Leistungskurs Mathematik

Übungen 4. Semester, SS 2009

Dr. Norbert Klingen, Köln-Kolleg

30. Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

Übungen (1)

1) Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen: S. 45, Aufgaben 3–4

3.
Gegeben ist die Funktion f. Gib drei Stammfunktionen F_1, F_2 und F_3 von f an.

a) $f(x) = x^4$ **b)** $f(x) = x^5$ **c)** $f(x) = x^6$ **d)** $f(x) = x^{10}$ **e)** $f(x) = 4x^7$ **f)** $f(x) = -9x^8$ **g)** $f(x) = a \cdot x^n$ **h)** $f(x) = x^4 + x^6$ **i)** $f(x) = x^2 + 6$ **j)** $f(x) = 5$ **k)** $f(x) = 0$ **l)** $f(x) = -1$

4.
Gib zur Funktion f jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

b) $f(x) = 4x^5 - 3x^4 + 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x - 3$

c) $f(x) = -\frac{2}{3}x^5 + \frac{x^3}{2} - \frac{5x}{2} + \sqrt{3}$

d) $f(x) = 3 \cdot \left(2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^5\right)$

e) $f(x) = \frac{-0{,}5x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{4}{5}}{5}$

f) $f(x) = kx^4 - \frac{k}{3}x^2 + 2kx + k^2$

g) $f(x) = \frac{5 - 6x^4 + 3x^5}{3}$

h) $f(x) = 2x^k - \frac{1}{2}x^{k-1} + 3$

2) Notwendige Umformungen von $f(x)$: S. 45, Aufgabe 5–6

5.
Gib zur Funktion f jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1 + x^2$ **b)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 4$ **c)** $f(x) = \frac{x^7 + 1}{x^2}$ **d)** $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$

6.
Gib zur Funktion f jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = (x+1)^2$

b) $f(x) = (2x-3)^2$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^4$

d) $f(x) = x^3(x-1)^2$

e) $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x+2)^2$

f) $f(x) = 8(x+2) \cdot (x-9)$

g) $f(x) = \frac{1}{k}x(x-k)^2$

h) $f(x) = \frac{2 - x^3 - 3x^4 + x^5}{x^2}$

i) $f(x) = \frac{2\sqrt{x^5} - 3}{\sqrt{x}}$

3) Vermischte Stammfunktionen: S. 45, Aufgabe 7

7.
Gib jeweils zwei Stammfunktionen von f an.

a) $f(x) = -3x^4 + \frac{1}{x} \cdot x^3 - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^7 + 4x^2$

c) $f(x) = 5 - 6x^9$

d) $f(x) = \frac{-2x^3 + 4x^5}{x^2}$

e) $f(x) = (x^4 - 1)^2$

f) $f(x) = \frac{4x^2 - 5}{x^2}$

g) $f(x) = \frac{2x - x^5}{x^3}$

h) $f(x) = 4 - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

i) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2}$

4) Stammfunktionen mit vorgeschriebenen Werten: S. 49, Aufgabe 13–14

13.

Gesucht ist diejenige Stammfunktion von f, die an der Stelle a den Funktionswert 0 hat.

a) $f(x)=3x+4;\quad a=-3$

b) $f(x)=7x^2+2x+3;\quad a=-1$

c) $f(x)=(x+1)^2;\quad a=0$

d) $f(x)=5x^3+2x^2+7x+2;\quad a=1$

e) $f(x)=\frac{1}{x^2}\ (x>0);\quad a=1$

f) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}};\quad a=1$

14.

Gesucht ist diejenige Stammfunktion von f, die an der Stelle a den Funktionswert c hat.

a) $f(x)=7x+5;\quad a=-4;\ c=3$

b) $f(x)=x^2-x+5;\quad a=-2;\ c=5$

c) $f(x)=3x^3+5x;\quad a=1;\ c=4$

d) $f(x)=3\cdot(x-4)^2;\quad a=4;\ c=-3$

Übungen (1) — Lösungen

1) **S. 45, Aufgabe 3:** Angegeben ist jeweils ein Stammfunktionsterm $F(x)$. Weitere sind gegeben durch $F(x)+c$ mit beliebiger Konstante $c \in \mathbb{R}$.

a) $\frac{1}{5}x^5$ b) $\frac{1}{6}x^6$ c) $\frac{1}{7}x^7$

d) $\frac{1}{11}x^{11}$ e) $\frac{1}{2}x^8$ f) $-x^9$

g) $\frac{a}{n+1}x^{n+1}$ h) $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7$ i) $\frac{1}{3}x^3+6x$

j) $5x$ k) 0 l) $-x$

S. 45, Aufgabe 4:

a) $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x$ b) $\frac{2}{3}x^6-\frac{3}{5}x^5+x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{2}x^2-3x$

c) $-\frac{1}{9}x^6+\frac{1}{8}x^4-\frac{5}{4}x^2+\sqrt{3}\cdot x$ d) $3\cdot(2x-\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{9}x^6)$

e) $\frac{1}{5}\cdot(-0{,}1x^5-\frac{5}{12}x^4+\frac{4}{5}x)$ f) $\frac{k}{5}x^5-\frac{k}{9}x^3+kx^2+k^2x$

g) $\frac{1}{3}\cdot(5x-\frac{6}{5}x^5+\frac{1}{2}x^6)$ h) $\frac{2}{k+1}x^{k+1}-\frac{1}{2k}x^k+3x$

2) **S. 45, Aufgabe 5:** Man muss zunächst den gegebenen Funktionsterm so umformen, dass man eine Summe von Vielfachen von Potenzfunktionen (mit möglicherweise negativen oder gebrochenen Exponenten) erhält. Erst dann kann man aufgrund der Potenzregel Stammfunktionen finden. Angegeben ist jeweils ein möglicher Stammfunktionsterm $F(x)$.

a) $f(x)=\frac{1}{x^2}+1+x^2=x^{-2}+1+x^2,$

$F(x)=\frac{1}{-1}x^{-1}+x+\frac{1}{3}x^3=-\frac{1}{x}+x+\frac{1}{3}x^3,$

b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-4=x^{-\frac{1}{2}}-4,$

$F(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-4x=2\sqrt{x}-4x,$

c) $f(x)=\frac{x^7+1}{x^2}=x^5+x^{-2},$

$F(x)=\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{-1}x^{-1}=\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{x}=\frac{x^7-6}{6x},$

d) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=1-x^{-\frac{1}{2}},$

$F(x)=x-\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=x-2\sqrt{x}.$

S. 45, Aufgabe 6: Hier sind (bis auf h),i)) nur ganzrationale Funktionen gegeben, aber sie sind nicht in der Polynomdarstellung (Summen von Vielfachen von Potenzfunktionen); man muss sie durch Ausmultiplizieren erst in diese Standardform bringen. (In Sonderfällen sind andere Wege möglich, siehe später.) Wieder gibt $F(x)$ jeweils einen möglichen Stammfunktionsterm an.

