllt. Die übrigen Gleichungen löst man 'von unten nach oben' auf. Die erste dabei aufzulösende Gleichung $10y - z = -4$ enthält *zwei* Variable, man kann daher auswählen, nach welcher man auflösen will. Hier bietet sich z an.

$$10y - z = -4 \iff z = 10y + 4\,.$$

Die letzte Gleichung besagt, dass y beliebige Werte annehmen kann, dann jedoch $z = 10y + 4$ gewählt werden muss, z ist also durch y bestimmt. Man löst nun die noch verbleibende Gleichung nach der noch *verbleibenden* Variablen x auf (nicht etwa nach z oder y!):

$$3x - y + (10y + 4) = 1 \iff 3x = -9y - 3 \iff x = -3y - 1\,.$$

Die Lösungsvektoren haben also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y - 1 \\ y \\ 10y + 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit beliebigem } y \in \mathbb{R}\,.$$

Die Lösungsmenge ist daher unendlich. Indem man den Lösungsvektor zerlegt in die Vielfachen von y und die 'y-freien' Teile, erhält man die folgende Parameterdarstellung für die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y - 1 \\ y \\ 10y + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (y \in \mathbb{R})\,.$$

Die Lösungsmenge ist die Gerade durch den Punkt $(-1 \mid 0 \mid 4)$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$. d) ist unlösbar, denn die Gauß-Elimination ergibt

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right).$$

Die letzte Gleichung enthält einen Widerspruch $0 = -11$, so dass keine Lösung existieren kann.
e) Hier reduziert sich das Gleichungssystem durch Gauß-Elimination auf eine einzige Gleichung, die erste: $4x - 2y + z = 2$. Diese kann man nun nach einer der drei Variablen auflösen, z. B.

$$4x - 2y + z = 2 \iff z = -4x + 2y + 2\,.$$

Dies zeigt, dass x *und* y beliebig gewählt werden können, während z dann gleich $-4x+2y+2$ sein muss, damit das Gleichungssystem erfüllt ist. Die Lösungsvektoren sind daher von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -4x+2y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{R})\,.$$

Dies stellt eine Parameterdarstellung einer *Ebene* dar: Die Lösungsmenge ist die Ebene durch den Punkt $(0 \mid 0 \mid 2)$ mit den (linear unabhängigen) Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4) a) Gauß-Elimination ergibt:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 3$. In der letzten Nullzeile steht auch auf der rechten Seite 0: Das Gleichungssystem ist lösbar. Die Auflösung 'von unten nach oben' ergibt der Reihe nach

$$\begin{aligned} &3u = 3 \iff u = 1\,, \\ &y + z + 1 = 3 \iff y = 2 - z\,, \\ &x + (2 - z) + z = 3 \iff x = 1\,. \end{aligned}$$

und damit die folgende Parameterdarstellung für die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-z \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{R})\,.$$

Die Lösungsmenge ist damit eine *Gerade,* und zwar durch den Punkt $(1 \mid 2 \mid 0 \mid 1)$ mit *Richtungsvektor* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b),c) Hier ist der Rang jeweils $r = 4$, so dass beide Gleichungssysteme eindeutig lösbar sind. Die Lösungsvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für b) und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ für c).

d) Gauß-Elimination ergibt:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 10 \\ -1 & -2 & 3 & -4 & -9 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 11 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & -3 & 4 & -5 & -8 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 8 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist lösbar; der Rang ist $r = 2$, die Anzahl der freien Parameter daher $n - r = 4 - 2 = 2$, die Lösungsmenge also eine *Ebene.* Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\mathbb{L}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ 8/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5) Zunächst die Vorüberlegungen vor Beginn der Gauß-Umformungen.
a),b),h): Es ist $n = 3$, $m = 4$ und folglich $r \leq n = 3 < m = 4$. $r < m$ bedeutet, dass am Ende der Gauß-Umformungen mindestens eine Nullzeile in der Koeffizientenmatrix auftritt. Es muss also mindestens eine Bedingung für die Lösbarkeit überprüft werden.
c),d),f),g),i): Hier ist $n = 4$, $m = 3$ und folglich $r \leq m = 3 < n = 4$. $r < n$ bedeutet, dass das System – wenn es lösbar ist (!) – unendlich viele Lösungen haben muss, da mindestens ein freier Parameter in der Darstellung der Lösungsmenge auftritt. Diese 5 Gleichungssysteme sind also auf keinen Fall eindeutig lösbar!
Dieselben Überlegungen gelten auch für e), denn auch hier ist $r < n$, da $m = 2$, $n = 3$ und $r \leq 2$ ist.
Im folgenden sind die Gaußumformungen und die sich daraus ergebenden Ergebnisse aufgelistet:

a)
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -3 & 2 & -6 \\ -3 & 9 & 4 & 18 \\ 0 & 12 & 8 & 24 \\ 3 & -6 & 6 & 12 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 15 & 10 & 30 \\ 0 & 12 & 8 & 24 \\ 0 & -9 & 10 & 30 \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -9 & 10 & 30 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 48 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist lösbar; der Rang ist $r = 3 = n$, also gibt es genau eine

