Übungen zur Flächenberechnung aus dem Lehrbuch

Lambacher Schweizer, Analysis, Grundkursband, Klett-Verlag

1) **LS, p. 141, Nr. 3**

Ergebnisse:

a) $A = \frac{32}{3}$, b) $A = \frac{81}{8}$, c) $A = 9$,

d) $A = \frac{26}{3}$, e) $A = \frac{14}{3}$, f) $A = \frac{1}{10}$.

Lösung:

a) f hat nur eine Nullstelle bei 0, diese liegt nicht im Innern des Integrationsintervalls, also findet im Integrationsbereich kein Vorzeichenwechsel statt. Wir berechnen daher die gesuchte Fläche als Betrag des entsprechenden Integrals:

$$\int_0^4 (-0{,}5x^2)\,dx = \Big[-\frac{1}{6}x^3\Big]_0^4 = -\frac{4^3}{6} - 0 = -\frac{32}{3} \approx -10{,}67\,.$$

Damit ist die gesuchte Fläche $A = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$.

b) Wieder hat f nur eine Nullstelle bei 0, diese liegt nicht im Innern des Integrationsintervalls. Also ist der gesuchte Flächeninhalt der Betrag des folgenden Integrals:

$$\int_{-3}^0 0{,}5x^3\,dx = \Big[\frac{1}{8}x^4\Big]_{-3}^0 = 0 - \frac{1}{8}\cdot(-3)^4 = -\frac{81}{8} = -10{,}125\,.$$

Damit ist $A = \frac{81}{8} = 10{,}125$.

c) $f(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ hat die beiden Nullstellen ± 2. Keine liegt im Innern des Integrationsintervalls, also:

$$\int_{-1}^2 (x^2-4)\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 - 4x\Big]_{-1}^2 = \frac{8}{3} - 8 - (-\frac{1}{3}+4) = -9\,, \quad A = 9\,.$$

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 1 = -\frac{1}{3}(x^3+1)$ hat nur die Nullstelle -1. Diese liegt nicht im Integrationsintervall, also:

$$\int_1^3 (-\frac{1}{3}x^3 - 1)\,dx = \Big[-\frac{1}{12}x^4 - x\Big]_1^3 = -\frac{3^4}{12} - 3 - (-\frac{1}{12} - 1) = -\frac{26}{3}\,, \quad A = \frac{26}{3} \approx 8{,}67\,.$$

e) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x = \frac{1}{3}x(x^2-9)$ hat die Nullstellen 0 und ± 3. Keine davon liegt im Integrationsintervall, also:

$$\int_0^2 (\frac{1}{3}x^3 - 3x)dx = \Big[\frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2\Big]_0^2 = \frac{16}{12} - \frac{12}{2} = -\frac{14}{3}\,, \quad A = \frac{14}{3} \approx 4{,}67\,.$$

f) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ hat keine Nullstellen, aber bei 0 einen Pol. Dieser liegt nicht im Integrationsbereich, so dass die Fläche über das nachfolgende Integral berechnet werden kann:

$$\int_{-10}^{-5} (-\frac{1}{x^2})\,dx = \int_{-10}^{-5} (-x^{-2})\,dx = \Big[x^{-1}\Big]_{-10}^{-5} = \Big[\frac{1}{x}\Big]_{-10}^{-5} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = -\frac{1}{10}\,, \quad A = \frac{1}{10}\,.$$

2) **LS, p. 141, Nr. 4**

Ergebnisse:

a) $A = \frac{64}{3}$, b) $A = 18$, c) $A = \frac{4}{3}$,
d) $A = \frac{128}{15}$, e) $A = \frac{125}{12}$, f) $A = \frac{1}{2}$,
g) $A = \frac{3}{10}$, h) $A = \frac{37}{12}$, i) $A = \frac{9}{2}$.

Lösung:

Wir lösen die Aufgabe ohne Skizze der Graphen.
Da die vom Graphen und der x-Achse *eingeschlossene* Fläche gesucht ist, müssen wir die Integrationsgrenzen selbst bestimmen. Dies sind die Nullstellen von f.
a) $f(x) = 2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4)$ hat die Nullstellen ± 2. Da nur zwei Nullstellen vorliegen, braucht nur *ein* Integral berechnet zu werden:

$$\int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)\, dx = \Big[\frac{2}{3}x^3 - 8x\Big]_{-2}^{2} = \frac{16}{3} - 16 - (-\frac{16}{3} + 16) = -\frac{64}{3}\,.$$

Also ist der gesuchte Flächeninhalt $A = \frac{64}{3} \approx 21{,}33$.
Beachten Sie: Wegen der Achsensymmetrie von f und der Symmetrie der Integrationsgrenzen ist eine Vereinfachung der Rechnung möglich (siehe Übung (2), Aufgabe 2)).
b) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x = \frac{1}{2}x(x - 6)$ hat die Nullstellen 0 und 6. Wir erhalten

$$\int_{0}^{6} (\frac{1}{2}x^2 - 3x)\, dx = \Big[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\Big]_{0}^{6} = \frac{6^3}{6} - \frac{3}{2}\cdot 6^2 = -18\,, \quad A = 18\,.$$

c) $f(x) = (x - 1)^2 - 1 = x^2 - 2x = x(x - 2)$ hat die Nullstellen 0 und 2. Wir berechnen

$$\int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\, dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 - x^2\Big]_{0}^{2} = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}\,, \quad A = \frac{4}{3}\,.$$

d) $f(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4)$ hat die Nullstellen 0 und ± 2. Da bei der mittleren Nullstelle 0 *kein* VZW stattfindet (doppelte Nullstelle), hat f zwischen -2 und $+2$ einheitliches Vorzeichen und die gesuchte Fläche A ist gleich dem Betrag des Integrals:

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2)\, dx \right|\,.$$

Wir berechnen also

$$\int_{-2}^{2} (x^4 - 4^2)\, dx = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\Big]_{-2}^{2} = \frac{32}{5} - \frac{32}{3} - (-\frac{32}{5} + \frac{32}{3}) = -\frac{128}{15}$$

und erhalten als Fläche $A = \frac{128}{15} \approx 8{,}53$. (Auch hier lässt sich wieder die Symmetrie zur Vereinfachung benutzen.)
e) $f(x) = -\frac{1}{5}x^3 + 2x^2 - 5x = -\frac{1}{5}x(x^2 - 10x + 25) = -\frac{1}{5}x(x - 5)^2$ hat die Nullstellen 0 und 5. Also berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_{0}^{5} (-\frac{1}{5}x^3 + 2x^2 - 5x)\, dx &= \Big[-\frac{1}{20}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2\Big]_{0}^{5} = \Big[x^2\cdot(-\frac{x^2}{20} + \frac{2x}{3} - \frac{5}{2})\Big]_{0}^{5} \\ &= 25\cdot(-\frac{5}{4} + \frac{10}{3} - \frac{5}{2}) - 0 = 25\cdot\frac{-15 + 40 - 30}{12} = -\frac{125}{12}\,, \\ \Longrightarrow\ A = \frac{125}{12} \approx 10{,}42\,.\end{aligned}$$

f) $f(x) = -3x-7+\frac{4}{x^2} = \frac{-3x^3-7x^2+4}{x^2}$ hat nur eine Lücke, einen Pol bei 0 ohne VZW. Der kubische Zähler hat eine Nullstelle bei -1 (Koeffizienten des Zählers $3, 4, 7$ legen einen Versuch mit $x = \pm 1$ nahe). Polynomdivision ergibt $3x^3+7x^2-4 = (x+1)(3x^2+4x-4)$ und der quadratische Faktor hat die Nullstellen

$$3x^2+4x-4 = 0 \iff x = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3} \iff x = \frac{2}{3} \ \vee \ x = -2\,.$$

f hat zwar drei Nullstellen, aber dazwischen liegt ein Pol bei 0. Also schließt der Graph von f mit der x-Achse nur *ein* Flächenstück ein, und zwar in den Grenzen von -2 bis -1. Wir berechnen daher

$$\int_{-2}^{-1} (-3x-7+4x^{-2})\,dx = \Big[-\frac{3}{2}x^2-7x-4x^{-1}\Big]_{-2}^{-1} = -\frac{3}{2}+7+4-(-6+14+2) = -\frac{1}{2}\,.$$

und erhalten als von Graph und x-Achse eingeschlossener Fläche $A = \frac{1}{2}$.
g) $f(x) = x - x^4 = -x(x^3-1)$ hat nur die Nullstellen 0 und 1. Wir berechnen also

$$\int_0^1 (x-x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{5} = \frac{3}{10}\,, \quad A = \frac{3}{10}\,.$$

h) $f(x) = x^3-4x^2+3x = x(x^2-4x+3) = x(x-3)(x-1)$ (Vieta!) hat die Nullstellen 0, 1 und 3. Alle Nullstellen sind einfach und folglich mit VZW. Graph und x-Achse schließen also *zwei* Flächenstücke ein. Wir berechnen zunächst die beiden Integrale:

$$\int_0^1 (x^3-4x^2+3x)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big]_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-0 = \frac{5}{12}\,,$$

$$\int_1^3 (x^3-4x^2+3x)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big]_1^3 = \Big(\frac{81}{4}-36+\frac{27}{2}\Big) - \underbrace{\Big(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\Big)}_{=\frac{5}{12}\ \text{s.o.}}$$

$$= -\frac{9}{4}-\frac{5}{12} = -\frac{8}{3}\,.$$

Die gesuchte eingeschlossene Fläche ist die Summe der Beträge der beiden Integrale:

$$A = \frac{8}{3}+\frac{5}{12} = \frac{37}{12} \approx 3{,}08\,.$$

i) $f(x) = x(3-x^2)$ hat die Nullstellen 0 und $\pm\sqrt{3}$. Alle sind einfach, so dass jeweils ein VZW stattfindet: Der Graph von f schließt mit der x-Achse *zwei* Flächenstücke ein. Wegen der Punktsymmetrie von $f(x) = 3x - x^3$ genügt es eines dieser Flächenstücke zu berechnen:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (3x-x^3)\,dx = \Big[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\Big]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9}{2}-\frac{9}{4}-0 = \frac{9}{4}\,.$$

(Wegen der Punktsymmetrie ergibt sich $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} f = -\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} f$.) Die Gesamtfläche ist dann das Doppelte des soeben berechneten Wertes:

$$A = 2 \cdot \left| \int_0^{\sqrt{3}} f \right| = \frac{9}{2}\,.$$

3) **LS, p. 141, Nr. 5**

Ergebnisse:

a) $A = \frac{7}{2}$, b) $A = \frac{49}{6}$, c) $A = \frac{35}{6}$,

d) $A = 1$, e) $A = \frac{5}{8}$.