a) $f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x,$

b) $f(x) = (2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9, \quad F(x) = \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x,$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^4 = \frac{1}{16}x^8, \quad F(x) = \frac{1}{144}x^9,$

d) $f(x) = x^3(x-1)^2 = x^3(x^2-2x+1) = x^5 - 2x^4 + x^3, \quad F(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4,$

e) $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x+2)^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2+4x+4) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2,$

$F(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3,$

f) $f(x) = 8(x+2)(x-9) = 8(x^2 - 7x - 18), \quad F(x) = 8(\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 18x),$

g) $f(x) = \frac{1}{k}x(x^2 - 2kx + k^2) = \frac{1}{k}x^3 - 2x^2 + kx, \quad F(x) = \frac{1}{4k}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2,$

h) $f(x) = \dfrac{2 - x^3 - 3x^4 + x^5}{x^2} = 2x^{-2} - x - 3x^2 + x^3,$

$F(x) = \frac{2}{-1}x^{-1} - \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 = -\frac{2}{x} - \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4,$

i) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x^5} - 3}{\sqrt{x}} = (2x^{\frac{5}{2}} - 3) \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 2x^2 - 3x^{-\frac{1}{2}},$

$F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^3 - 6\sqrt{x}.$

3) **S. 45, Aufgabe 7:** Angegeben ist jeweils ein möglicher (wenn auch nicht der naheliegendste) Stammfunktionsterm $F(x)$. Ein zweiter ist etwa gegeben durch $F(x) + 1$.

a) $f(x) = -3x^4 + \frac{1}{x} \cdot x^3 - 1 = -3x^4 + x^2 - 1, \quad F(x) = -\frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - x + 133,$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^7 + 4x^2, \quad F(x) = \frac{1}{16}x^8 + \frac{4}{3}x^3 - 17,$

c) $f(x) = 5 - 6x^9, \quad F(x) = 5x - \frac{3}{5}x^{10} + 200,$

d) $f(x) = \dfrac{-2x^3 + 4x^5}{x^2} = -2x + 4x^3, \quad F(x) = -x^2 + x^4 - 7,$

e) $f(x) = (x^4 - 1)^2 = x^8 - 2x^4 + 1, \quad F(x) = \frac{1}{9}x^9 - \frac{2}{5}x^5 + x + 1,$

f) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{x^2} = 4 - 5x^{-2}, \quad F(x) = 4x - \frac{5}{-1}x^{-1} + 1024 = 4x + \frac{5}{x} + 1024,$

g) $f(x) = \dfrac{2x - x^5}{x^3} = 2x^{-2} - x^2, \quad F(x) = \frac{2}{-1}x^{-1} - \frac{1}{3}x^3 + 13 = -\frac{2}{x} - \frac{1}{3}x^3 + 13,$

h) $f(x) = 4 - \dfrac{5}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2} = 4 - 5x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2}$,

$F(x) = 4x - \dfrac{5}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{-1}x^{-1} - 266 = 4x - 10\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} - 266$,

i) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{7}{x^2} = 4x^{-\frac{1}{2}} + 7x^{-2}$, $\quad F(x) = 8x^{\frac{1}{2}} - 7x^{-1} + \dfrac{49}{17} = 8\sqrt{x} - \dfrac{7}{x} + \dfrac{49}{17}$.

4) **S. 49, Aufgabe 13:** Man bestimmt zunächst *irgendeine* Stammfunktion $F(x)$. Dann ist (über einem Intervall) *jede* Stammfunktion von der Form $F(x) + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Man muss nun das c so bestimmen, dass $F_2(x) = F(x) + c$ bei a eine Nullstelle hat: $F_2(a) = F(a) + c = 0$. Man erkennt: $c = -F(a)$, $F_2(x) = F(x) - F(a)$. Dies bedeutet:

> Ist F irgendeine Stammfunktion von f, so ist $F(x) - F(a)$ die Stammfunktion von f mit einer Nullstelle bei a.

Die nachfolgende Tabelle enthält in der letzten Spalte die gesuchten Stammfunktionen mit Nullstelle bei a:

	$f(x)$	a	$F(x)$	$F(a)$	Ergebnis
a)	$3x + 4$	-3	$\frac{3}{2}x^2 + 4x$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}x^2 + 4x - \frac{3}{2}$
b)	$7x^2 + 2x + 3$	-1	$\frac{7}{3}x^3 + x^2 + 3x$	$-\frac{13}{3}$	$\frac{7}{3}x^3 + x^2 + 3x + \frac{13}{3}$
c)	$x^2 + 2x + 1$	0	$\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$	0	$\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$
d)	$5x^3 + 2x^2 + 7x + 2$	1	$\frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 2x$	$\frac{89}{12}$	$\frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 2x - \frac{89}{12}$
e)	$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	1	$-x^{-1} = -\frac{1}{x}$	-1	$-\frac{1}{x} + 1$
f)	$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$	1	$2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$	2	$2\sqrt{x} - 2$

S. 49, Aufgabe 14: Hier ist nun nicht eine Nullstelle, sondern eine c-Stelle (das ist eine Stelle mit Funktionswert c) vorgeschrieben. Man geht jedoch genauso wie in der vorangehenden Aufgabe vor: Ist F *irgendeine* Stammfunktion von f, so ist zunächst $F(x) - F(a)$ eine Stammfunktion, die bei a den Wert 0 hat; addiert man nun c, so erhält man das Gewünschte:

> Ist F irgendeine Stammfunktion von f, so ist $F(x) - F(a) + c$ die Stammfunktion von f, die bei a den Wert c hat.