Lösung; diese ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b)
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ -3 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 14 \\ 0 & -3 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 26 & 52 \\ 0 & 0 & 26 & 45 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 26 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem ist *unlösbar.* Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 3$.
c)
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -3 & -3 & -7 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & -10 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist wiederum *unlösbar.* Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 2$.

d)
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem ist lösbar (keine Nullzeile). Der Rang ist $r = 3$, die Dimension des Lösungsraumes daher $d = n - r = 1$: Die Lösungsmenge ist eine *Gerade.* Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\mathbb{L}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R})\,.$$

e)
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem hat den Rang $r = 2 = m$; es ist lösbar; die Dimension des Lösungsraumes ist $d = n - r = 3 - 2 = 1$, die Lösungsmenge also eine *Gerade.* Als Parameterdarstellung erhalten wir:

$$\mathbb{L}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ -9/5 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2/5 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{R})\,.$$

f)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Hier bestand die Gaußumformung aus einem simplen Zeilentausch. Der Rang ist $r = 3 = m$; das System ist lösbar und die Lösungsmenge ist $d = n - r = 1$-dimensional. Eine Parameterdarstellung für die Gerade ist

$$\mathbb{L}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

g)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -4 & 3 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & -9 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dieses System ist unlösbar. Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 2$.
Gleiches gilt für i). h) dagegen ist lösbar; der Rang ist $r = 3$. Wegen $r = n$ ist die Lösung eindeutig: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6) Das zu lösende Gleichungssystem lautet $\begin{bmatrix} x + y & & = A \\ x & + z & = B \\ & y + z & = C \end{bmatrix}$. Dieses Gleichungssystem soll für die angegebenen Werte von A, B, C bzw. für beliebige A, B, C gelöst werden. Dazu verwendet man das Gauß'sche Eliminationsverfahren. Da die Umformungsschritte im Gauß-Verfahren *unabhängig* von der rechten Seite sind, können wir alle drei Aufgaben auf einmal erledigen, indem wir in der Matrixform *mehrere* rechte Seiten gleichzeitig behandeln:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 6 & 13 & A \\ 1 & 0 & 1 & 9 & 17 & B \\ 0 & 1 & 1 & 11 & 18 & C \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 6 & 13 & A \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 4 & B-A \\ 0 & 1 & 1 & 11 & 18 & C \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 6 & 13 & A \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 4 & B-A \\ 0 & 0 & 2 & 14 & 22 & C+B-A \end{array}\right)$$

Jetzt muss man die Gleichungen für die verschiedenen rechten Seiten von unten nach oben auflösen:
1) $2z = 14 \iff z = 7, \quad -y + 7 = 3 \iff y = 4, \quad x + 4 = 6 \iff x = 2;$
2) $2z = 22 \iff z = 11, \quad -y + 11 = 4 \iff y = 7, \quad x + 7 = 13 \iff x = 6.$
Diese beiden Rechnungen sind natürlich überflüssig, wenn wir nun die Aufgabe bei *beliebiger* rechter Seite lösen. Dies ist möglich, da die Koeffizientenmatrix den Rang 3 hat! Die Auflösung ergibt:

$$2z = C + B - A \iff z = \frac{C + B - A}{2},$$
$$-y + \frac{C + B - A}{2} = B - A \iff y = \frac{C}{2} + \frac{B}{2} - \frac{A}{2} + A - B = \frac{C - B + A}{2},$$
$$x + \frac{C - B + A}{2} = A \iff x = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = \frac{A + B - C}{2}.$$

Setzt man die speziellen Werte aus 1) und 2) in diese Auflösungsformeln ein, so ergeben sich die oben konkret berechneten Lösungen.
c) Die Formeln des Rechenkünstlers sind leichter zu verwenden, aber mit den eben berechneten Formeln gleichwertig. Zum Beispiel

$$z = \frac{A+B+C}{2} - A = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} - A = -\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{C+B-A}{2}.$$

Genauso überprüft man die Formeln für y und z.

Für d) lautet das Gleichungssystem $\left[\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & P \\ x & - & y & + & z & = & Q \\ -x & + & y & + & z & = & R \end{array}\right]$ und Gauß-Elimination ergibt

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & -1 & P \\ 1 & -1 & 1 & Q \\ -1 & 1 & 1 & R \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & -1 & P \\ 0 & -2 & 2 & Q-P \\ 0 & 2 & 0 & R+P \end{array}\right).$$

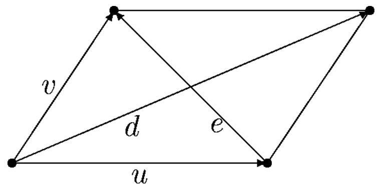
Die Auflösung ist wieder möglich (Rang 3) und ergibt

$$y = \frac{P+R}{2}, \; z = \frac{Q+R}{2}, \; x = \frac{P+Q}{2}.$$

Die *gedachten* Zahlen x, y, z erhält man also, indem man je zwei der *genannten* Zahlen P, Q, R mittelt.