Lösung:

a) $f(x) = x^3 + 1$ hat nur die Nullstelle -1. Da diese Nullstelle im Innern des Integrationsbereiches liegt und dort ein VZW stattfindet ($x^3 + 1$ ist streng monoton wachsend), müssen zwei Integrale berechnet werden:

$$\int_{-2}^{-1} (x^3+1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{4} - 1 - (4-2) = -\frac{3}{4} - 2 = -\frac{11}{4}\,,$$
$$\int_{-1}^{0} (x^3+1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x\right]_{-1}^{0} = 0 - (-\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}\,.$$

Die gesuchte Fläche ist die Summe der Beträge der beiden Integrale:

$$A = \frac{11}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{2}\,.$$

b) $f(x) = x^2 - 3x = x(x-3)$ hat zwei Nullstellen 0 und 3, beide mit VZW. Beide liegen im vorgegebenen Integrationsbereich, also müssen *drei* Integrale berechnet werden:

$$\int_{-1}^{0} f = F(0) - F(-1)\,, \quad \int_{0}^{3} f = F(3) - F(0)\,, \quad \int_{3}^{4} f = F(4) - F(3)\,.$$

Dabei ist F irgendeine Stammfunktion von f. Wir erkennen, dass wir *vier* Werte von F berechnen müssen, die dann mit unterschiedlichen Vorzeichen kombiniert werden müssen. Mit $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ ergibt sich

$$F(-1) = -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{11}{6}\,, \quad F(0) = 0\,, \quad F(3) = 9 - \frac{27}{2} = -\frac{9}{2}\,, \quad F(4) = \frac{64}{3} - 24 = -\frac{8}{3}\,.$$

Dies ergibt die Integralwerte:

$$\int_{-1}^{0} f = F(0) - F(-1) = \frac{11}{6}\,,$$
$$\int_{0}^{3} f = F(3) - F(0) = -\frac{9}{2}\,,$$
$$\int_{3}^{4} f = F(4) - F(3) = -\frac{8}{3} + \frac{9}{2} = \frac{11}{6}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist die Summe der *Beträge* dieser Integralwerte, also

$$A = \frac{11}{6} + \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{49}{6} \approx 8{,}17\,.$$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$ hat die beiden Nullstellen 0 und 2. Da bei 0 aber kein VZW vorliegt (doppelte Nullstelle), braucht nur 2 berücksichtigt zu werden. Wir berechnen also *zwei* Integrale

$$\int_{-1}^{2} f = F(2) - F(-1)\,, \quad \int_{2}^{3} f = F(3) - F(2)\,.$$

Mit $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$ erhalten wir

$$F(-1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}\,,\ F(2) = 4 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}\,,\ F(3) = \frac{81}{4} - 18 = \frac{9}{4}\,.$$

Dies ergibt die Integralwerte

$$\int_{-1}^{2} f = F(2) - F(-1) = -\frac{4}{3} - \frac{11}{12} = -\frac{9}{4}\,,$$
$$\int_{2}^{3} f = F(3) - F(2) = \frac{9}{4} - (-\frac{4}{3}) = \frac{43}{12}\,.$$

Damit ist der gesuchte Flächeninhalt $A = \frac{9}{4} + \frac{43}{12} = \frac{35}{6} \approx 5{,}83$.
d) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{x^2-1}{x^2}$ hat bei 0 einen Pol und bei ± 1 zwei einfache Nullstellen. Davon liegt nur $+1$ im Integrationsbereich. Wir berechnen also die Integrale

$$\int_{0,5}^{1} f = F(1) - F(\frac{1}{2})\,, \quad \int_{1}^{2} f = F(2) - F(1)\,.$$

Mit $f(x) = x^{-2} - 1$ und $F(x) = -x^{-1} - x = -\frac{1}{x} - x$ ergibt sich

$$F(\frac{1}{2}) = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}\,,\ F(1) = -2\,,\ F(2) = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}\,.$$

Dies ergibt die Integralwerte

$$\int_{0,5}^{1} f = -2 - (-\frac{5}{2}) = \frac{1}{2}\,, \quad \int_{1}^{2} f = -\frac{5}{2} - (-2) = -\frac{1}{2}$$

und den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
e) $f(x) = \frac{1}{x^2} - x = \frac{1-x^3}{x}$ hat einen Pol bei 0 und nur eine Nullstelle bei 1 ($1 - x^3$ ist streng monoton). Im Innern dem Integrationsbereiches liegt keine Nullstelle, also berechnen wir nur das eine Integral

$$\int_{0,5}^{1} (\frac{1}{x^2} - x)\,dx = \int_{0,5}^{1} (x^{-2} - x)\,dx = \Big[-x^{-1} - \frac{1}{2}x^2 \Big]_{0,5}^{1}$$
$$= \Big[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x^2 \Big]_{0,5}^{1} = -1 - \frac{1}{2} - (-2 - \frac{1}{8}) = \frac{5}{8}\,.$$

Da dieser Wert positiv ist, ist dies zugleich der gesuchte Flächeninhalt: $A = \frac{5}{8}$.
f) entfällt vereinbarungsgemäß.

4) **LS, p. 144, Nr. 3**
Ergebnisse:
a) $A = \frac{21}{4}$, b) $A = 2$, c) $A = \frac{20}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \approx 4{,}78$.

Lösung:
a) Beide Funktionen sind über dem Intervall definiert. Die Fläche zwischen den zwei

Graphen ist gleich der Fläche zwischen der Differenzfunktion $h = f - g$ und der x-Achse (in den vorgegebenen Grenzen). Wir bestimmen die Differenzfunktion

$$h(x) = x^2 + 1 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{3}{4}x^2 + 1\,.$$

Diese hat keine Nullstellen und nur positive Werte, also gilt

$$A = \int_{-1}^{2} (\frac{3}{4}x^2 + 1)\, dx = \Big[\frac{1}{4}x^3 + x\Big]_{-1}^{2} = 2 + 2 - (-\frac{1}{4} - 1) = \frac{21}{4}\,.$$

b) Wieder liegen keine Definitionslücken vor. Die gesuchte Fläche zwischen den Graphen von f und g ist gleich der Fläche zwischen dem Graphen von $h = f - g$ und der x-Achse (in den gegebenen Grenzen). Die Differenzfunktion ist

$$h(x) = x^3 - x - 1\,.$$

Wir untersuchen h auf Nullstellen. h hat keine *rationalen* Nullstellen, da nur ± 1 in Frage kämen, aber keine Nullstellen sind. Eine exakte Bestimmung der Nullstellen ist also nicht möglich. Wir untersuchen die Lage evtl. Extrempunkte: $h'(x) = 3x^2 - 1$ hat zwei Nullstellen $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Dies sind Extremstellen von h (verschiedene Nullstellen der quadratischen Ableitung, also einfach). Die Extrem*werte* sind beide negativ:

$$h(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 < 0\,,\ h(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 < 0\,.$$

Also liegen die Extrempunkte beide unter der x-Achse. h hat also nur eine Nullstelle und wegen $h(1) < 0$ muss diese im Bereich $x > 1$ liegen. Also hat h über dem Intervall $[-1, 1]$ *keine* Nullstelle. Wir berechnen daher

$$\int_{-1}^{1} (x^3 - x - 1)\, dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - x\Big]_{-1}^{1} = (\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1) = -2$$

und die gesuchte Fläche ist $A = 2$.
c) Beide Funktionen sind über dem Intervall I definiert (der Pol 0 von g liegt außerhalb). Wir bestimmen die Differenzfunktion

$$h(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 - \frac{1}{2x^2} = \frac{4x^4 - 1}{2x^2}$$

und ihre Nullstellen:

$$h(x) = 0 \iff x^4 = \frac{1}{4} \iff x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\,.$$

Die positive Nullstelle $c = \sqrt{\frac{1}{2}}$ liegt im Integrationsintervall I, denn

$$\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{1}{2}} < 1\,.$$

Wir müssen also zwei Integrale berechnen und ihre Beträge addieren:

$$\int_{0,5}^{c} h = H(c) - H(\frac{1}{2})\,, \quad \int_{c}^{2} h = H(2) - H(c)$$

mit irgendeiner Stammfunktion H von h. Mit $H(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2x}$ erhält man

$$H(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12} + 1 = \frac{13}{12}\,, \quad H(2) = \frac{16}{3} + \frac{1}{4} = \frac{67}{12}\,,$$
$$H(c) = H(\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}\cdot(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,.$$

Dies ergibt

$$\int_{0,5}^{c} h = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{13}{12} \approx -0{,}14\,, \quad \int_{c}^{2} h = \frac{67}{12} - \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 4{,}64\,.$$

und als gesuchten Flächeninhalt

$$A = \frac{13}{12} - \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{67}{12} - \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{20}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \approx 4{,}78\,.$$

5) **LS, p. 144, Nr. 4**
Ergebnisse:
a) $A = \frac{8}{3}$, b) $A = \frac{4}{3}$, c) $A = \frac{27}{16}$,
d) $A = 8$, e) $A = \frac{37}{96}$, f) $A = \frac{29}{5} = 5{,}8$.