Die nachfolgende Tabelle enthält in der letzten Spalte die gesuchten Stammfunktionen mit Funktionswert c an der Stelle a:

	$f(x)$	a	c	$F(x)$	$F(a)$	$F(x) - F(a) + c$
a)	$7x + 5$	-4	3	$\frac{7}{2}x^2 + 5x$	36	$\frac{7}{2}x^2 + 5x - 33$
b)	$x^2 - x + 5$	-2	5	$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x$	$-\frac{44}{3}$	$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{59}{3}$
c)	$3x^3 + 5x$	1	4	$\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2$	$\frac{13}{4}$	$\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{4}$
d)	$3(x - 4)^2$	4	-3	$(x - 4)^3$	0	$(x - 4)^3 - 3$

Übungen (2)

Integralberechnungen

1) Erste Integrale: S. 49, Aufgabe 7

7.
Berechne das Integral.

a) $\int_0^2 (3x^5 - 2x^4 + 1)\,dx$
b) $\int_1^3 \frac{1-5x^4}{4}\,dx$
c) $\int_{-1}^1 (x^6 + 3x^5 - 2x^4)\,dx$
d) $\int_{-2}^{-1} \frac{3-2x^2+4x^3-3x^4}{x^2}\,dx$
e) $\int_1^2 \left(\frac{2}{x^2} - 7 + 5x^4\right)dx$
f) $\int_1^4 \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x^4\right)dx$
g) $\int_1^4 \frac{2x^3 - 5\sqrt{x}}{x}\,dx$
h) $\int_1^2 \frac{6x^6 + 8x\cdot\sqrt{x} - 1}{2x^2}\,dx$
i) $\int_1^2 \frac{2x^2 - 7\sqrt{x}}{x}\,dx$

2) Symmetrische Integrale: S. 49, Aufgabe 8

8.
Berechne das Integral.

a) $\int_{-1}^{+1} (4x^3 + 2x)\,dx$
b) $\int_{-2}^{+2} (2x^2 - 4)\,dx$
c) $\int_{-1}^{+1} (x^5 - 3x^3)\,dx$
d) $\int_{-3}^{+3} (3x^2 + 5x^4)\,dx$
e) $\int_{-2}^{+2} (4x^5 - 3)\,dx$
f) $\int_{-4}^{+4} (x^3 - x^2)\,dx$

Lineare Substitution

3) Stammfunktionen: S. 50, Aufgabe 1; S. 51, Aufgabe 3 a)–e)

1.
Bestimme zur Funktion f eine Stammfunktion.

a) $f(x) = (3x-4)^4$
b) $f(x) = \frac{(2-5x)^3}{3}$
c) $f(x) = \frac{-2}{(5x+1)^2}$
d) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{3x-1}}$

3.
Bestimme zur Funktion f eine Stammfunktion

a) $f(x) = (x-5)^4$; $f(x) = (2x+3)^2$; $f(x) = (\frac{1}{2}x - 4)^4$; $f(x) = (2-3x)^4$
b) $f(x) = 5\cdot(3x+7)^3$; $f(x) = 0{,}5\cdot(2-x)^3$; $f(x) = \frac{(2x+2)^4}{3}$; $f(x) = \sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}x+2)^3$
c) $f(x) = \frac{1}{4}(4x-1)^3 + \frac{1}{2}(1-4x)^2$; $f(x) = \frac{1}{3}(3-0{,}5x)^4 - \frac{1}{5}(2x+0{,}3)^3$
d) $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$; $f(x) = \frac{3}{(2x+7)^2}$; $f(x) = \frac{0{,}5}{(3-0{,}5x)^2}$; $f(x) = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{2}\cdot x+4)^2}$
e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$; $f(x) = \frac{2}{\sqrt{5+3x}}$; $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{1-x}}$; $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x}}$

4) Integrale: S. 51, Aufgabe 4, a)–g), i)–l)

4.
Wende lineare Substitution an.

a) $\int_1^2 (4x+1)^2\,dx$
b) $\int_{-1}^{+1} (\frac{1}{3}x - 4)^3\,dx$
c) $\int_{-1}^{-4} (-3x+2)^4\,dx$
d) $\int_{+1}^{+2} \frac{1}{(3x+4)^2}\,dx$
e) $\int_{-1}^{-4} \frac{1}{(2x-1)^2}\,dx$
f) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$
g) $\int_{-1}^0 \frac{5}{(3-2x)^2}\,dx$
h) $\int_1^2 \left(\sqrt{6-3x}\right)^{-1}\,dx$
i) $\int_0^2 ((2x+1)^2 + (2x+1)^3)\,dx$
j) $\int_0^1 (3(4x-3)^2 + 2(4x-3)^4)\,dx$
k) $\int_0^1 \left(\frac{1}{(3x+2)^2} + \frac{1}{\sqrt{3x+2}}\right)dx$
l) $\int_1^2 \left(\frac{4}{\sqrt{2x}} - (2x)^4\right)dx$

Welches Problem tritt bei Aufgabe h) auf?

Übungen (2) — Lösungen

1) **S. 49, Aufgabe 7:**

a) $\displaystyle\int_0^2 (3x^5 - 2x^4 + 1)\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + x\Big]_0^2$
$\displaystyle = \big(\frac{1}{2}\cdot 2^6 - \frac{2}{5}\cdot 2^5 + 2\big) - \big(0\big) = \frac{106}{5},$

b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1-5x^4}{4}\,dx = \Big[\frac{1}{4}\cdot(x - x^5)\Big]_1^3 = \frac{1}{4}(3-3^5) - \frac{1}{4}(1-1^5) = \frac{-240}{4} = -60,$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^6 + 3x^5 - 2x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{5}x^5\Big]_{-1}^1$
$\displaystyle = \big(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}\big) - \big(-\frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\big) = \frac{2}{7} - \frac{4}{5} = -\frac{18}{35}.$

Bei den nachfolgenden Aufgabenteilen sind die Integranden nicht überall definiert, aber es liegen keine Definitionslücken im Integrationsintervall, so dass die Integrale wohldefiniert sind.

d) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{3 - 2x^2 + 4x^3 - 3x^4}{x^2}\,dx = \int_{-2}^{-1} (3x^{-2} - 2 + 4x - 3x^2)\,dx$
$\displaystyle = \Big[-\frac{3}{x} - 2x + 2x^2 - x^3\Big]_{-2}^{-1} = \big(3+2+2+1\big) - \big(\frac{3}{2} + 4 + 8 + 8\big) = -\frac{27}{2},$

e) $\displaystyle\int_1^2 \big(\frac{2}{x^2} - 7 + 5x^4\big)\,dx = \int_1^2 (2x^{-2} - 7 + 5x^4)\,dx$
$\displaystyle = \Big[-2x^{-1} - 7x + x^5\Big]_1^2 = (-1 - 14 + 32) - (-2 - 7 + 1) = 25,$

f) $\displaystyle\int_1^4 \big(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x^4\big)\,dx = \int_1^4 (3x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^4)\,dx$
$\displaystyle = \Big[6x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{10}x^5\Big]_1^4 = (12 - \frac{1024}{10}) - (6 - \frac{1}{10}) = -\frac{963}{10},$

g) $\displaystyle\int_1^4 \frac{2x^3 - 5\sqrt{x}}{x}\,dx = \int_1^4 (2x^2 - 5x^{-\frac{1}{2}})\,dx$
$\displaystyle = \Big[\frac{2}{3}x^3 - 10x^{\frac{1}{2}}\Big]1^4 = (\frac{128}{3} - 20) - (\frac{2}{3} - 10) = 32,$

h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{6x^6 + 8x\sqrt{x} - 1}{2x^2}\,dx = \int_1^2 (3x^4 + 4x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-2})\,dx$
$\displaystyle = \Big[\frac{3}{5}x^5 + 8x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-1}\Big]1^2 = (\frac{96}{5} + 8\sqrt{2} + \frac{1}{4}) - (\frac{3}{5} + 8 + \frac{1}{2}) = \frac{207}{20} + 8\sqrt{2},$

i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2 - 7\sqrt{x}}{x}\,dx = \int_1^2 (2x - 7x^{-\frac{1}{2}})\,dx$
$\displaystyle = \Big[x^2 - 14x^{\frac{1}{2}}\Big]_1^2 = (4 - 14\sqrt{2}) - (1 - 14) = 17 - 14\sqrt{2},$