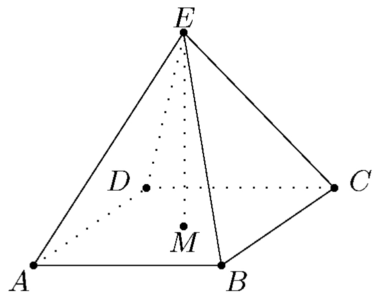
Übungen (6)

1) Zeigen Sie für ein beliebiges Parallelogramm die Gültigkeit der folgenden *Parallelogrammrelation:*
Die Summe der Längenquadrate beider Diagonalen ist gleich der Summe der Längenquadrate der vier Seiten.
Mit den Bezeichnungen der nebenstehenden Skizze bedeutet dies:



$$|d|^2 + |e|^2 = 2\,|u|^2 + 2\,|v|^2 \ .$$

2) Gegeben sind 5 Punkte $A = (3, -4, -1)$, $B = (5, 0, 3)$, $C = (9, 2, -1)$, $D = (7, -2, -5)$ und $E = (0, 5, -4)$.
a) Zeigen Sie, daß $ABCD$ die Ecken eines Rechtecks sind. Wie lang sind die Seiten?
b) Zeigen Sie, daß die 5 Punkte $ABCDE$ eine *senkrechte quadratische Pyramide* bilden. Dies bedeutet: Die Spitze E liegt *orthogonal* über dem Mittelpunkt der *quadratischen* Grundfläche $ABCD$ (siehe Skizze).
c) Wie hoch ist die Pyramide?



3) Gegeben ist das Dreieck mit den Ecken $A = (2, 3)$, $B = (6, 7)$, $C = (7, 11)$. Fertigen Sie parallel zur Lösung der folgenden Aufgabe eine genaue Skizze an und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse daran.
a) Bestimmen Sie für alle drei Höhen die Höhenfußpunkte und die Längen der Höhen.
b) Stellen Sie fest, welche Höhenfußpunkte auf der jeweiligen Dreiecksseite *zwischen* den Ecken liegen, und welche *außerhalb.*

4) Aus der Physik übernehmen wir: Ein Körper (mit ebenen Begrenzungsflächen) steht stabil auf einer seiner Begrenzungsflächen, wenn das *Lot* vom *Schwerpunkt* des Körpers auf die Bodenebene seinen Fußpunkt im *Innern* der Auflagefläche hat.
a) Wir wollen zunächst ein 2-dimensionales Beispiel betrachten. Dieses ist realitätsferner, dafür aber einfacher! Wir gehen aus von dem in der vorigen Aufgabe gegebenen Dreieck. (Ergänzen Sie Ihre bisherige Skizze!) Stellen Sie fest, auf welcher seiner Seiten das Dreieck stabil stehen kann.
b) Nun ein reales dreidimensionales Beispiel: Wir betrachten ein Tetraeder mit den Ecken $A = (0, 1, -2)$, $B = (5, 5, 6)$, $C = (3, 1, -2)$ und $D = (0, 5, -2)$. Stellen Sie fest, auf welchen seiner vier Seiten das Tetraeder stabil stehen kann.

Übungen (6) — Lösungen

1) $d = u + v$, $e = v - u$, also

$$\begin{aligned} |d|^2 + |e|^2 &= (u+v) \bullet (u+v) + (v-u) \bullet (v-u) \\ &= u \bullet u + 2u \bullet v + v \bullet v \ + \ u \bullet u - 2u \bullet v + v \bullet v \\ &= 2\,|u|^2 + 2\,|v|^2 \end{aligned}$$

2) a) Wegen $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ ist $ABCD$ ein Parallelogramm. Wegen

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ also } \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = 8 + 8 - 16 = 0$$

sind die Kantenvektoren dieses Parallelogramms orthogonal; es liegt also ein Rechteck vor. Wegen

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+16+16} = 6\,, \ |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{16+4+16} = 6$$

haben die Rechtecksseiten die *gleiche* Länge 6; es liegt sogar ein Quadrat vor.
b) Wir zeigen zunächst, daß E nicht zu der Ebene gehört, in der $ABCD$ liegen. Dazu überprüfen wir, daß die Vektoren

$$u = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ v = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } w = \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, etwa indem wir den Rang der Matrix mit den Spaltenvektoren u, v, w bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & 9 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & 15 \\ 0 & -12 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$$

Da der Rang 3 ist, sind die drei Spaltenvektoren linear unabhängig und die Punkte $ABCE$ liegen nicht in einer Ebene.
Da die Grundfläche nach dem in a) Bewiesenen ein Quadrat ist, bleibt nur noch zu zeigen, daß der Verbindungsvektor vom Mittelpunkt M des Quadrates zur Spitze E orthogonal ist zur Bodenebene. Wir berechnen M als Mittelpunkt zwischen AC und erhalten $M = (6, -1, -1)$. Da u, v zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Bodenebene sind, genügt es zu zeigen, daß $\overrightarrow{ME}$ orthogonal zu u *und* v ist:

$$\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \ u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \ \overrightarrow{ME} \bullet u = -12 + 24 - 12 = 0\,, \ \overrightarrow{ME} \bullet v = -24 + 12 + 12 = 0\,.$$

c) Die Höhe der Pyramide ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$,

also $\sqrt{36+36+9} = 9$.