Lösung:
a) Beide Funktionen sind überall definiert. Die gesuchte Fläche ist gleich der Fläche, die vom Graphen der Differenzfunktion $h = f - g$ und der x-Achse eingeschlossen wird. Wir bestimmen die Differenzfunktion

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - (-x^2 + 4x) = 2x^2 - 4x = 2x(x-2)\,.$$

Deren Nullstellen sind 0 und 2. Also berechnen wir

$$\int_0^2 (2x^2 - 4x)\,dx = \Big[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2\Big]_0^2 = \frac{16}{3} - 8 - 0 = -\frac{8}{3}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist daher $A = \frac{8}{3}$.
b) Wieder liegen keine Definitionslücken vor. Wir bestimmen die Differenzfunktion

$$h(x) = x^2 + x^3 - 3x^2 = x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)\,.$$

Diese hat zwei Nullstellen: 0 und 2. Wir berechnen

$$\int_0^2 (x^3 - 2x^2)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\Big]_0^2 = 4 - \frac{16}{3} - 0 = -\frac{4}{3}$$

und der gesuchte Flächeninhalt ist $A = \frac{4}{3}$.

c) 0 ist ein Pol von f. Wir untersuchen die Differenzfunktion auf Nullstellen:

$$h(x) = -\frac{1}{x^2} - 2{,}5x + 5{,}25 = 0 \iff -\frac{1}{x^2} - \frac{5}{2}x + \frac{21}{4} = 0 \quad | \cdot 4x^2$$
$$\iff -4 - 10x^3 + 21x^2 = 0 \iff 10x^3 - 21x^2 + 4 = 0\,.$$

Mögliche ganzzahlige Nullstellen sind die Teiler von 4. Wir finden $+2$ als Lösung. Polynomdivision ergibt $10x^3 - 21x^2 + 4 = (x-2)(10x^2 - x - 2)$ und der quadratische Term hat die Nullstellen

$$x = \frac{1}{20} \pm \sqrt{\frac{1}{400} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{20} \pm \sqrt{\frac{81}{400}} = \frac{1}{20} \pm \frac{9}{20} \iff x = \frac{1}{2} \;\vee\; x = -\frac{2}{5}\,.$$

Insgesamt hat h also drei Nullstellen, aber dazwischen einen Pol bei 0. Daher ist nur *ein* Flächenstück zu untersuchen, nämlich zwischen den Nullstellen $\frac{1}{2}$ und 2. Wir berechnen daher

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{5}{2}x + \frac{21}{4}\right) dx = \left[\frac{1}{x} - \frac{5}{4}x^2 + \frac{21}{4}x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \left(\frac{1}{2} - 5 + \frac{21}{2}\right) - \left(2 - \frac{5}{16} + \frac{21}{8}\right) = \frac{27}{16} = 1{,}6875\,.$$

Dies ist zugleich der gesuchte Flächeninhalt.
d) Die Differenzfunktion

$$h(x) = x^3 - x - 3x = x(x^2 - 4)$$

hat die drei Nullstellen 0 und ± 2. Daher schließt der Graph von h mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein. Wegen der Punktsymmetrie gilt

$$\int_{-2}^{0} h = -\int_{0}^{2} h \quad \text{und folglich} \quad A = 2\left|\int_{0}^{2} h\right|\,.$$

Wir berechnen also

$$\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2} = 4 - 8 - 0 = -4\,.$$

Die Fläche, die von den Graphen von f und g eingeschlossen wird, beträgt $A = 2 \cdot 4 = 8$.

e) Wieder untersuchen wir die Differenzfunktion

$$h(x) = x^3 - x - (-x^3 + x^2) = 2x^3 - x^2 - x = x(2x^2 - x - 1)\,.$$

Damit ist 0 eine Nullstelle. Außerdem erkennt man $+1$ als Nullstelle (Koeffizienten 2, -1, -1). Damit erhält man die Faktorisierung

$$h(x) = x(2x^2 - x - 1) = x(x-1)(2x+1)$$

und 0, 1, $-\frac{1}{2}$ als Nullstellen von h. Wir berechnen also zwei Integrale und bestimmen dazu eine Stammfunktion $H(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ sowie die Werte $H(0) = 0$ und

$$H(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{32} + \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = \frac{3 + 4 - 12}{96} = -\frac{5}{96}\,,$$
$$H(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\,.$$

Also erhält man die Integralwerte

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} h = 0 - (-\frac{5}{96}) = \frac{5}{96}\,, \quad \int_0^2 h = -\frac{1}{3}$$

und schließlich die gesuchte Fläche $A = \frac{5}{96} + \frac{1}{3} = \frac{37}{96} \approx 0{,}39$.
f) Wir betrachten diesmal die Differenzfunktion

$$h(x) = g(x) - f(x) = x^2 + 2x - (-x^4 + 4x^2) = x^4 - 3x^2 + 2x = x(x^3 - 3x + 2)\,.$$

Wieder erkennt man neben der 0 die Nullstelle +1 und Polynomdivision sowie Faktorisierung nach Vieta ergibt

$$h(x) = x(x^3 - 3x + 2) = x(x-1)(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x-1)(x+2) = x(x-1)^2(x+2)\,.$$

Damit hat h die Nullstellen -2, 0 und $+1$. Wir müssen also zwei Integrale berechnen. Wir wählen $H(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + x^2$ als Stammfunktion von h und berechnen

$$H(-2) = \frac{28}{5}\,, \quad H(0) = 0\,, \quad H(1) = \frac{1}{5}$$

sowie

$$\int_{-2}^{0} h = 0 - \frac{28}{5} = -5{,}6\,, \quad \int_0^1 h = \frac{1}{5} = 0{,}2\,.$$

Die gesuchte Fläche ist die Summe der Beträge $A = 5{,}8$.

6) **LS, p. 144, Nr. 5** (Druckfehler in c): $P = (0{,}5; 3{,}75)$.)
Ergebnisse:
a) $A = \frac{9}{8}$, b) $A = \frac{12}{5}$, c) $A = \frac{351}{512}$.

Lösung:
a) Wir bestimmen zunächst die Tangentenfunktion t zum gegebenen Berührpunkt. Es ist $f'(x) = x$, also

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 4{,}5 + 3(x - 3) = 3x - 4{,}5\,.$$

Diese schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 1{,}5$ (vgl. Skizze im Buch). Die gesuchte Fläche berechnet sich aus der Fläche zwischen Graph von f und der x-Achse in den Grenzen von 0 bis 3 abzgl. der Dreiecksfläche unter der Tangente (im Bereich 1,5 bis 3). Also berechnen wir zunächst

$$\int_0^3 \frac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^3 = \frac{9}{2}\,.$$

Die Dreiecksfläche unter der Tangente ist $A_2 = \frac{1}{2} \cdot (3 - 1{,}5) \cdot 4{,}5 = 3{,}375$. Damit ist die gesuchte Fläche

$$A = \frac{9}{2} - 3{,}375 = 1{,}125\,.$$

b) Die Funktion f hat nur eine Nullstelle bei 2 und sonst positive Werte. Wir bestimmen die Tangentenfunktion zu f an der Stelle 0

$$f(x) = (x-2)^4 \implies f'(x) = 4(x-2)^3 \implies t(x) = f(0) + f'(0)x = 16 - 32x\,.$$

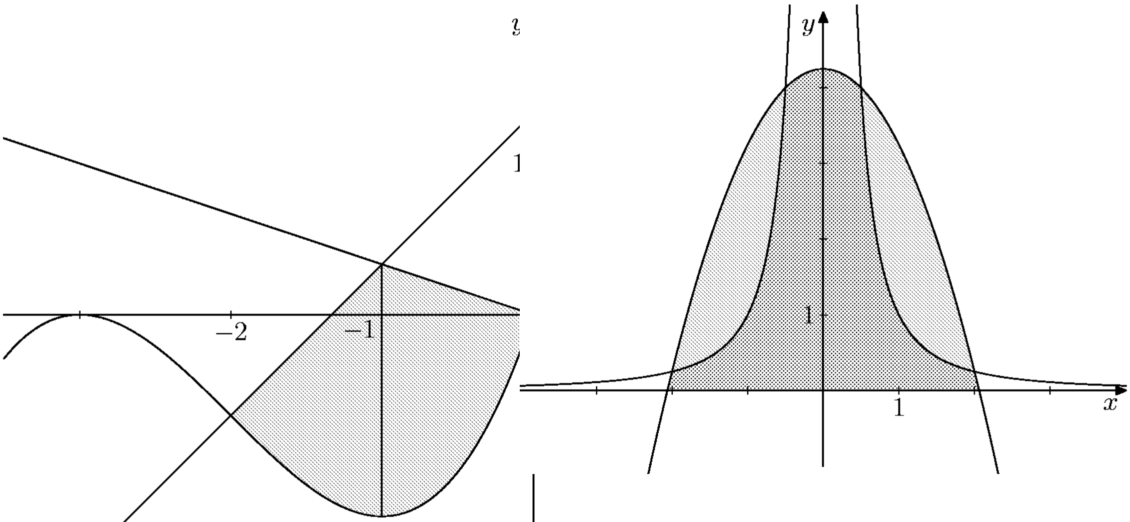
Die Tangente schneidet die x-Achse an der Stelle $\frac{1}{2}$. Wir berechnen also

$$A_1 = \int_0^2 (x-2)^4 \, dx = \Big[\frac{1}{5}(x-2)^5\Big]_0^2 = 0 - (-\frac{32}{5}) = 6{,}4$$

und substrahieren die von der Tangente gebildete Dreiecksfläche (vgl. Skizze)

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 0) \cdot 16 = 4\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist daher $A = A_1 - A_2 = 2{,}4$.



c) Hier liegt ein Druckfehler vor: Der angegebene Punkt P liegt nicht auf dem Graphen von f. Gemeint ist $P = (0{,}5; 3{,}75)$.
$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$ hat die Nullstellen ± 2 sowie einen Pol bei 0. Wir bestimmen die Tangentenfunktion t von f im Punkt P

$$f(x) = x^{-2} - \frac{1}{4} \implies f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$
$$\implies t(x) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{15}{4} - 16(x - \frac{1}{2}) = \frac{47}{4} - 16x\,.$$

Die Nullstelle der Tangente ist folglich $\frac{47}{64}$. Wir berechnen

$$A_1 = \int_{\frac{1}{2}}^2 (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4})\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 (x^{-2} - \frac{1}{4})\, dx = \Big[-\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x\Big]_{\frac{1}{2}}^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - (-2 - \frac{1}{8}) = \frac{9}{8}$$

und subtrahieren die Dreiecksfläche

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot (\frac{47}{64} - \frac{1}{2}) \cdot \frac{15}{4} = \frac{225}{512}\,.$$

Die gesuchte Fläche ist demzufolge

$$A = A_1 - A_2 = \frac{9}{8} - \frac{225}{512} = \frac{351}{512} = 0{,}685546875\,.$$

7) **LS, p. 144, Nr. 6**
Ergebnisse:
a) $A = 2$, b) $A = \frac{75}{8}$, c) $A = 4$.