2) **S. 49, Aufgabe 8:** Diese Integrale kann man genauso wie in der vorangehenden

Aufgabe mit Hilfe der Integralformel berechnen. Es fällt jedoch auf, dass in allen Fällen die Integralgrenzen symmetrisch zu 0 liegen. In solchen Fällen kann man Symmetrien der Integranden ausnutzen (siehe gesondertes Übungsblatt).

a) $\int_{-1}^{1} (4x^3 + 2x)\, dx = \left[x^4 + x^2\right]_{-1}^{1} = 2 - 2 = 0,$

b) $\int_{-2}^{2} (2x^2 - 4)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{2} = (\frac{16}{3} - 8) - (-\frac{16}{3} + 8) = \frac{32}{3} - 16 = -\frac{16}{3}.$

c) $\int_{-1}^{1} (x^5 - 3x^3)\, dx = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = (\frac{1}{6} - \frac{3}{4}) - (\frac{1}{6} - \frac{3}{4}) = 0,$

d) $\int_{-3}^{3} (3x^2 + 5x^4)\, dx = \left[x^3 + x^5\right]_{-3}^{3} = (3^3 + 3^5) - (-3^3 - 3^5)$

$= 2 \cdot (3^3 + 3^5) = 2 \cdot 3^3 \cdot (1 + 3^2) = 540,$

e) $\int_{-2}^{2} (4x^5 - 3)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^6 - 3x\right]_{-2}^{2} = (\frac{128}{3} - 6) - (\frac{128}{3} + 6) = -12,$

f) $\int_{-4}^{4} (x^3 - x^2)\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-4}^{4} = (4^3 - \frac{1}{3} \cdot 4^3) - (4^3 + \frac{1}{3} \cdot 4^3) = -\frac{128}{3},$

3) **S. 50, Aufgabe 1:**

a) $f(x) = (3x-4)^4, \quad F(x) = \frac{1}{5}(3x-4)^5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}(3x-4)^5,$

b) $f(x) = \frac{1}{3}(2-5x)^3, \quad F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}(2-5x)^4 \cdot \frac{1}{-5} = -\frac{1}{60}(2-5x)^4,$

c) $f(x) = \frac{-2}{(5x+1)^2} = -2(5x+1)^{-2}, \quad F(x) = -2 \cdot \frac{1}{-1} \cdot (5x+1)^{-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5(5x+1)},$

d) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{3x-1}} = 4(3x-1)^{-\frac{1}{2}}, \quad F(x) = 4 \cdot 2 \cdot (3x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3x-1},$

S. 51, Aufgabe 3 a)–e):

a) $F(x) = \frac{1}{5}(x-5)^5;$

$F(x) = \frac{1}{3}(2x+3)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}(2x+3)^3;$

$F(x) = \frac{1}{5}(\frac{1}{2}x - 4)^5 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}(\frac{1}{2}x - 4)^5;$

$F(x) = \frac{1}{5}(2-3x)^5 \cdot \frac{1}{-3} = -\frac{1}{15}(2-3x)^5;$

b) $F(x) = \frac{5}{4}(3x+7)^4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}(3x+7)^4,$

$F(x) = \frac{1}{8}(2-x)^4 \cdot \frac{1}{-1} = -\frac{1}{8}(2-x)^4,$

$F(x) = \frac{1}{15}(2x+2)^5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{30}(2x+2)^5,$

$F(x) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{3} \cdot x + 2)^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}},$

c) $F(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(4x-1)^4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(1-4x)^3 \cdot \frac{1}{-4} = \frac{1}{64} \cdot (4x-1)^4 - \frac{1}{24}(1-4x)^3,$

$F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}(3-0{,}5x)^5 \cdot \frac{1}{-0{,}5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}(2x+0{,}3)^4 \cdot \frac{1}{2} =$

$= -\frac{2}{15} \cdot (3-0{,}5x)^5 - \frac{1}{40} \cdot (2x+0{,}3)^4,$

d) $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2} = (x-4)^{-2}, \quad F(x) = \frac{1}{-1} \cdot (x-4)^{-1} = -\frac{1}{x-4},$

$f(x) = \frac{3}{(2x+7)^2} = 3(2x+7)^{-2}, \quad F(x) = -3 \cdot (2x+7)^{-1} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2(2x+7)},$

$f(x) = \frac{0{,}5}{(3-0{,}5x)^2} = 0{,}5 \cdot (3-0{,}5x)^{-2},$

$F(x) = -0{,}5 \cdot (3-0{,}5x)^{-1} \cdot \frac{1}{-0{,}5} = \frac{1}{3-0{,}5x},$

$f(x) = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{2} \cdot x+4)^2} = \sqrt{5} \cdot (\sqrt{2} \cdot x+4)^{-2},$

$F(x) = -\sqrt{5} \cdot (\sqrt{2} \cdot x+4)^{-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot x+4},$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} = (x+4)^{-\frac{1}{2}}, \quad F(x) = 2 \cdot (x+4)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x+4},$

$f(x) = \frac{2}{\sqrt{5+3x}} = 2 \cdot (5+3x)^{-\frac{1}{2}}, \quad F(x) = 2 \cdot 2(5+3x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{5+3x},$

$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{1-x}} = \frac{1}{4} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}, \quad F(x) = \frac{1}{4} \cdot 2(1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{-1} = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x},$

$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x}} = 3 \cdot (2x)^{-\frac{1}{2}}, \quad F(x) = 3 \cdot 2(2x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{2x}.$

4) **S. 51, Aufgabe 4:**

a) $\int_1^2 (4x+1)^2\,dx = \Big[\frac{1}{3}(4x+1)^3 \cdot \frac{1}{4}\Big]_1^2 = \frac{9^3}{12} - \frac{5^3}{12} = \frac{151}{3},$

b) $\int_{-1}^1 (\frac{1}{3}x-4)^3\,dx = \Big[\frac{1}{4}(\frac{1}{3}x-4)^4 \cdot 3\Big]_{-1}^1$