3) Höhe durch C: Die C gegenüberliegende Dreiecksseite ist die Gerade $g(A,B)$ durch A, B; sie hat die Parameterdarstellung

$$x = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Höhenfußpunkt H ist durch zwei Bedingungen gekennzeichnet:
1. H liegt auf der Dreiecksseite $g(A,B)$:

$$h = \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

2. Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{CH}$ ist orthogonal zu der Geraden $g(A,B)$, d. h. orthogonal zum Richtungsvektor $u = \overrightarrow{AB}$:

$$0 = \overrightarrow{CH} \bullet \overrightarrow{AB}.$$

Diese zweite Bedingung stellt eine lineare Gleichung für die eine Unbekannte r dar:

$$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+4r \\ -8+4r \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow\ 0 = \overrightarrow{CH} \bullet \overrightarrow{AB} = -20 + 16r - 32 + 16r \iff 32r = 52 \iff r = \frac{13}{8}.$$

Damit erhält man den Höhenfußpunkt durch

$$h = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{13}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 19/2 \end{pmatrix}, \ H = (\frac{17}{2}, \frac{19}{2}).$$

Da der Parameterwert r für den Höhenfußpunkt H *größer* als 1 ist, liegt H nicht *zwischen* A und B, sondern *außerhalb* der Strecke AB, und zwar auf der Seite von B. Die Länge h_C der Höhe durch C ist die Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$, also

$$h_C = |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,12.$$

Höhe durch B: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $h = \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Der gesuchte Höhenfußpunkt H ist nun gekennzeichnet durch

$$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \iff \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right] \perp \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$$
$$\iff 0 = -20 - 32 + r(25+64) = -52 + 89r \iff r = \frac{52}{89}.$$

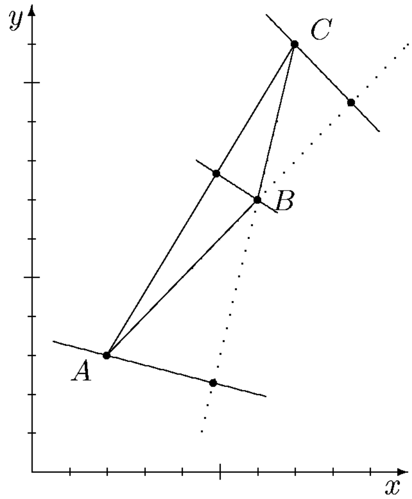
Da der Parameterwert zwischen 0 und 1 liegt, liegt der Höhenfußpunkt auf der Dreiecksseite *zwischen* A und C. Explizit ergibt sich

$$h = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{52}{89}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{89}\begin{pmatrix} 438 \\ 683 \end{pmatrix}, \; H = (\frac{438}{89}, \frac{683}{89}) \approx (4{,}92; 7{,}67)\,.$$

Die Länge h_B der Höhe ist

$$|\overrightarrow{BH}| = \left|\begin{pmatrix} -96/89 \\ 60/89 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{12816}{89^2}} = \sqrt{\frac{144}{89}} = \frac{12}{\sqrt{89}} \approx 1,27\,.$$

Die Ergebnisse für die Höhe durch A und Skizze:



$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; h = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \iff r = -\frac{20}{17},$$

$$\Longrightarrow H = (\frac{82}{17}, \frac{39}{17}) \approx (4{,}82\,;\, 2{,}29)$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 48 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow h_A = \sqrt{\frac{2448}{17^2}} = \sqrt{\frac{144}{17}} = \frac{12}{\sqrt{17}} \approx 2,91\,.$$

Da der Parameterwert r negativ ist, liegt der Höhenfußpunkt nicht *zwischen* B und C, sondern *außerhalb,* und zwar auf der Seite von B.

4) a) Wir berechnen den Schwerpunkt $S = (5,7)$ und dann die Fußpunkte der *Lote von S auf die Dreiecksseiten.*
Lot auf $g(A,B)$: Der Lotfußpunkt H soll auf der Geraden $g(A,B)$ liegen, also $\overrightarrow{AH} = r\overrightarrow{AB}$ mit einer (gesuchten) Zahl $r \in \mathbb{R}$. Da H der Lotfußpunkt von S aus ist, muß $\overrightarrow{SH}$ zu $\overrightarrow{AB}$ orthogonal sein:

$$0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AH}) \bullet \overrightarrow{AB} = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\iff 0 = -12 + 16r - 16 + 16r \iff r = \frac{7}{8}\,.$$

Da der Parameterwert r zwischen 0 und 1 liegt, liegt der Lotfußpunkt *zwischen* A und B: Das Dreieck kann auf dieser Dreiecksseite stabil stehen.
Lot auf $g(B,C)$: $\overrightarrow{BH} = +r\overrightarrow{BC}$ und

$$0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{BC} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -1 + r + 16r \iff r = -\frac{1}{17}\,.$$