Lösung:
Alle Funktionen sind kubisch, ihre zweite Ableitung folglich linear, so dass sie alle genau einen Wendepunkt haben. Man bestimmt dann die Normalengleichung $n(x)$ zur Wendestelle und die Differenzfunktion $h(x) = f(x) - n(x)$. Eine Nullstelle dieser (kubischen!) Funktion ist natürlich die Wendestelle. Mittels Polynomdivision wird man auf eine quadratische Gleichung geführt, die in den 3 Teilaufgaben jeweils zwei Lösungen hat. Es entstehen so 3 Nullstellen, die *zwei* Flächenstücke begrenzen. Deren Flächeninhalte müssen dann bestimmt werden.
a) Es ist $f'(x) = -3x^2 + 1$ und $f''(x) = -6x$. Die Wendestelle von f ist daher 0 und die Wendenormale der Graph von

$$n(x) = f(0) - \frac{1}{f'(0)}(x - 0) = -x\,.$$

Gesucht ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und der Wendenormale, also betrachten wir die Differenzfunktion

$$h(x) = f(x) - n(x) = -x^3 + x - (-x) = -x^3 + 2x = -x(x^2 - 2)\,.$$

Die Nullstellen sind 0 und $\pm\sqrt{2}$. Wegen der Punktsymmetrie von h genügt es ein Integral zu berechnen:

$$\int_0^{\sqrt{2}} (-x^3 + 2x)\,dx = \Big[-\frac{1}{4}x^4 + x^2\Big]_0^{\sqrt{2}} = -1 + 2 = 1\,.$$

Die gesuchte Fläche ist also $A = 2 \cdot 1 = 2$.
b) Es ist $f'(x) = -x^2 + 2$ und $f''(x) = -2x$. Wieder ist die Wendestelle 0 und die Wendenormale gegeben als Graph von

$$n(x) = f(0) - \frac{1}{f'(0)}(x - 0) = -\frac{1}{2}x\,.$$

Die Differenzfunktion ist

$$h(x) = f(x) - n(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x = -x(x^2 - \frac{15}{2})\,.$$

Sie ist wieder punktsymmetrisch und hat die Nullstellen 0 sowie $\pm\sqrt{\frac{15}{2}}$. Wir berechnen wieder nur ein Integral

$$\int_0^{\sqrt{\frac{15}{2}}} (-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x)\,dx = \Big[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{4}x^2\Big]_0^{\sqrt{\frac{15}{2}}} = -\frac{75}{16} + \frac{75}{8} = \frac{75}{16}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist demzufolge

$$A = 2 \cdot \frac{75}{16} = \frac{75}{8}\,.$$

c) Es ist $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2}$ und $f''(x) = -3x - 3$. Also hat f die Wendestelle -1 und die Wendenormale ist Graph von

$$n(x) = f(-1) - \frac{1}{f'(-1)}(x+1) = -1 - (x+1) = -x - 2\,.$$

Die Differenzfunktion

$$h(x) = f(x) - n(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x^3 + 3x^2 - x - 3)$$

muss natürlich an der Wendestelle -1 eine Nullstelle haben. Außerdem erkennt man auch $+1$ als Nullstelle (Koeffizienten 1, 3, -1, -3) und dann notwendig als dritten Linearfaktor $x + 3$. Die Nullstellen sind also ± 1 und -3. Wir bestimmen eine Stammfunktion H von h und berechnen deren Werte an den Integrationsgrenzen:

$$H(x) = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\,, \quad H(-3) = -\frac{81}{8} + \frac{27}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{8}\,,$$
$$H(-1) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{7}{8}\,, \quad H(1) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

und damit

$$\int_{-3}^{-1} h = -\frac{7}{8} - \frac{9}{8} = -2\,, \quad \int_{-1}^{1} h = \frac{9}{8} + \frac{7}{8} = 2\,.$$

Die gesuchte Fläche ist demzufolge $A = 4$. (Die betragliche Übereinstimmung der beiden Integrale ist Folge einer Symmetrie, aber nicht zum Koordinatenursprung, sondern zum Wendepunkt.)

8) **LS, p. 144, Nr. 7**
Ergebnisse:
a) $A = \frac{32}{3}$, b) $V = \frac{64000}{3}$ Kubikmeter, c) $\approx 35{,}4\%$.

Lösung:
a) Die gesuchte Fläche ist die Differenz aus der Rechtecksfläche $A_1 = 8 \cdot 2 = 16$ und der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse über dem Intervall $[-4; 4]$. Wegen der Symmetrie berechnen wir

$$\int_0^4 \frac{1}{8}x^2\,dx = \left[\frac{1}{24}x^3\right]_0^4 = \frac{8}{3}\,.$$

Damit ist die gesuchte Fläche $A = 16 - 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$.
(Alternative: Man berechnet die gesuchte Fläche als Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = \frac{1}{8}x^2$ und dem von $g(x) = 2$, der Parallelen zur x-Achse in der Höhe 2.)
b) Das Volumen ist das Produkt aus Querschnittsfläche A und Länge $l = 2000$ des Kanals, also $V = 2000 \cdot \frac{32}{3} = \frac{64000}{3} \approx 21333$ Kubikmeter.
c) Die Querschnittsfläche bei halbem Wasserstand ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und dem Graphen von $g(x) = 1$. Die Differenzfunktion ist

$$h(x) = g(x) - f(x) = 1 - \frac{1}{8}x^2 = -\frac{1}{8}(x^2 - 8)\,.$$

Ihre Nullstellen sind $\pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$. Wegen der Achsensymmetrie von h berechnen wir nur

$$\int_0^{\sqrt{8}} (1 - \frac{1}{8}x^2)\,dx = \Big[x - \frac{1}{24}x^3\Big]_0^{\sqrt{8}} = \sqrt{8} - \frac{1}{3}\sqrt{8} = \frac{2}{3}\sqrt{8}\,.$$

Der Flächeninhalt ist das Doppelte, also $A = \frac{4}{3}\sqrt{8}$. Sein Anteil an der in a) bestimmten Gesamtfläche ist

$$\frac{\frac{4}{3}\sqrt{8}}{\frac{32}{3}} = \frac{1}{8}\sqrt{8} = \frac{1}{4}\sqrt{2} \approx 0{,}354 = 35{,}4\%\,.$$

Dies ist zugleich das Verhältnis der Wassermengen.

9) **LS, p. 144, Nr. 8**
Ergebnisse:

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$, b) $A = 18$, c) $V = 88$. Korr!

Lösung:
a) Wir wählen das Koordinantensystem so, dass die x-Achse auf dem Boden liegt und die y-Achse die Symmetrieachse der Parabel ist.
1. Mit der Scheitelpunktsform setzt man an $f(x) = ax^2 + \frac{9}{2}$ und bestimmt aus der Nullstelle 3 den Wert von a:

$$0 = a \cdot 3^2 + \frac{9}{2} \iff a = -\frac{1}{2}\,.$$

2. Wir gehen von den beiden Nullstellen aus und setzen an $f(x) = a(x-3)(x+3) = a(x^2-9)$ und berechnen aus dem y-Achsenabschnitt a:

$$\frac{9}{2} = a(0^2 - 9) = -9a \iff a = -\frac{1}{2}\,.$$

3. Wir setzen f als quadratische Funktion mit bekanntem y-Achsenabschnitt an: $f(x) = ax^2 + bx + \frac{9}{2}$. Wegen der Achsensymmetrie ist $b = 0$ und man erhält wie in 1. $f(x) = ax^2 + \frac{9}{2}$ und dann a.
b) Die gesuchte Fläche ist das Doppelte des folgenden Integrals:

$$\int_0^3 (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2})\,dx = \Big[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{9}{2}x\Big]_0^3 = -\frac{9}{2} + \frac{27}{2} = 9\,,$$

also $A = 18$.
c) Der Querschnitt des Brückebauwerks ist ein Trapez mit der Fläche $A_2 = 8\cdot 5 = 40$. Die Querschnittsfläche des Mauerwerks ist also $A_2 - A = 40 - 18 = 22$ und das Bauvolumen daher $V = 22 \cdot 4 = 88$ Kubikmeter. Korr!

Vermischte Übungen aus dem Lehrbuch

Lambacher Schweizer, Analysis, Grundkursband, Klett-Verlag

1) **LS, p. 145, Nr. 1**
   Ergebnisse:
   a) $= \frac{9}{4}$, b) $A = \frac{8}{3}$, c) $A = \frac{8}{3}$, d) $A = 2$.

Lösung:
a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x = \frac{1}{3}x(x^2 + 6x + 9) = \frac{1}{3}x(x+3)^2$ hat zwei Nullstellen: 0 und -3. (Dies bestätigt auch der angegebene Graph.) Wir berechnen also

$$\int_{-3}^{0} (\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x)\,dx = \left[\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{0} = 0 - (\frac{27}{4} - 18 + \frac{27}{2}) = -\frac{9}{4}$$

und der gesuchte Flächeninhalt ist $A = \frac{9}{4}$.
b) Die Nullstellen von f sind bereits berechnet worden. Dabei ist -3 eine doppelte Nullstelle, also ohne VZW, so dass f im angegebenen Intervall *keinen* VZW hat und daher der gesuchte Flächeninhalt der Betrag des Integrals ist:

$$\int_{-4}^{0} (\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x)\,dx = \left[\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-4}^{0} = 0 - (\frac{64}{3} - \frac{128}{3} + 24) = -\frac{8}{3}\,.$$

Der Flächeninhalt ist nun $A = \frac{8}{3}$.
c) Wir berechnen die Differenzfunktion

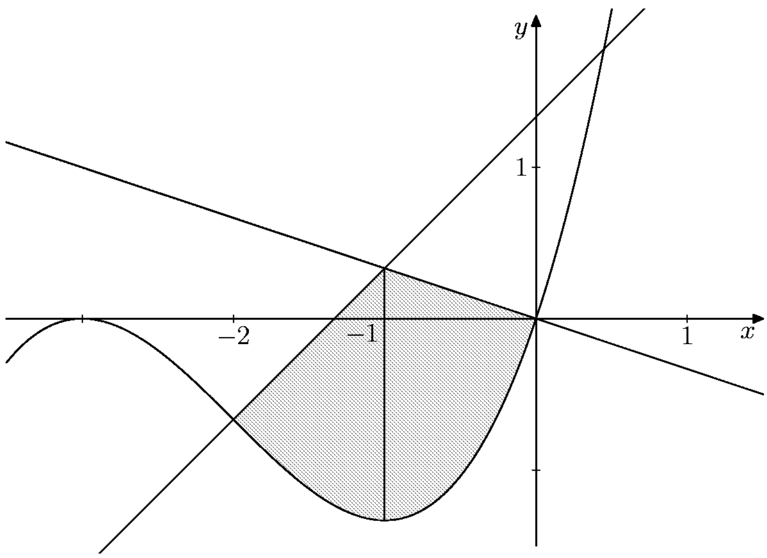
$$h(x) = f(x) - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{8}{3}x = \frac{1}{3}x(x^2 + 6x + 8) = \frac{1}{3}x(x+2)(x+4) \quad \text{(Vieta!)}\,.$$

Diese hat die 3 Nullstellen 0, -2 und -4. Wir berechnen also zwei Integrale:

$$\int_{-4}^{-2} (\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{8}{3}x)\,dx = \left[\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2\right]_{-4}^{-2} = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}\,,$$
$$\int_{-2}^{0} (\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{8}{3}x)\,dx = \left[\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}\,.$$

Damit ist die gesuchte Fläche $A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.
d) Wir berechnen die beiden Normalen und ergänzen die Skizze. Es ist $f'(x) = x^2 + 4x + 3$. Damit hat die Normale im Punkt $(0, f(0)) = (0,0)$ den Anstieg $-\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{3}$ und die Gleichung $n_1(x) = -\frac{1}{3}x$. Die Normale im Punkt $(-2, f(-2)) = (-2, -\frac{2}{3})$ den

Anstieg $-\frac{1}{f'(-2)} = 1$ die Gleichung $n_2(x) = -\frac{2}{3} + (x+2) = x + \frac{4}{3}$.