$= \frac{3}{4} \cdot \big((\frac{1}{3}-4)^4 - (-\frac{1}{3}-4)^4\big) = -\frac{1160}{9},$

c) $\int_{-1}^{-4} (-3x+2)^4\,dx = \Big[\frac{1}{5}(-3x+2)^5 \cdot \frac{1}{-3}\Big]_{-1}^{-4} = -\frac{1}{15}(14^5 - 5^5) = -\frac{178233}{5},$

d) $\int_1^2 \frac{1}{(3x+4)^2}\,dx = \int_1^2 (3x+4)^{-2}\,dx$

$= \Big[-(3x+4)^{-1} \cdot \frac{1}{3}\Big]_1^2 = -\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{10} - \frac{1}{7}) = \frac{1}{70},$

e) $\int_{-1}^{-4} \frac{1}{(2x-1)^2}\,dx = \int_{-1}^{-4} (2x-1)^{-2}\,dx$

$= \Big[-(2x-1)^{-1} \cdot \frac{1}{2}\Big]_{-1}^{-4} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{9} - \frac{1}{3}) = -\frac{1}{9},$

f) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int_0^4 (2x+1)^{-\frac12}\,dx = \Big[2\cdot(2x+1)^{\frac12}\cdot\frac12\Big]_0^4 = \sqrt9-\sqrt1 = 2,$

g) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{5}{(3-2x)^2}\,dx = \int_{-1}^0 5(3-2x)^{-2}\,dx = \Big[5\cdot(-(3-2x)^{-1})\cdot\frac{1}{-2}\Big]_{-1}^0$
$\displaystyle= \frac52\cdot\Big[(3-2x)^{-1}\Big]_{-1}^0 = \frac52\cdot(\frac13-\frac15) = \frac13,$

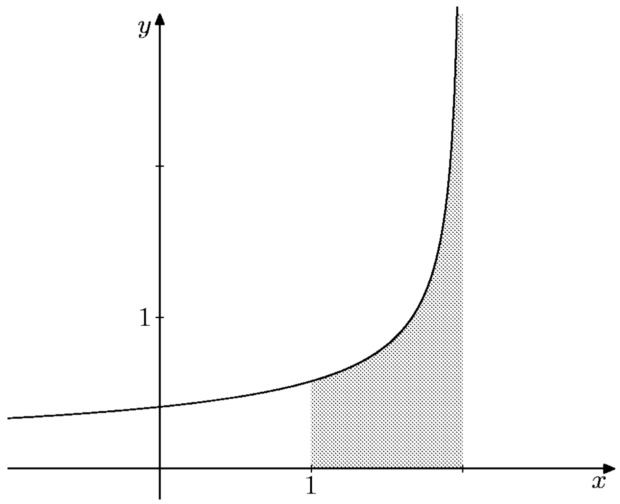
i) $\displaystyle\int_0^2 \big((2x+1)^2+(2x+1)^3\big)\,dx = \Big[\frac13(2x+1)^3\cdot\frac12+\frac14(2x+1)^4\cdot\frac12\Big]_0^2$
$\displaystyle= (\frac{5^3}{6}+\frac{5^4}{8}) - (\frac16+\frac18) = 5^3\cdot(\frac16+\frac58)-\frac{7}{24} = \frac{296}{3},$

j) $\displaystyle\int_0^1 \big(3(4x-3)^2+2(4x-3)^4\big)\,dx = \Big[(4x-3)^3\cdot\frac14+\frac25(4x-3)^5\cdot\frac14\Big]_0^1$
$\displaystyle= (\frac14+\frac1{10}) - (-\frac{3^3}{4}-\frac{3^5}{10}) = \frac{157}{5},$

k) $\displaystyle\int_0^1 (\frac{1}{(3x+2)^2}+\frac{1}{\sqrt{3x+2}})\,dx = \int_0^1 \big((3x+2)^{-2}+(3x+2)^{-\frac12}\big)\,dx$
$\displaystyle= \Big[-\frac13(3x+2)^{-1}+\frac23(3x+2)^{\frac12}\Big]_0^1 = (-\frac1{15}+\frac23\sqrt5)-(-\frac16+\frac23\sqrt2)$
$\displaystyle= \frac1{10}+\frac23\cdot(\sqrt5-\sqrt2)\approx 0{,}65,$

l) $\displaystyle\int_1^2 (\frac{4}{\sqrt{2x}}-(2x)^4)\,dx = \int_1^2 \big(4(2x)^{-\frac12}-16x^4\big)\,dx = \Big[8(2x)^{\frac12}\frac12-\frac{16}{5}x^5\Big]_1^2$
$\displaystyle= (8-\frac{16\cdot32}{5})-(4\sqrt2-\frac{16}{5}) = -\frac{456}{5}-4\sqrt2\approx -96{,}86.$

h) Der Definitionsbereich des Integranden $f(x) = \big(\sqrt{6-3x}\big)^{-1}$ ist $]-\infty,2[$, insbesondere ist er bei 2 nicht definiert, das Integral $\int_1^2 f(x)\,dx$ daher nicht definiert. Nachfolgend eine Skizze des Graphen und des Integrationsbereiches.



Übungen (3)

Exponentialfunktionen

1) Stammfunktionen: S. 86, Aufgabe 10; S. 94, Aufgabe 4

10.
Gib eine Stammfunktion F von f an.

a) $f(x)=e^x$ **b)** $f(x)=e^{x+1}$ **c)** $f(x)=e^{2x}$ **d)** $f(x)=e^{2x-3}$ **e)** $f(x)=e^{-x}$ **f)** $f(x)=e^{-3x+2}$

4.
Ermittle zu folgenden Funktionen f jeweils eine Stammfunktion F.

a) $f(x)=3e^{2x+1}$ **c)** $f(x)=-0{,}5\,e^{2-\frac{1}{2}x}$ **e)** $f(x)=(e^x-e^{-x})^2$

b) $f(x)=2e^{-x+1}$ **d)** $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ **f)** $f(x)=(e^x+e^{-x})^2$

2) Integrale: S. 94, Aufgabe 5; S. 86, Aufgabe 12

5.
Berechne die folgenden bestimmten Integrale.

a) $\int_1^3 2e^{3x}\,dx$ **c)** $\int_{-2}^{+3}(e^x-e^{-x})\,dx$ **e)** $\int_{-1}^{0}(e^x-x-1)\,dx$

b) $\int_{-1}^{+1} 3e^{-x}\,dx$ **d)** $\int_0^1(e^{-x}+x)\,dx$ **f)** $\int_0^1(e^x-1)^2\,dx$