Da der Parameterwert negativ ist, liegt der Lotfußpunkt nicht zwischen den Eckpunkten (wenn auch sehr dicht bei der Ecke B); auf der Dreiecksseite BC kann das Dreieck nicht stabil stehen. Es kippt zu der Seite, bei der B liegt, (und bleibt dann

auf der Dreiecksseite durch A, B stabil liegen).
Lot auf $g(A,C)$: $\overrightarrow{AH} = r\overrightarrow{AC}$ und

$$0 = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = -15 + 25r - 32 + 64r \iff r = \frac{47}{89}\,.$$

Wieder liegt der Lotfußpunkt des Schwerpunktes *zwischen* den Eckpunkten und wieder ist das Dreieck auf dieser Seite standfest.
[In diesem letzten Fall braucht man nichts zu rechnen, wenn man die anschaulich einsichtige Tatsache beweist: Liegt der Höhenfußpunkt zwischen den Ecken, so gilt dies erst recht für den Fußpunkt des Schwerpunktlotes. Wenn man dies zu beweisen versucht, findet man eine allgemeingültige Beziehung zwischen Höhenfußpunkt, Fußpunkt der Schwerpunktlotes und Seitenmittelpunkt: Der Lotfußpunkt liegt *zwischen* Höhenfußpunkt und Seitenmittelpunkt und teilt diese Strecke im Verhältnis 2:1. Für die Parameterwerte r_H des Höhenfußpunktes, r_L des Lotfußpunktes und $r_M = \frac{1}{2}$ des Mittelpunktes bedeutet dies:

$$r_L = r_H + \frac{2}{3}(r_M - r_H) = r_H + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} - \frac{2}{3}r_H = \frac{1}{3}r_H + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(r_H + 1)\,.$$

Vergleichen Sie diese Formel mit den Ergebnissen für r_H aus Aufgabe 3) und für r_L in Aufgabe 4) a).]
b) Wir berechnen den Schwerpunkt S des Tetraeders gemäß $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ und erhalten $S = (2,3,0)$ und bestimmen dann die Lotfußpunkte von S aus auf die vier Begrenzungsflächen des Tetraeders.
Seitenfläche ABC: Der Lotfußpunkt heiße H; er gehört zur Ebene durch ABC, also

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da SH zur Ebene durch ABC orthogonal sein soll, muß gelten

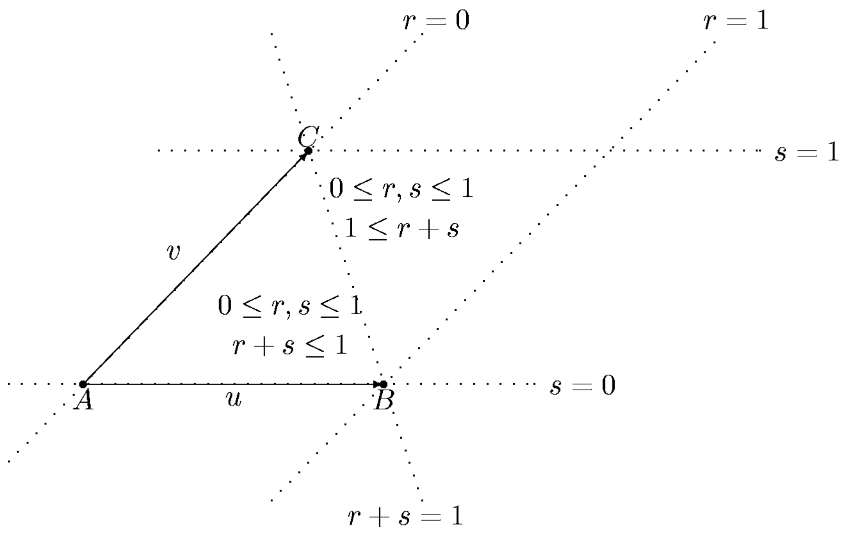
$$0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{AB} \quad \text{und} \quad 0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{AC}\,.$$

Dies ergibt *zwei* lineare Gleichungen für die beiden unbekannten Parameterwerte r, s:

$$0 = \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = -34 + 105r + 15s$$
$$0 = \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} = -6 + 15r + 9s\,.$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 3/10$, $s = 1/6$. Beide Parameterwerte liegen zwischen 0 und 1, daher liegt der zugehörige Punkt H innerhalb des *Parallelogramms,* das von den Vektoren $u = \overrightarrow{AB}$ und $v = \overrightarrow{AC}$ bestimmt wird (siehe Skizze). Die Frage der Aufgabenstellung ist aber, ob H innerhalb des *Dreiecks* ABC liegt. Dazu muß zusätzlich gelten: $r + s \le 1$. (Begründung: Auf der Geraden durch B und C liegen die Punkte X, für die die Parameterwerte zusammen genau 1 ergeben; die Punkte mit $r + s < 1$ liegen ganz auf einer Seite der Geraden $g(B,C)$, und zwar bei A.) Insgesamt:

$$H \text{ liegt } \textit{im} \text{ Dreieck } ABC \iff r, s \ge 0 \text{ und } r + s \le 1\,.$$



Für die oben gefundenen Werte $r = 3/10$ und $s = 1/6$ sind beide Bedingungen erfüllt: Der Lotfußpunkt H liegt *im* Dreieck ABC; das Tetraeder kann auf dieser Seite stabil stehen.