Wir berechnen zunächst die Schnittstelle zwischen den beiden Normalen:

$$n_1(x) = n_2(x) \iff -\frac{1}{3}x = \frac{4}{3} + x \iff x = -1\,.$$

Damit berechnen wir die gesuchte Fläche in zwei Teilen:

$$\int_{-2}^{-1} (n_2(x) - f(x))\,dx = \int_{-2}^{-1} (x + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x)\,dx$$
$$= \int_{-2}^{-1} (-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 2x + \frac{4}{3})\,dx = \Big[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}x \Big]_{-2}^{-1} = \frac{11}{12}$$
$$\int_{-1}^{0} (n_1(x) - f(x))\,dx = \int_{-2}^{-1} (-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x)\,dx$$
$$= \int_{-2}^{-1} (-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{4}{3}x)\,dx = \Big[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 \Big]_{-1}^{0} = \frac{13}{12}\,.$$

Die gesuchte Fläche ist also $A = \frac{11}{12} + \frac{13}{12} = 2$.

2) **LS, p. 145, Nr. 2**
Ergebnisse:

a) $A = \frac{8}{3}$, b) $A = \frac{343}{48}$, c) $A = \frac{19}{48}$.

Lösung:
a) $A = A_5 + A_4$. Berechnung: Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse sind -2 und 0. Wir berechnen also zwei Integrale:

$$\int_{-3}^{-2} (x^2 + 2x)\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 + x^2\Big]_{-3}^{-2} = -\frac{8}{3} + 4 - (-9 + 9) = \frac{4}{3}\,,$$
$$\int_{-2}^{0} (x^2 + 2x)\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 + x^2\Big]_{-2}^{0} = -\frac{4}{3}\,.$$

Damit ist $A_5 = \frac{4}{3}$, $A_4 = \frac{4}{3}$ und $A = \frac{8}{3}$.
b) $A = A_1 + A_2 + A_4$. Wir betrachten die Differenzfunktion

$$h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - (x^2 + 2x) = -x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}\,.$$

Diese hat die Nullstellen (siehe auch die gegebene Skizze) -3 und $\frac{1}{2}$. Wir berechnen also

$$\int_{-3}^{\frac{1}{2}} (-x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2})\,dx = \Big[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\Big]_{-3}^{\frac{1}{2}}$$
$$= -\frac{1}{24} - \frac{5}{16} + \frac{3}{4} - (9 - \frac{45}{4} - \frac{9}{2}) = \frac{19}{48} + \frac{27}{4} = \frac{343}{48}\,.$$

Also $A = \frac{343}{48}$.
c) $A = A_2$. Die Schnittstelle von Gerade und Graph im ersten Quadranten ist 1/2 (s.o.) und wir berechnen wieder ein Integral über die Differenzfunktion

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} (-x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2})\,dx = \Big[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\Big]_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{19}{48}\,.$$

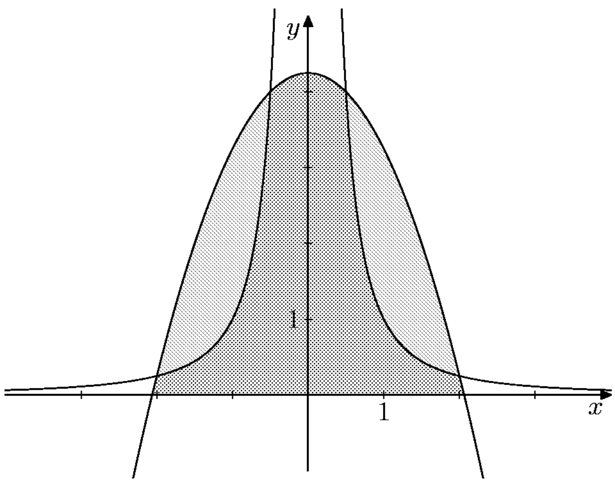
Also $A = A_3 = \frac{19}{48}$.

3) **LS, p. 145, Nr. 3**
Ergebnisse:

a) $A = \frac{9}{2}$, b) $A = A = \frac{17}{6}\sqrt{17} - \frac{9}{2}$.

Lösung:
Wir skizzieren zunächst die beiden Graphen. Beide Funktionen sind achsensymmetrisch, f ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (0, \frac{17}{4})$, g hat einen Pol bei 0 und überall positive Werte und Grenzwert 0 im Unendlichen. Die Nullstellen von f sind $\pm\sqrt{\frac{17}{4}}$ und die Schnittstellen beider Funktionen sind

$$\frac{1}{x^2} = -x^2 + \frac{17}{4} \iff 4x^4 - 17x^2 + 4 = 0 \iff z = x^2 \ \wedge\ 4z^2 - 17z + 4 = 0$$
$$\iff x^2 = z = \frac{17}{8} \pm \sqrt{\frac{289}{64} - 1} = \frac{17}{8} \pm \frac{15}{8}$$
$$\iff x^2 = 4 \ \vee\ x^2 = \frac{1}{4} \iff x = \pm 2 \ \vee\ x = \pm\frac{1}{2}$$



a) Die Differenzfunktion $h(x) = f(x) - g(x)$ hat zwar 4 Nullstellen, aber wegen des Pols 0 sind nur zwei Integrale zu berechnen, die wegen der Achsensymmetrie von h identisch sind:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} (\frac{1}{x^2} + x^2 - \frac{17}{4})\, dx = \Big[-\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{4}x \Big]_{\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{1}{2} + \frac{8}{3} - \frac{17}{2} - (-2 + \frac{1}{24} - \frac{17}{8}) = -\frac{9}{4}\,.$$

Der Flächeninhalt der beiden hell schraffierten Flächenstücke zusammen ist also $\frac{9}{2}$.

b) Das in b) beschriebene Flächenstück ist dunkel schraffiert. Zu seiner Bestimmung berechnen wir zunächst die Fläche zwischen der Parabel und der x-Achse (wegen der Symmetrie) in den Grenzen von 0 bis $\sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{17}}{2}} (-x^2 + \frac{17}{4})\, dx = \Big[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{17}{4}x \Big]_0^{\frac{\sqrt{17}}{2}} = -\frac{17}{24}\sqrt{17} + \frac{17}{8}\sqrt{17} = \frac{17}{12}\sqrt{17}\,.$$

Die Fläche zwischen Parabel und x-Achse beträgt also $\frac{17}{6}\sqrt{17}$. Subtrahiert man hiervon die in a) bestimmte Fläche, so erhält man

$$A = \frac{17}{6}\sqrt{17} - \frac{9}{2}\,.$$

4) **LS, p. 145, Nr. 4**
Ergebnisse:

a) $A = \frac{32}{3}$, b) $A = \frac{9}{4}$, c) $A = \frac{32}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{8} \approx 6{,}9$.

Lösung:

a) Gesucht ist die Fläche zwischen $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $g(x) = 4$ in den Grenzen von 0 bis zur positiven Schnittstelle:

$$f(x) = g(x) \iff \frac{1}{4}x^2 = 4 \iff x = \pm 4\,.$$

Also berechnen wir

$$\int_0^4 (4 - \frac{1}{4}x^2)\, dx = \Big[4x - \frac{1}{12}x^3 \Big]_0^4 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}\,.$$

Damit ist der orange gefärbte Flächeninhalt $A = \frac{32}{3}$.

b) Fläche zwischen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $g(x) = 1$ in den Grenzen von der positiven Schnittstelle 1 bis zur oberen Grenze 4:

$$\int_1^4 (1 - \frac{1}{x^2})\, dx = \int_1^4 (1 - x^{-2})\, dx = \Big[x + x^{-1} \Big]_1^4 = 4 + \frac{1}{4} - (1+1) = \frac{9}{4}\,.$$

Also ist $A = \frac{9}{4}$.

c) Die beiden Parallelen zur x-Achse schneiden den Graphen an den Stellen $\sqrt{8}$ und 4. Wir berechnen zunächst die Fläche zwischen dem Graphen von f und der Parallelen $y = 2$ in den Grenzen von $\sqrt{8}$ bis 4:

$$\int_{\sqrt{8}}^4 (\frac{1}{4}x^2 - 2)\, dx = \Big[\frac{1}{12}x^3 - 2x \Big]_{\sqrt{8}}^4 = \frac{16}{3} - 8 - (\frac{2}{3}\sqrt{8} - 2\sqrt{8}) = -\frac{8}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{8} \approx 1{,}1\,.$$

Diesen subtrahiert man von der Rechtecksfläche zwischen beiden Parallelen in den Grenzen von 0 bis 4:

$$A = 4 \cdot 2 + \frac{8}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{8} = \frac{32}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{8} \approx 6{,}9\,.$$

5) **LS, p. 145, Nr. 5**
Ergebnisse:

a) $b = 3$, b) $a = -4$, (Korr!) c) $b = \pm 3$, d) $a = \frac{5}{3}$. (Korr!)

Lösung:
a) Wir lösen die Gleichung

$$9 = \int_0^b x^2\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^b = \frac{1}{3}b^3 \iff 27 = b^3 \iff b = 3\,.$$

b) Wir lösen die Gleichung

$$63 = \int_a^5 x^2\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_a^5 = \frac{125}{3} - \frac{1}{3}a^3 \iff a^3 = 125 - 189 = -64 \iff a = -4\,.$$

c) Hier erhalten wir *zwei* Lösungen:

$$40 = \int_1^b 2x^3\,dx = \frac{1}{2}b^4 - \frac{1}{2} \iff b^4 = 81 \iff b = \pm 3\,.$$

d)

$$\frac{1}{2} = \int_a^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_a^{10} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{a} \iff \frac{1}{a} = \frac{3}{5} \iff a = \frac{5}{3}\,.$$

6) **LS, p. 146, Nr. 6**
Ergebnisse:

a) $z = 5$, b) $b = \frac{200}{101}$.