12.
Bestimme k so, daß das Integral den angegebenen Wert hat.

a) $\int_0^1 k e^x\,dx=e$ **b)** $\int_0^1(e^x+kx)\,dx=2$ **c)** $\int_0^k e^x\,dx=e$ **d)** $\int_0^2 k e^{kx}\,dx=e-1$

Der Logarithmus in der Integralrechnung

3) Stammfunktionen: S. 95, Aufgabe 8

8.
Bestimme zur Funktion f jeweils eine Stammfunktion F.

a) $f(x)=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x-1}$ **d)** $f(x)=\frac{2}{2x+1}-\frac{3}{3x-1}+\frac{1}{\frac{1}{2}x+1}$ **g)** $f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+2}$

b) $f(x)=\frac{1-x-x^2-x^4}{2x^2}$ **e)** $f(x)=\frac{-3x^3+\frac{1}{2}x^2-5x-3}{x^2}$ △ **h)** $f(x)=\frac{x-4}{x-5}$

c) $f(x)=\frac{1}{3(x-4)}+\frac{1}{2(x+3)}$ **f)** $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{3}{x+1}$ △ **i)** $f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$

4) Integrale: S. 93, Aufgaben 10–11

10.
Berechne das folgende Integral.

a) $\int_{-2}^{-6}\frac{1}{x}\,dx$ **b)** $\int_1^e\frac{1}{x}\,dx$ **c)** $\int_{0,5}^{2}\frac{1}{x}\,dx$ **d)** $\int_{-5}^{-1}\frac{1}{x}\,dx$ **e)** $\int_a^b\frac{1}{x}\,dx$ $(a,b>0)$ **f)** $\int_a^b\frac{1}{x}\,dx$ $(a,b<0)$

11.
Berechne mit Hilfe linearer Substitution (siehe Seite 50).

a) $\int_2^3\frac{1}{x-1}\,dx$ **b)** $\int_{-1}^{+1}\frac{3}{x+5}\,dx$ **c)** $\int_{-1}^{0}\frac{1}{3x-6}\,dx$ **d)** $\int_2^3\frac{4}{5x+10}\,dx$ **e)** $\int_{-1}^{3}\frac{-7}{-2y+8}\,dy$

Übungen (3) — Lösungen

1) **S. 86, Aufgabe 10:**

a) $F(x) = e^x$, b) $F(x) = e^{x+1}$, c) $F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x}$,

d) $F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x-3}$, e) $F(x) = -e^{-x}$, f) $F(x) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-3x+2}$.

S. 94, Aufgabe 4:

a) $F(x) = 3e^{2x+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot e^{2x+1}$, b) $F(x) = 2e^{-x+1} \cdot \frac{1}{-1} = -2e^{-x+1}$,

c) $F(x) = -0{,}5e^{2-\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}} = e^{2-\frac{1}{2}x}$, d) $F(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

e) $f(x) = (e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$, $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}$,

f) $f(x) = (e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$, $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

2) **S. 94, Aufgabe 5:**

a) $\displaystyle\int_1^3 2e^{3x}\,dx = \Big[\frac{2}{3}e^{3x}\Big]_1^3 = \frac{2}{3} \cdot (e^9 - e^3) = \frac{2}{3}e^3 \cdot (e^6 - 1) \approx 5388{,}67$,

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 3e^{-x}\,dx = \Big[-3e^{-x}\Big]_{-1}^1 = -3e^{-1} + 3e = 3e - \frac{3}{e} \approx 7{,}05$,

c) $\displaystyle\int_{-2}^3 (e^x - e^{-x})\,dx = \Big[e^x + e^{-x}\Big]_{-2}^3 = (e^3 + e^{-3}) - (e^{-2} + e^2)$

$= e^3 - e^2 - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} \approx 12{,}61$,

d) $\displaystyle\int_0^1 (e^{-x} + x)\,dx = \Big[-e^{-x} + \frac{1}{2}x^2\Big]_0^1 = -e^{-1} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{e} \approx 1{,}13$,

e) $\displaystyle\int_{-1}^0 (e^x - x - 1)\,dx = \Big[e^x - \frac{1}{2}x^2 - x\Big]_{-1}^0 = 1 - (e^{-1} - \frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \approx 0{,}13$,

f) $\displaystyle\int_0^1 (e^x - 1)^2\,dx = \int_0^1 (e^{2x} - 2e^x + 1)\,dx = \Big[\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x\Big]_0^1$

$= (\frac{1}{2}e^2 - 2e + 1) - (\frac{1}{2} - 2) = \frac{e^2}{2} - 2e + \frac{5}{2} \approx 0{,}76$,

S. 86, Aufgabe 12:

a) $\displaystyle\int_0^1 ke^x\,dx = e \iff \Big[ke^x\Big]_0^1 = e \iff ke - k = e \iff k = \frac{e}{e-1} \approx 1{,}58$

b) $\displaystyle\int_0^1 (e^x + kx)\,dx = 2 \iff \Big[e^x + \frac{k}{2}x^2\Big]_0^1 = 2$

$$\iff e + \frac{k}{2} - 1 = 2 \iff k = 2(3-e) \approx 0{,}56$$

c) $\displaystyle\int_0^k e^x\,dx = e \iff e^k - 1 = e \iff k = \ln(e+1) \approx 1{,}31$

d) $\displaystyle\int_0^2 ke^{kx}\,dx = e-1 \iff \Big[e^{kx}\Big]_0^2 = e-1 \iff e^{2k} - 1 = e - 1$

$$\iff e^{2k} = e \iff 2k = 1 \iff k = \frac{1}{2}$$

3) **S. 95, Aufgabe 8:**

a) $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x-1} = 3x^{-1} - 2x^{-2} + (x-1)^{-1}$,

$F(x) = 3\ln|x| + 2x^{-1} + \ln|x-1| = 3\ln|x| + \dfrac{2}{x} + \ln|x-1|$,

b) $f(x) = \dfrac{1-x-x^2-x^4}{2x^2} = \dfrac{1}{2}(x^{-2} - x^{-1} - 1 - x^2)$,

$F(x) = \dfrac{1}{2}\cdot(-x^{-1} - \ln|x| - x - \dfrac{1}{3}x^3) = -\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2}\ln|x| - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{6}x^3$,

c) $f(x) = \dfrac{1}{3(x-4)} + \dfrac{1}{2(x+3)}$, $\quad F(x) = \dfrac{1}{3}\ln|x-4| + \dfrac{1}{2}\ln|x+3|$,

d) $f(x) = \dfrac{2}{2x+1} - \dfrac{3}{3x-1} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}x+1}$, $\quad F(x) = \ln|2x+1| - \ln|3x-1| + 2\ln|\dfrac{1}{2}x+1|$,

Anmerkung: Auch $F_2(x) = \ln|2x+1| - \ln|3x-1| + 2\ln|x+2|$ ist eine Stammfunktion von f. Wie erklären Sie den scheinbaren Widerspruch?

e) $f(x) = \dfrac{-3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x - 3}{x^2} = -3x + \dfrac{1}{2} - 5x^{-1} - 3x^{-2}$,

$F(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x - 5\ln|x| + \dfrac{3}{x}$,

f) $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x+1}$, $\quad F(x) = 2\ln|x| - 3\ln|x+1|$,

g) $f(x) = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3}{x+2}$, $\quad F(x) = 2\ln|x-1| - 3\ln|x+2|$,

h) $f(x) = \dfrac{x-4}{x-5} = 1 + \dfrac{1}{x-5}$ (notfalls Polynomdivision!),

$F(x) = x + \ln|x-5|$,

i) $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1} = 1 + \dfrac{2}{2x-1}$, $\quad F(x) = x + \ln|2x-1|$.