Seitenfläche ABD: Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} = -34 + 105r + 16s \\ 0 &= \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} = -8 + 16r + 16s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 26/89$, $s = 37/178$. Es gilt für diese Werte $r, s \geq 0$ und $r + s \leq 1$, also liegt wieder der Lotfußpunkt H *in* dem entsprechenden Seitendreieck ABD: Auch auf dieser Seite kann das Tetraeder stehen.

Seitenfläche ACD: Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AC} = -6 + 9r \\ 0 &= \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} = -8 + 16s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 2/3$, $s = 1/2$. Es gilt für diese Werte zwar wieder $r, s \geq 0$, aber nun ist $r + s > 1$, also liegt der Lotfußpunkt H *außerhalb* des entsprechenden Seitendreiecks ACD: Auf dieser Seite kann das Tetraeder nicht stabil stehen.

Seitenfläche BCD: Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SB} + r\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SB} \bullet \overrightarrow{BC} + r \cdot \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{BC} = -62 + 84r + 74s \\ 0 &= \overrightarrow{SB} \bullet \overrightarrow{BD} + r \cdot \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BD} + s \cdot \overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{BD} = -63 + 74r + 89s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 107/250$, $s = 44/125$. Wegen $r, s \geq 0$ und $r + s \leq 1$, liegt der Lotfußpunkt H wieder *in* dem entsprechenden Seitendreieck BCD: Auch auf dieser Seite kann das Tetraeder stehen.

Übungen (7)

1) Es sei ABC ein Dreieck und H der Schnittpunkt der Höhe durch B mit der Höhe durch C. Es seien $a = \overrightarrow{HA}$, $b = \overrightarrow{HB}$ und $c = \overrightarrow{HC}$ die Ortsvektoren der Eckpunkte in Bezug auf H (Skizze).
a) Begründen Sie der Reihe nach:

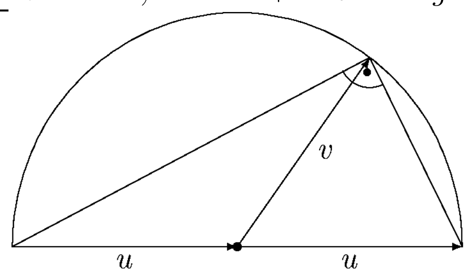
$$b \perp \overrightarrow{AC} = c - a\,, \quad c \perp \overrightarrow{AB} = b - a\,, \quad b \bullet a = b \bullet c = a \bullet c\,, \quad a \perp c - b = \overrightarrow{BC}\,.$$

b) Folgern Sie: H liegt auf der Höhe durch A; die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt.

2) a) Begründen Sie für zwei beliebige Vektoren u, v durch geeignete Rechnung mit dem Skalarprodukt:

$$u + v \perp u - v \iff |u|^2 = |v|^2\,.$$

Erläutern Sie den Zusammenhang mit binomischen Formeln.
Folgern Sie aus dieser Beziehung die nachfolgenden geometrischen Sachverhalte:
b) Ein Parallelogramm ist genau dann eine *Raute* (d. h. hat 4 gleichlange Seiten), wenn die Diagonalen orthogonal zueinander sind.
c) Ein Dreieck ist genau dann *gleichschenklig,* wenn eine Seitenhalbierende die Gegenseite senkrecht schneidet bzw. wenn eine Mittelsenkrechte durch den gegenüberliegenden Eckpunkt verläuft.
d) Die Ortslinie aller Punkte, die von zwei verschiedenen Punkten A, B denselben Abstand haben, ist die Mittelsenkrechte von A, B.
e) Der Schnittpunkt der drei *Mittelsenkrechten* eines Dreiecks ist der Mittelpunkt des *Umkreises.*
f) Erläutern Sie mittels c), dass die folgende Definition unserer Anschauung entspricht:
Sind u, v zwei linear unabhängige und gleichlange *Vektoren, so ist $u + v$ Richtungsvektor der Winkelhalbierenden.*
g) Folgern Sie aus a) (mit Hilfe nebenstehender Skizze) den Satz des *Thales:*
Verbindet man die beiden Endpunkte eines Kreisdurchmessers mit irgendeinem anderen Punkt des Kreises, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Durchmesser als Hypotenuse.



h) Formulieren und begründen Sie die *Umkehrung* des Satzes des Thales.

3) Berechnen Sie für das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (3, -1)$, $B = (-1, 1)$, $C = (0, 4)$
a) den Schwerpunkt S,
b) den Höhenschnittpunkt H, sowie
c) den Umkreismittelpunkt M.
Fertigen Sie parallel zu Ihrer Rechnung eine saubere Skizze an.