Lösung:
a) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ hat keine Nullstellen und ist auf dem Intervall $]0,\infty[$ definiert (0 ist einziger Pol). Die Werte von f sind immer positiv, so dass alle betrachteten Flächen gleich den entsprechenden Integralen sind.

$$1{,}8 = \int_{0{,}5}^z \frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{0{,}5}^z = -\frac{1}{z} + 2 \iff \frac{1}{z} = 0{,}2 = \frac{1}{5} \iff z = 5\,.$$

b) Gesucht ist b mit

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{100} \frac{1}{x^2}\,dx \iff \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^b = \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^{100}$$
$$\iff 1 - \frac{1}{b} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{100}) = \frac{99}{200} \iff \frac{1}{b} = \frac{101}{200} \iff b = \frac{200}{101}\,.$$

7) **LS, p. 146, Nr. 7**
Ergebnisse:

a) $b = 12$, b) $b = \sqrt[3]{864}$, c) $c = 9\sqrt[3]{2}$.

Lösung:
a) Die orangerot eingefärbte Fläche ist als Integral darstellbar. Wir lösen daher die Gleichung

$$288 = \int_0^b \frac{1}{2}x^2\,dx = \Big[\frac{1}{6}x^3\Big]_0^b = \frac{1}{6}b^3 \iff 1728 = b^3 \iff b = 12\,.$$

b) Die blau gefärbte Fläche ist die Differenz der Rechtecksfläche $A = b \cdot f(b) = \frac{1}{2}b^3$ und dem in a) betrachteten Integral. Also lösen wir

$$288 = \frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{6}b^3 = \frac{1}{3}b^3 \iff 864 = b^3 \iff b = \sqrt[3]{864} \approx 9{,}52\,.$$

c) Die Fläche wird begrenzt von zwei Graphen. Wir betrachten daher die Differenzfunktion $h(x) = c - \frac{1}{2}x^2$ und berechnen ihre Nullstellen $x = \pm\sqrt{2c}$. Also suchen wir $c > 0$ mit

$$\begin{aligned}72 &= \int_{-\sqrt{2c}}^{\sqrt{2c}} (c - \frac{1}{2}x^2)\,dx = 2 \cdot \Big[cx - \frac{1}{6}x^3\Big]_0^{\sqrt{2c}}\\
\iff 36 &= c\sqrt{2c} - \frac{1}{6}\cdot 2c\sqrt{2c} = \sqrt{2}\cdot c^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\sqrt{2}\cdot c^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2}\cdot c^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}\\
\iff c^{\frac{3}{2}} &= \frac{54}{\sqrt{2}} = 27\sqrt{2} = 27 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \iff c = 27^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 9\sqrt[3]{2} \approx 11{,}34\,.\end{aligned}$$

8) **LS, p. 146, Nr. 8**
Ergebnisse:
a) $c = \frac{4}{3}$, b) $c = 9$.
(In a) erfordert die Klärung des Falles $c < 1$ einige Anstrengungen.)

Lösung:
a) $f(x) = -x^2 + c$ ist achsensymmetrisch und hat die Nullstellen $\pm\sqrt{c}$. Diese Nullstellen liegen im Innern des Integrationsintervalls $[-1, +1]$ genau dann, wenn $c < 1$ ist. Wir müssen bei der Flächenberechnung also zwei Fälle unterscheiden:
1. $c \geq 1$: Dann beträgt die gesuchte Fläche (wegen der Symmetrie)

$$2\int_0^1 (-x^2 + c)\,dx = 2\Big[-\frac{1}{3}x^3 + cx\Big]_0^1 = 2(c - \frac{1}{3}) = 2c - \frac{2}{3}\,.$$

Wir bestimmen c mit

$$2 = 2c - \frac{2}{3} \iff c = \frac{4}{3}\,.$$

2. $c < 1$: Dann setzt sich die gesuchte Fläche aus mehreren Flächenstücken zusammen. Wir berechnen

$$\begin{aligned}2\int_0^{\sqrt{c}} (-x^2 + c)\,dx &= 2\Big[cx - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^{\sqrt{c}} = 2(c\sqrt{c} - \frac{1}{3}c\sqrt{c}) = \frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}}\,,\\
2\int_{\sqrt{c}}^1 (-x^2 + c)\,dx &= 2(c - \frac{1}{3}) - \frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}})\,.\end{aligned}$$

Die Gesamtfläche beträgt in diesem Fall

$$\frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} - 2c = \frac{8}{3}c^{\frac{3}{2}} - 2c + \frac{2}{3}\,.$$

Die Frage, für welche c dies den Wert 2 hat führt auf eine kubische Gleichung in $\sqrt{c}$ (Substitution). Da aber nur Lösungen $c < 1$ gesucht sind und für $c = 1$ sich nur ein Flächenwert $\frac{2}{3}$ ergibt, untersuchen wir direkt die gefundene Flächenfunktion (definiert für $c \geq 0$)

$$A(c) = \frac{8}{3}c^{\frac{3}{2}} - 2c + \frac{2}{3} \implies A'(c) = 4c^{\frac{1}{2}} - 2$$

Damit hat A' nur die Nullstelle $c = \frac{1}{4}$ (mit VZW, da A' monoton wächst), also A nur dort eine Extremstelle, die ein Minimum sein muss ($A(1) = \frac{2}{3}$, $A(0) = \frac{1}{3}$, $A(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$). Zugleich zeigen die berechneten Randwerte, dass A im Intervall $0 \leq c \leq 1$ nur Werte zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{3}$ annimmt: Im Falle $c < 1$ kann die Fläche also nicht 2 werden.
b) Die Fläche zwischen Graph und x-Achse wird begrenzt von den Nullstellen $\pm\sqrt{c}$ und wir lösen die Gleichung

$$36 = 2\int_0^{\sqrt{c}} (-x^2 + c)\,dx = \frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}} \iff 27 = c^{\frac{3}{2}} \iff c = 9\,.$$

9) **LS, p. 146, Nr. 9**
Ergebnisse:

a) $\frac{1}{6}m^3$, b) $1 : 2$.

Lösung:
a) Wir betrachten die Differenzfunktion und ihre Nullstellen:

$$h(x) = mx - x^2 = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = m\,.$$

Die Fläche zwischen Graph und Gerade beträgt daher (in Abhängigkeit von $m \geq 0$)

$$\int_0^m (mx - x^2)\,dx = \left[\frac{m}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^m = \frac{1}{2}m^3 - \frac{1}{3}m^3 = \frac{1}{6}m^3\,.$$

Dies ist zugleich der obere Teil der markierten Dreiecksfläche.
b) Der untere Teil beträgt $\frac{1}{3}m^3$ (siehe Teilrechnung in a) oder von der Dreiecksfläche $\frac{m^3}{2}$ den oberen Teil $m^3/6$ abziehen) und das Verhältnis der oberen zur unteren Teilfläche also $\frac{1}{6} : \frac{1}{3} = 1 : 2$ ist.

10) **LS, p. 146, Nr. 10**
Ergebnis: a) $m = 3$.

Lösung:
a) Wir betrachten die Differenzfunktion und ihre Nullstellen:

$$h(x) = mx - x^3x(m - x^2) \iff x = 0 \ \vee \ x = \pm\sqrt{m},.$$

Die Fläche beträgt also

$$\int_0^{\sqrt{m}} (mx - x^3)\,dx = \left[\frac{m}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{m}} = \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2\,.$$

Wir lösen also

$$\frac{9}{4} = \frac{1}{4}m^2 \iff m = \pm 3\,.$$

Da $m \geq 0$ vorausgesetzt ist, kommt nur $m = 3$ in Frage.
b) Die Dreiecksfläche beträgt $\frac{1}{2}\sqrt{m} \cdot (\sqrt{m})^3 = \frac{1}{2}m^4$, wird also vom Graphen halbiert.

11) **LS, p. 146, Nr. 11**
Ergebnisse:

a) $\frac{343}{48}$ und $\frac{23}{48}$, (Korr!)   b) $m = \frac{4}{3}$.

Lösung:
Beide Flächen zusammen ergeben die Fläche zwischen der Geraden und dem Graphen in den Grenzen von 0 bis 4. Wir betrachten also die Differenzfunktion

$$h(x) = mx - f(x) = mx + (x-2)^2 - 4 = x^2 + (m-4)x = x(x - (4-m))\,.$$

Die Nullstellen von h (= Schnittstellen der Parabel und der Geraden) sind 0 und $z = 4 - m$. (z liegt – wie in der Skizze vorgegeben– im Bereich $[0, 4]$, solange $0 \leq m \leq 4$ ist.) Wir berechnen also die Integrale

$$\begin{aligned}
\int_0^{4-m} (x^2 - (4-m)x)\,dx &= \Big[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4-m}{2}x^2\Big]_0^{4-m} \\
&= \frac{1}{3}(4-m)^3 - \frac{1}{2}(4-m)^3 = -\frac{1}{6}(4-m)^3\,, \\
\int_{4-m}^{4} (x^2 - (4-m)x)\,dx &= \Big[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4-m}{2}x^2\Big]_{4-m}^{4} \\
&= \frac{64}{3} - 8(4-m) + \frac{1}{6}(4-m)^3\,.
\end{aligned}$$

a) Für $m = \frac{1}{2}$ ergibt sich als blaue Fläche

$$\frac{1}{6}(\frac{7}{2})^3 = \frac{343}{48} \approx 7{,}15$$

und als orangerote Fläche

$$\frac{64}{3} - 8(4 - \frac{1}{2}) + \frac{343}{48} = \frac{23}{48} \approx 0{,}48\,.$$

b) Damit beide Flächen gleich groß sind, muss gelten (für $m \leq 4$)

$$\frac{1}{6}(4-m)^3 = \frac{64}{3} - 8(4-m) + \frac{1}{6}(4-m)^3 \iff 8m = \frac{32}{3} \iff m = \frac{4}{3}\,.$$

Alternative Lösung von b) (ohne Berechnung der einzelnen Flächen): Damit die blaue und orangefarbene Fläche gleich groß sind, müssen die beiden entsprechenden Integrale entgegengesetzt gleich sein, also das gesamte *Integral* (nicht die Fläche) von 0 bis 4 den Wert Null haben:

$$0 = \int_0^4 h(x)\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 + \frac{m-4}{2}x^2\Big]0^4 = \frac{64}{3} + (m-4)\cdot 8 \iff -\frac{8}{3} = m-4 \iff m = \frac{4}{3}\,.$$

12) **LS, p. 146, Nr. 12**
Ergebnis: $t = 12$.