Das in den Beispielen h), i) angewendete Verfahren lässt sich auf alle rationalen Funktionen anwenden, bei denen der Nenner linear ist: Man führt zunächst Polynomdivision durch; als Ergebnis erhält man eine ganzrationale Funktion $g(x)$ + eine rationale Funktion der Form $\dfrac{c}{ax+b}$ mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Eine Stammfunktion der letzteren ist $F(x) = \dfrac{c}{a}\cdot\ln|ax+b|$.

4) **S. 93, Aufgabe 10:**

a) $\displaystyle\int_{-2}^{-6} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{-2}^{-6} = \ln 6 - \ln 2 = \ln\frac{6}{2} = \ln 3,$

b) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{1}^{e} = \ln e - \ln 1 = 1,$

c) $\displaystyle\int_{0,5}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{0,5}^{2} = \ln 2 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2 - (\ln 1 - \ln 2) = 2\ln 2,$

d) $\displaystyle\int_{-5}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5,$

e/f) Das zu berechnende Integral $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$ ist wegen des Pols von $\dfrac{1}{x}$ nur definiert, wenn $a, b > 0$ oder $a, b < 0$, also a, b gleiches Vorzeichen haben. Dann ist $\frac{b}{a}$ positiv und es gilt:

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln|b| - \ln|a| = \ln\frac{|b|}{|a|} = \ln\left|\frac{b}{a}\right| = \ln\frac{b}{a}\,.$$

Man erhält also in e) und f) dasselbe Ergebnis:

$$\boxed{\text{Haben } a, b \text{ gleiches Vorzeichen, so gilt:} \quad \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}\,.}$$

Man kann diese allgemeine Formel natürlich auch zur Berechnung der vorangehenden Aufgaben a)–d) benutzen.

S. 93, Aufgabe 11: Alle Integrale sind definiert, da die Definitionslücken der (rationalen, also stetigen) Integranden nicht im Integrationsintervall liegen.

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \Big[\ln|x-1|\Big]_2^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}69,$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3}{x+5}\,dx = 3\cdot\Big[\ln|x+5|\Big]_{-1}^{1} = 3(\ln 6 - \ln 4) = 3\ln\frac{3}{2} \approx 1{,}22,$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{3x-6}\,dx = \Big[\frac{1}{3}\ln|3x-6|\Big]_{-1}^{0} = \frac{1}{3}(\ln 6 - \ln 9) = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{3} \approx -0{,}14,$

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{4}{5x+10}\,dx = \frac{4}{5}\int_2^3 \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{4}{5}\Big[\ln|x+2|\Big]_2^3 = \frac{4}{5}(\ln 5 - \ln 4) \approx 0{,}18,$ Korr.

e) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{-7}{-2y+8}\,dy = \int_{-1}^{3} \frac{-7}{-2x+8}\,dx = \frac{7}{2}\int_{-1}^{3} \frac{1}{2x-4}\,dx = \frac{7}{2}\Big[\ln|2x-4|\Big]_{-1}^{3} =$ $\displaystyle\frac{7}{2}(\ln 1 - \ln 5) = -\frac{7}{2}\ln 5 \approx -5{,}63.$

Übungen (4)

1) a) Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = x^3 - x^4$ und der x-Achse in den Grenzen von $a = -2$ bis $b = 3$.
b) Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = x^5 - 3x^4$ und der x-Achse in den Grenzen von -3 bis $+3$.

2) Bestimmen Sie die Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse *eingeschlossen* wird:
a) $f(x) = x^3 - x^5$,
b) $f(x) = x^4 - 4x^2$,
c) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$.

3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks zwischen dem Graphen von f und der x-Achse:
a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{4}{3}x^3$

4) Bestimmen Sie den Inhalt der von den Graphen von f und g *eingeschlossenen* Fläche:
a) $f(x) = x^4 - x^2, \quad g(x) = 4(x-1)(x+1)$
b) $f(x) = x^5 - 4x^3, \quad g(x) = x^4 - 4x^2$
c) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x + 2, \quad g(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 2$
d) $f(x) = x^3(x-1), \quad g(x) = -x + 1$
e) $f(x) = \frac{4}{x^2}, \quad g(x) = -x^2 + 5$
f) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, \quad g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}},$

5) Zeigen Sie, dass die Graphen von f und g mit $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ und $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ zwei Flächenstücke von gleichem Inhalt einschließen.

6) In die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ ist eine Sehne (=Verbindungstrecke zweier Parabelpunkte) mit den Endpunkten $P_1 = (-1,y_1)$ und $P_2 = (2,y_2)$ gezeichnet. Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das die Parabel und die Sehne einschließen.

7) Es sei $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$.
a) Der Graph von f schließt mit der Geraden durch die beiden Tiefpunkte ein Flächenstück ein. Wie groß ist der Flächeninhalt?
b) Wie groß ist die Fläche, die der Graph von f mit der Tangente durch den Hochpunkt einschließt?

8) S. 147, Nr. 7, 10

△ ***7.***
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.
a) Zeige: $f(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$.
b) Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der 1. Achse zwischen den Extremstellen von f einschließt.

△ ***10.***
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 5x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$.
a) Untersuche die Funktion f und zeichne den Graphen.
b) Berechne die Fläche unter dem Graphen von f zwischen den Wendestellen von f.
c) Berechne $\int_0^k f(x)\,dx$ für $k > 0$. Was ergibt sich für $k \to \infty$?