Übungen (7) — Lösungen

1) a) Da H auf der Höhe durch B liegt, ist $b = \overrightarrow{HB}$ orthogonal zu $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC} = c - a$. Da H auch auf der Höhe durch C liegt, folgt genauso $c = \overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB} = b - a$. Daraus ergibt sich nun

$$0 = b \bullet (c - a) = b \bullet c - b \bullet a \iff b \bullet c = b \bullet a\,,$$
$$0 = c \bullet (b - a) = c \bullet b - c \bullet a \iff c \bullet b = c \bullet a\,,$$

also $a \bullet b = b \bullet c = a \bullet c$. Jetzt folgt unmittelbar $a \bullet (c - b) = a \bullet c - a \bullet b = 0$, d. h. $a \perp c - b = \overrightarrow{BC}$.
b) Damit wurde gezeigt, dass $\overrightarrow{HA}$ orthogonal ist zu $\overrightarrow{BC}$, die Gerade $g(A, H)$ ist folglich die Höhe durch A. Da diese durch H verläuft, ist gezeigt: Alle drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

2) a) Wir berechnen das Skalarprodukt von $u + v$ und $u - v$ mittels der Grundregeln für das Skalarprodukt:

$$(u + v) \bullet (u - v) = u \bullet u - u \bullet v + v \bullet u - v \bullet v = u \bullet u - v \bullet v = |u|^2 - |v|^2\,.$$

Wir haben damit die dritte binomische Formel für das Skalarprodukt von Vektoren nachgewiesen. Daraus folgt insbesondere

$$u + v \perp u - v \iff 0 = (u + v) \bullet (u - v) = |u|^2 - |v|^2 \iff |u|^2 = |v|^2\,.$$

Geometrisch formuliert besagt dies:

- *Zwei Vektoren sind genau dann gleich lang, wenn ihr Summen- und ihr Differenzvektor orthogonal zueinander sind.*

b) Ein Parallelogramm ist genau dann eine Raute, wenn zwei *benachbarte* Seiten gleich lang sind. Nach a) ist dies genau dann der Fall, wenn der Summenvektor dieser beiden Seiten (dies ist eine Diagonale des Parallelogramms) orthogonal ist zur Differenz beider Vektoren (dies ist die zweite Diagonale).
c) Wir wiederholen die Formel für den Ortsvektor eines Mittelpunktes:

$$\overrightarrow{CM_{AB}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\,.$$

Damit ist der Vektor von einer Ecke eines Dreiecks zur gegenüberliegenden Mitte gerade die Hälfte des Summenvektors der von dieser Ecke ausgehenden Seitenvektoren. Der Summenvektor hat also die Richtung der Seitenhalbierenden:

- *Ein Richtungsvektor für eine Seitenhalbierende ist durch den Summenvektor der von der entsprechenden Ecke ausgehenden Seitenvektoren gegeben.*

Nun ist ein Dreieck genau dann gleichschenklig, wenn zwei Seiten gleich lang sind. Nach a) ist dies genau dann der Fall, wenn der Summenvektor der entsprechenden Seitenvektoren (dieser hat die Richtung der Seitenhalbierenden) orthogonal ist zum Differenzvektor, also zur dritten Dreiecksseite.
Nun ist eine Seitenhalbierende genau dann orthogonal zur Dreiecksseite, wenn sie

zugleich die Mittelsenkrechte ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn die Mittelsenkrechte durch den gegenüberliegenden Eckpunkt verläuft.
d) Ein Punkt P hat von zwei Punkten A, B denselben Abstand genau dann, wenn das Dreieck ABP gleichschenklig ist und die beiden gleich langen Seiten von P ausgehen. Nach c) ist dies genau dann der Fall, wenn die Mittelsenkrechte zu A, B durch P verläuft, d. h. wenn P auf der Mittelsenkrechten zu A, B liegt.
e) Ein *Kreis* ist die Ortslinie aller Punkte, die von einem festen Punkt (dem *Mittelpunkt*) einen festen Abstand (genannt *Radius*) haben.
Es sei M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu A, B und der zu B, C. Nach d) hat M dann einerseits denselben Abstand von A und B: $d(M, A) = d(M, B)$, und andererseits denselben Abstand von B und C: $d(M, B) = d(M, C)$. Insgesamt ergibt sich dann:

M hat von allen drei Eckpunkten denselben Abstand.

Damit liegen A, B, C auf einem Kreis um M, dem sog. *Umkreis.*
Aus der Tatsache $d(M, C) = d(M, A)$ folgert man wieder mittels d), dass M auch auf der Mittelsenkrechten zu A, C liegt: Auch die dritte Mittelsenkrechte verläuft durch M; alle drei Mittelsenkrechten treffen sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Umkreises.
f) Sind u und v gleich lang, so kann man sie als zwei Seitenvektoren eines gleichschenkligen Dreiecks ansehen (Skizze!). Nach c) trifft die Seitenhalbierende die gegenüberliegende Seite rechtwinklig. Die Seitenhalbierende teilt also das gleichschenklige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke, die durch Spiegelung an der Seitenhalbierenden zur Deckung gebracht werden (sie sind deckungsgleich (*kongurent*)). Insbesondere sind auch die Winkel gleich; die Seitenhalbierende halbiert auch den Winkel.
Da nun die Winkelhalbierende gleich der Seitenhalbierenden ist, und diese den Summenvektor als Richtungsvektor hat (s. o.), folgt die Behauptung.
g) Die an verschiedenen Stellen mit u bezeichneten Pfeile sind tatsächlich vektorgleich, da der mittlere Punkt (gemäß Text) der Mittelpunkt eines Durchmessers ist, also beide Pfeile gleich lang, gleich gerichtet und wie eingezeichnet auch gleich orientiert sind.
Die beiden Vektoren u und v sind gleich lang, da sie Radien in einem Kreis darstellen. Nach a) sind dann der Summen- und Differenzvektor orthogonal zueinander. Ergänzt man passende Pfeile, so sind diese beiden Vektoren gerade die nicht bezeichneten Dreiecksseiten, so dass diese folglich senkrecht zueinander sind. (Ergänzen Sie die Skizze!)
h) Weil in a) eine Äquivalenz vorliegt, gilt hier auch die Umkehrung:

- *In einem rechtwinkligen Dreieck verläuft der Halbkreis über der Hypotenuse durch den dritten Eckpunkt, ist also der (halbe) Umkreis.*

Begründung: Wir benutzen die Skizze auf dem Aufgabenblatt, nur ohne den Kreis. Das das Dreieck rechtwinklig ist, sind $u + v$ und $u - v$ orthogonal, also nach a) die Vektoren u und v gleich lang: Damit sind alle drei Eckpunkte vom Mittelpunkt der Hypotenuse gleich weit entfernt.

3) a) Wir berechnen den Schwerpunkt nach bekannter Formel:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

und erhalten $S = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.
b) Zur Berechnung des Höhenschnittpunktes erstellen wir zunächst Parameterdarstellungen für die Höhen. Dazu benötigen wir Richtungsvektoren, d. h. Vektoren, die senkrecht zu den Dreiecksseiten verlaufen. Wir bezeichnen einen Normalenvektor zur Dreiecksseite durch A, B mit n_c und sinngemäß in den anderen Fällen.
Ermittlung von Normalenvektoren:

$$\begin{aligned}
&A = (3, -1)\,, && B = (-1, 1)\,, && C = (0, 4)\,,\\
&\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, && n_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, &&\\
&\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, && n_b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, &&\\
&\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, && n_a = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}. &&
\end{aligned}$$

Parameterdarstellungen für die Höhen:

$$\begin{aligned}
\text{Höhe durch } A\text{:} \quad & \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r n_a = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},\\
\text{Höhe durch } B\text{:} \quad & \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + s n_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix},\\
\text{Höhe durch } C\text{:} \quad & \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OC} + t n_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Berechnung des Schnittpunktes der Höhen durch A und B:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Matrixdarstellung und Gauß-Umformung:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 3 & -5 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -14 & 2 \end{array}\right)$$

Die letzte Gleichung ergibt $-14s = 2 \iff s = -\frac{1}{7}$. (Die Berechnung von r ist höchstens zu Kontrollzwecken nötig.) Durch Einsetzen in die entsprechende Parameterdarstellung erhält man für den Höhenschnittpunkt H:

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix},$$

also $H = (-\frac{12}{7}, \frac{4}{7})$.
c) Der Umkreismittelpunkt M ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Diese verlaufen durch die Seitenmitten senkrecht zu den Dreiecksseiten. Wir ermitteln die Seitenmitten gemäß der Formel

$$\overrightarrow{OM_{AB}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

und erhalten

$$M_{AB} = (1,0)\,, \qquad M_{AC} = (\frac{3}{2},\frac{3}{2})\,, \qquad M_{BC} = (-\frac{1}{2},\frac{5}{2})\,.$$

Die Richtungen der Mittelsenkrechten sind durch die oben schon bestimmten Normalenvektoren gegeben, also erhalten wir die folgenden Parameterdarstellungen:

$$\begin{aligned}
&\text{Mittelsenkrechte zu } A,B\text{:} && \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM_{AB}} + rn_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
&\text{Mittelsenkrechte zu } B,C\text{:} && \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM_{BC}} + sn_a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
&\text{Mittelsenkrechte zu } A,C\text{:} && \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM_{AC}} + tn_b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Berechnung des Schnittpunktes M der Mittelsenkrechten zu B,C und der zu A,C (warum diese Wahl?):

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Matrixdarstellung und Gauß-Umformung:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 3 & -5 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -1 & -3 & -1 \\ 0 & -14 & -1 \end{array}\right)$$

(Man erkennt, dass bei dieser Rechnung dieselbe Koeffizientenmatrix auftritt, nur die rechte Seite hat sich geändert. Woran liegt das?)
Die letzte Gleichung ergibt $t = \frac{1}{14}$ und durch Einsetzen in die Parameterdarstellung erhält man

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 21+5 \\ 21+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ \frac{12}{7} \end{pmatrix},$$

also $M = (\frac{13}{7}, \frac{12}{7})$.
Ergänzend bestimmen wir den Radius des Umkreises:

$$r = d(M,A) = \sqrt{\frac{8^2}{7^2} + \frac{19^2}{7^2}} = \frac{1}{7}\sqrt{425} \approx 2{,}945\,.$$