Lösung:
Die Funktion $f(x) = -x^2 + tx = -x(x-t)$ hat die Nullstellen 0 und t. Die Fläche zwischen Graph und x-Achse ist (die Parabel ist nach unten geöffnet, das Flächenstück liegt also oberhalb der x-Achse):

$$A = \int_0^t (-x^2 + tx)\,dx = \Big[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2 \Big]_0^t = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{2} - 0 = \frac{1}{6}t^3\,.$$

Dieser Flächenwert soll 288 sein:

$$288 = \frac{1}{6}t^3 \iff t = \sqrt[3]{6 \cdot 288} = \sqrt[3]{12 \cdot 144} = 12\,.$$

Vermischte Übungen aus dem Lehrbuch II

Lambacher Schweizer, Analysis, Grundkursband, Klett-Verlag

13) **LS, p. 147, Nr. 13**
Ergebnisse:
a) $7\,\mathrm{dm}^2$, b) $98\,\mathrm{kg}$, c) $7:8$.

14) **LS, p. 147, Nr. 14**
Ergebnisse: b) $\frac{27}{8}$, c) 2.

15) **LS, p. 147, Nr. 15**
Ergebnisse: b) $\frac{128}{15}$, c) $\frac{64}{15}\sqrt{2}$.

16) **LS, p. 147, Nr. 16**
Ergebnisse: b) $\frac{8}{3}$.

Vermischte Übungen — Lösungen

13) a) Die Fläche ist achsensymmetrisch. Wie zerlegen die rechte Hälfte in ein Rechteck (Breite $\frac{1}{2}$, Höhe 4, Fläche 2) und die Fläche zwischen Graph und x-Achse in den Grenzen von $\frac{1}{2}$ bis 2. Letztere berechnen wir als

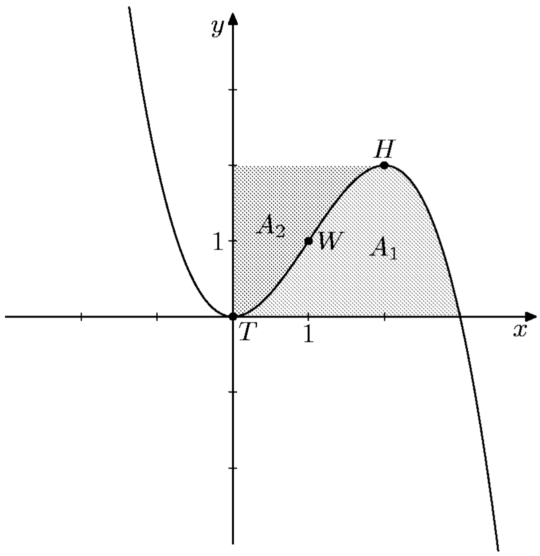
$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-x^{-1}\Big]_{\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}\,.$$

Die gesamte Querschnittsfläche beträgt daher (in dm^2)

$$2 \cdot (2 + \frac{3}{2}) = 7\,.$$

b) Ein Betonklotz hat also das Volumen (in dm^3, d. h. Liter) $7 \cdot 5 = 35$ und die Masse (in kg) $35 \cdot 2{,}8 = 98$.
c) Die Fläche des Dreiecks wäre $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$ (dm^2). Der Materialaufwand bei den beiden Lösungen steht im gleichen Verhältnis wie die Querschnittsflächen, also wie $7 : 8$.

14) a) $f(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 = -\frac{1}{2}x^2(x-3)$ hat die Nullstellen 0 (doppelt) und 3 (einfach).
$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x = -\frac{3}{2}x(x-2)$ hat die Nullstellen 0 und 2, beide einfach, beides Extremstellen von f. Da f' schließlich fällt, ist 2 Maximal- und 0 Minimalstelle von f. (Alternativ: $f''(x) = -3x + 3$, $f''(0) = 3 > 0 \implies 0$ Minimalstelle, $f''(2) = -6 + 3 < 0 \implies 2$ Maximalstelle.)
$f''(x) = -3x + 3$ hat die Nullstelle 1, einfach, also Wendestelle von f.
Hochpunkt $H = (2,2)$, Tiefpunkt $T = (0,0)$, Wendepunkt $W = (1,1)$.



b) Wir berechnen die von Graph und x-Achse *eingeschlossene* Fläche

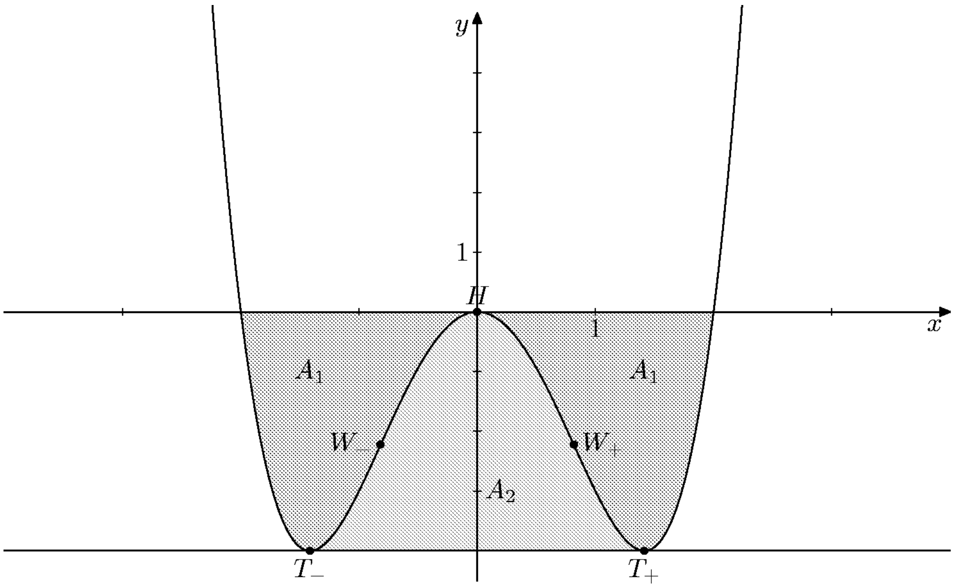
$$A_1 = \int_0^3 (-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2)\,dx = \Big[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3\Big]_0^3 = -\frac{81}{8} + \frac{27}{2} = \frac{27}{8}\,.$$

c) Die Tangente durch den Hochpunkt hat die Gleichung $y = 2$. Die Grenzen für das Flächenstück zwischen Tangente und Graph sind die Berührstelle der Tangente ($x = 2$) und laut Aufgabenstellung die y-Achse ($x = 0$):

$$\int_0^2 (2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2)\, dx = \Big[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x\Big]_0^2 = 2 - 4 + 4 = 2\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist also $A_2 = 2$.

15) a) $f(x) = x^2(x^2 - 4)$ ist achsensymmetrisch. $f(x) = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$ hat die Nullstellen 0 (doppelt) und ± 2 (einfach).
$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$ hat die Nullstellen 0 und $\pm\sqrt{2}$ (alle einfach), also alle Extremstellen von f. Da f schließlich steigt sind $\pm\sqrt{2}$ Minimal- und 0 lokale Maximalstelle. Die Extrempunkte sind $T_\pm = (\pm\sqrt{2}, -4)$ und $H = (0, 0)$.
$f''(x) = 12x^2 - 8$ hat die (einfachen) Nullstellen $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, f hat dort also Wendestellen. Die Wendepunkte sind $W_\pm = (\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9})$.



b) Wir berechnen wegen der Symmetrie

$$\int_0^2 (x^4 - 4x^2)\, dx = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\Big]_0^2 = \frac{32}{5} - \frac{32}{3} = -\frac{64}{15}\,.$$

Die gesuchte vom Graphen und der x-Achse eingeschlossene Fläche ist daher $A_1 = \frac{128}{15}$.
c) Die Gerade durch die Tiefpunkte hat die Gleichung $y = -4$. Die Differenzfunktion ist $h(x) = f(x) - (-4) = x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2 - 2)^2$. Deren einzige Nullstellen sind $\pm\sqrt{2}$ (jeweils doppelt). Wir berechnen

$$\int_0^{\sqrt{2}} (x^4 - 4x^2 + 4)\, dx = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x\Big]_0^{\sqrt{2}} = \frac{4}{5}\sqrt{2} - \frac{8}{3}\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = \frac{32}{15}\sqrt{2}\,.$$

Wegen der Symmetrie ist die gesuchte Fläche $A_2 = 2 \cdot \frac{32}{15}\sqrt{2} = \frac{64}{15}\sqrt{2}$.

16) a) $f(x) = \frac{x^4-16}{4x^2} = \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{4x^2}$ ist achsensymmetrisch, hat einen doppelten Pol bei 0 sowie zwei einfache Nullstellen bei ± 2.
$f(x) = \frac{x^4}{4x^2} - \frac{16}{4x^2} == \frac{x^2}{4} - \frac{4}{x^2}$ hat die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{x^2}{4}$ als Schmiegeparabel , insbesondere gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{4} = \infty\,.$$

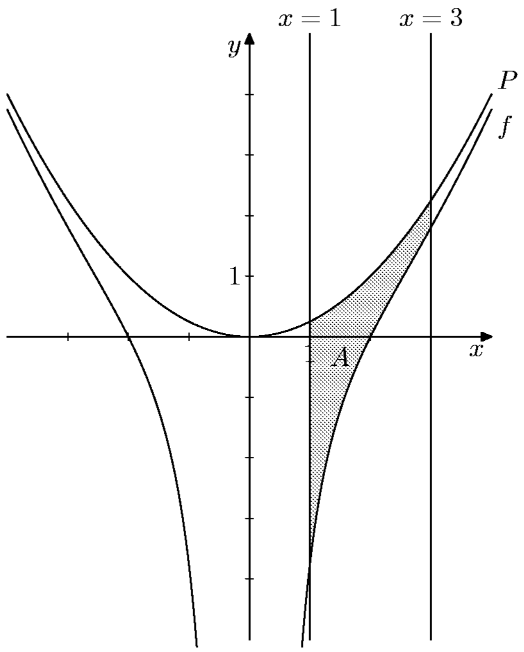
Die Schmiegeparabel ist also genau die in der Aufgabenstellung vorgegebene Parabel P. Ausgehend von der letzten asymptotischen Darstellung $f(x) = \frac{x^2}{4} - 4x^{-2}$ berechnen wir die Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{x}{2} + 8x^{-3} = \frac{x^4+16}{2x^3}\,, \qquad f''(x) = \frac{1}{2} - 24x^{-4} = \frac{x^4-48}{2x^4}\,.$$

Wir erkennen, dass f' keine Nullstellen hat ($x^4 + 16 > 0$ für alle x), und genauer: $f'(x) > 0$ für $x > 0$ und $f'(x) < 0$ für $x < 0$ (wegen des Nenners $2x^3$). Also ist f im Bereich $x > 0$ streng monoton steigend und im Bereich $x < 0$ streng monoton fallend.
Wir erkennen ebenso, dass f'' die (einfachen) Nullstellen $\pm\sqrt[4]{48}$ hat, dort also Wendestellen von f vorliegen.
Für die folgende Skizze des Graphen sowie der Schmiegeparabel P untersuchen wir die relative Lage beider Kurven. Wir stellen fest, dass es keine Schnittstellen gibt; genauer gilt: Wegen $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{4}{x^2}$ verläuft der Graph von f immer unterhalb der Parabel P. Wir erhalten so die nachfolgend skizzierten Graphen.
b) Wir berechnen die Fläche zwischen der Parabel und dem Graphen von f in den Grenzen von 1 bis 3. Die Differenzfunktion ist $h(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^4-16}{4x^2} = \frac{x^2}{4} - (\frac{x^2}{4} - \frac{4}{x^2}) = \frac{4}{x^2}$. Diese hat keine Nullstellen. Also genügt es ein Integral zu berechnen:

$$\int_1^3 h(x)\,dx = \int_1^3 \frac{4}{x^2}\,dx = \Big[-4x^{-1}\Big]_1^3 = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3}\,.$$

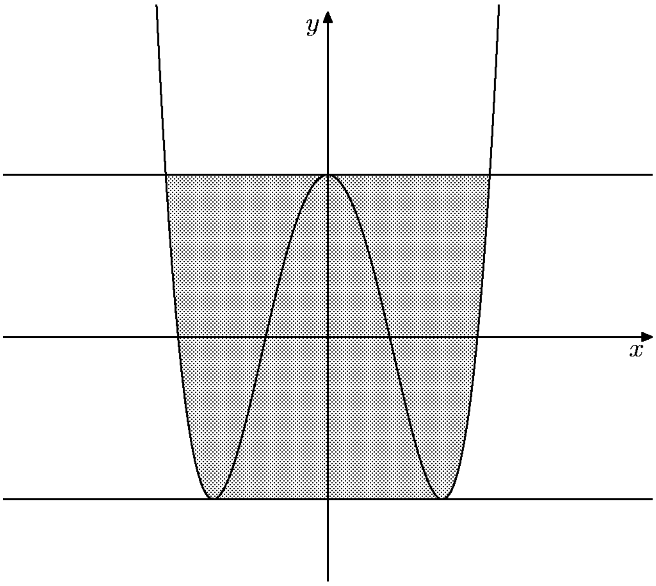
Der gesuchte Flächeninhalt ist daher $A = \frac{8}{3}$.



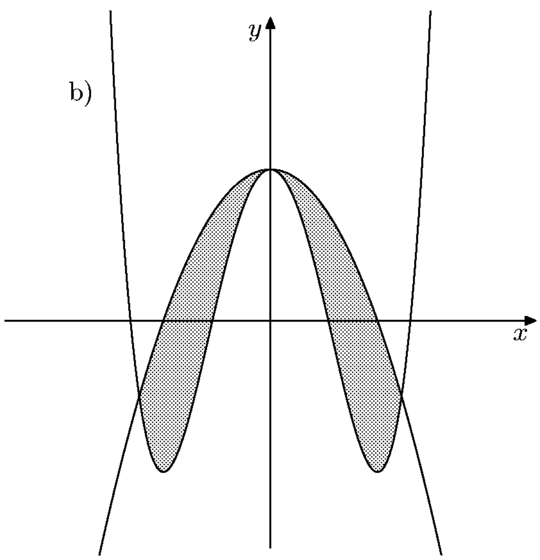
Flächenberechnungen

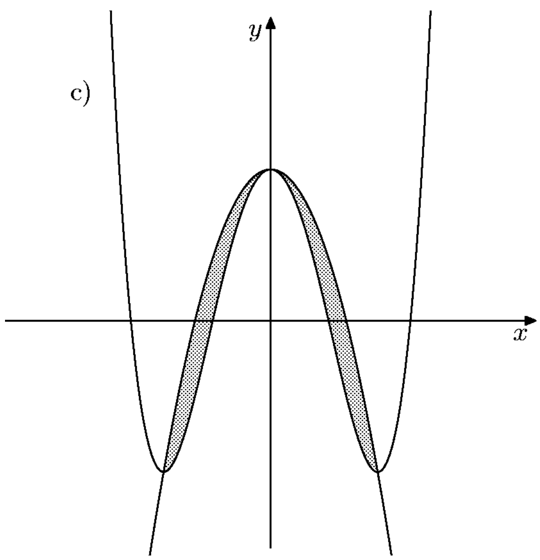
Aufgabe 1:

Die nachfolgende Skizze zeigt den Graphen von $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$.



a) In welchem Verhältnis teilt der Graph das markierte Flächenstück?
b) Bestimmen Sie die nachstehend markierte Fläche zwischen dem Graphen von f und der eingezeichneten *Normal*parabel mit ihrem Scheitel im lokalen Hochpunkt von f (linkes Bild).
c) Bestimmen Sie die nachstehend markierte Fläche zwischen dem Graphen von f und der eingezeichneten Parabel durch die drei Extrempunkte von f (rechtes Bild).

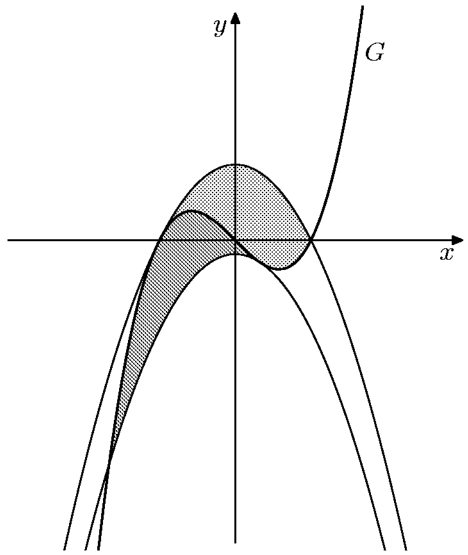




Aufgabe 2:

Es sei G der Graph der Funktion $f(x) = x^3 - x$. Die Parabeln P_c ($c \in \mathbb{R}$) seien gegeben durch die Gleichungen $g_c(x) = -x^2 + c$.

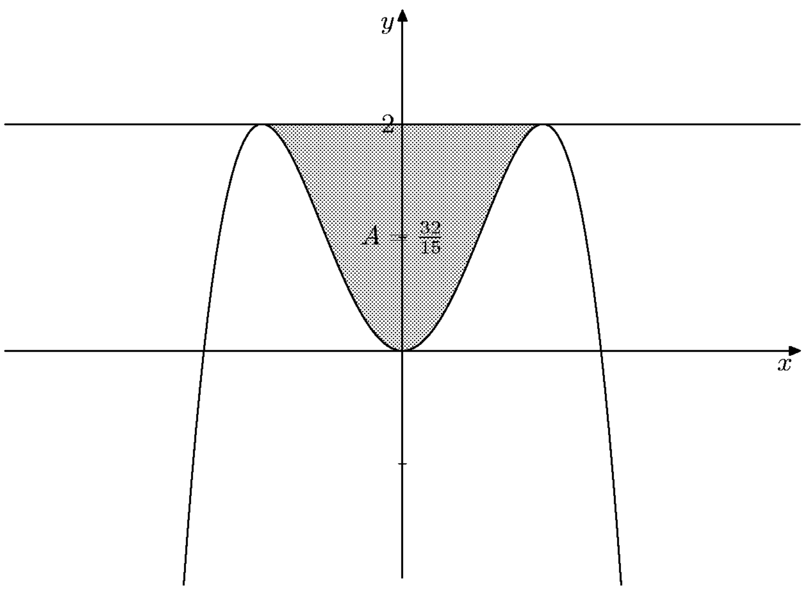
a) Bestimmen Sie alle Parabeln P_c, die den Graphen G berühren.
[Kontrollergebnis: $c = 1$, $c = -\frac{5}{27}$.] Bestimmen Sie die Berührstellen.



b) Welche Flächen schließt der Graph G mit den in a) gefundenen Parabeln jeweils ein?

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie alle achsensymmetrischen Funktionen 4. Grades mit einem lokalen Tiefpunkt im Koordinatenursprung und dem Wert 2 als absolut größtem Wert.
[Kontrollergebnis: $f(x) = -\frac{b^2}{8}x^4 + bx^2$ für gewisse $b \in \mathbb{R}$.]



b) Welche dieser Funktionen schließt mit der Tangente durch die Hochpunkte die Fläche $\frac{32}{15}$ ein? [Zur Kontrolle: $b = 4$.]
c) Wie groß ist die Fläche zwischen der Verbindungs*strecke* beider Wendepunkte und dem Graphen der in b) bestimmten Funktion f?

Flächenberechnungen — Lösungen

2) a) Die Graphen G von f und P_c von g_c berühren sich, wenn an einer Stelle x $f(x) = g_c(x)$ *und* $f'(x) = g_c'(x)$ gilt. Da die abgeleiteten Funktionen einfacher sind (niedrigerer Grad) und in diesem Falle $g_c'(x) = -2x$ *unabhängig* von c ist, lösen wir zunächst die Gleichung $f'(x) = g_c'(x)$ (und untersuchen erst danach, ob $f(x) = g_c(x)$ ist).

$$f'(x) = g_c'(x) \iff 3x^2 - 1 = -2x \iff 3x^2 + 2x - 1 = 0\,.$$

Offenbar ist -1 eine Lösung dieser Gleichung und man erhält folgende Faktorisierung: $3x^2+2x-1 = (x+1)(3x-1)$. Damit sind die gesuchten Lösungen -1 und $\frac{1}{3}$. Dies sind die Stellen, an denen f und g_c parallele Tangenten haben. Zugleich sind dies die einzig *möglichen* Berührstellen.
Wir untersuchen nun, ob dies tatsächlich Berührstellen sind, ob also $f(-1) = g_c(-1)$ bzw. $f(\frac{1}{3}) = g_c(\frac{1}{3})$ ist:

$$f(-1) = g_c(-1) \iff 0 = -1 + c \iff c = 1\,,$$
$$f(\frac{1}{3}) = g_c(\frac{1}{3}) \iff \frac{1}{27} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9} + c \iff -\frac{8}{27} = -\frac{1}{9} + c \iff c = -\frac{5}{27}\,.$$

Dies bedeutet: -1 ist eine Berührstelle genau dann, wenn $c = 1$ ist, und $\frac{1}{3}$ ist Berührstelle genau dann, wenn $c = -\frac{5}{27}$ ist. Es gibt also genau zwei der Parabeln P_c, die den Graphen G berühren.