Übungen (4) — Lösungen

1) a) Wir bestimmen zunächst die Bereiche zwischen a und b, in denen f sein Vorzeichen nicht ändert. Dazu berechnen wir die Nullstellen mit VZW in diesem Bereich.

$$x^3 - x^4 = 0 \iff x^3(1-x) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = 1\,.$$

Beides sind Nullstellen mit Vorzeichenwechsel, da von ungerader Ordnung.
Das Intervall $[a,b] = [-2,+3]$ wird durch die beiden Nullstellen 0 und 1 in drei Teilintervalle $[-2,0]$, $[0,1]$, $[1,3]$ zerlegt, in denen f sein Vorzeichen nicht ändert. Wir berechnen für alle drei Intervalle die Integrale:

$$\int_{-2}^{0} (x^3 - x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big]_{-2}^{0} = 0 - (\frac{16}{4} - \frac{-32}{5}) = -\frac{52}{5} = -10{,}4\,,$$
$$\int_{0}^{1} (x^3 - x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} = 0{,}05\,,$$
$$\int_{1}^{3} (x^3 - x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big]_{1}^{3} = (\frac{81}{4} - \frac{243}{5}) - \frac{1}{20} = -\frac{568}{20} = -\frac{142}{5} = -28{,}4\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist die Summe der Beträge der Integrale, also

$$A = \frac{52}{5} + \frac{1}{20} + \frac{142}{5} = 10{,}4 + 0{,}05 + 28{,}4 = 38{,}85$$

b) Wieder berechnen wir die Nullstellen mit VZW:

$$x^5 - 3x^4 = 0 \iff x^4(x-3) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = 3\,.$$

Die Nullstellen sind 0 (ohne VZW) und +3 (mit VZW). Beide Nullstellen liegen im Intervall $[a,b] = [-3,+3]$, aber da 3 am Rand des betrachteten Intervalls liegt, findet im Intervall kein VZW statt. Es genügt also in diesem Fall, das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_{-3}^{3} (x^5 - 3x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5\Big]_{-3}^{3} = (\frac{3^6}{6} - \frac{3^6}{5}) - (\frac{3^6}{6} - \frac{-3^6}{5}) = -2 \cdot \frac{3^6}{5} = -291{,}6\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist daher $A = 291{,}6$.

2) a) Wir bestimmen die Nullstellen von

$$f(x) = x^3 - x^5 = x^3(1 - x^2) = x^3(1+x)(1-x)\,.$$

Die beiden 'äußersten' Nullstellen sind $a = -1$ und $b = +1$, die einzige weitere Nullstelle *mit* VZW ist 0. Wir berechnen also

$$\int_{0}^{1} (x^3 - x^5)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\,.$$

Wegen der Punktsymmetrie des Integranden ergibt das Integral $\int_{-1}^{0} f$ den negativen Wert $-1/12$. Der gesuchte Flächeninhalt ist

$$A = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\,.$$

b) $f(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x-2)(x+2)$ hat die Nullstellen -2, 0 und $+2$. Die beiden äußersten sind -2 und $+2$, bei der dritten liegt kein VZW vor, daher berechnen wir $\int_{-2}^{2} f$. Wegen der Achsensymmetrie von f gilt

$$\int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{2} (x^4 - 4x^2)\,dx = 2 \cdot \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\Big]_0^2 = 2 \cdot (\frac{32}{5} - \frac{32}{3}) = -\frac{128}{15}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist daher $A = \dfrac{128}{15}$.

c) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 - 5x + 6) = x^2(x-2)(x-3)$ hat die Nullstellen 0, 2 und 3. Die äußersten sind 0 und 3, bei der dritten dazwischen findet ein VZW statt. Daher berechnen wir

$$\int_0^2 f = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + 2x^3\Big]_0^2 = \frac{32}{5} - 20 + 16 = \frac{12}{5}\,,$$

$$\int_2^3 f = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + 2x^3\Big]_2^3 = \Big(\frac{3^5}{5} - \frac{5 \cdot 3^4}{4} + 2 \cdot 3^3\Big) - \frac{12}{5} = \frac{27}{20} - \frac{48}{20} = -\frac{21}{20}\,.$$

Die gesuchte Fläche ist daher

$$A = \frac{12}{5} + \frac{21}{20} = \frac{69}{20} = 3{,}45\,.$$

3) a) Die Nullstellen von $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ bestimmt man durch Substitution $z = x^2$:

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \iff (z-4)(z-1) = 0 \iff z = 4 \;\vee\; z = 1\,.$$

Die Lösung der Gleichung $x^2 = z$ ergibt für f die vier Nullstellen ± 1, ± 2. An allen Stellen findet ein VZW statt. Wir integrieren von Nullstelle zu Nullstelle. Da f achsensymmetrisch ist, genügt es, die folgenden Integrale zu berechnen:

$$\int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\Big]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 = \frac{38}{15}\,,$$

$$\int_1^2 (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\Big]_1^2 = \Big(\frac{32}{5} - \frac{40}{3} + 8\Big) - \frac{38}{15} = -\frac{22}{15}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist dann das Doppelte (wegen der Symmetrie) der *Beträge* dieser Integralwerte, also

$$A = 2 \cdot (\frac{38}{15} + \frac{22}{15}) = 8\,.$$

Ergebnisse zu b) und c):

b) Nullstellen: 0 doppelt und 1 sowie 2 einfach. Fläche $A = \frac{7}{60} + \frac{23}{60} = \frac{1}{2}$.

c) Graph ist punktsymmetrisch, Nullstellen sind 0 und ± 2. Die Fläche beträgt $A = 2 \cdot \frac{16}{9} = \frac{32}{9}$.

4) a) Differenzfunktion $h(x) = f(x) - g(x) = x^4 - x^2 - (4x^2 - 4) = x^4 - 5x^2 + 4$. Dies ist genau die Funktion f aus der vorangehenden Aufgabe a). Nun sind die Schnittstellen von f und g gerade die Nullstellen von h und die Flächenstücke zwischen den Graphen von f und g sind genauso groß wie die Flächenstücke zwischen dem Graphen von h und der x-Achse. Deren Gesamtflächeninhalt wurde bereits in der vorangehenden Aufgabe zu $A = 8$ bestimmt.

c) Hier ergibt sich ebenfalls $h(x) = f(x) - g(x) = x^4 + x^3 - 3x + 2 - (x^3 + 5x^2 - 3x - 2) = x^4 - 5x^2 + 4$ und damit dasselbe Ergebnis wie unter a).

b) Als erstes bestimmen wir die Differenzfunktion $h(x) = f(x) - g(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^3 - x^2 - 4x + 4)$. Diese hat bei 0 eine doppelte Nullstelle. Eine weitere Nullstelle von h ist $x = 1$ und Polynomdivison ergibt $h(x) = x^2(x-1)(x^2-4) = x^2(x-1)(x+2)(x-2)$. Die äußersten Nullstellen von h sind -2 und $+2$; dazwischen liegt nur ein VZW vor, und zwar bei $+1$. (0 ist doppelte Nullstelle, dort also kein VZW.)

Zur Berechnung der Fläche zwischen dem Graphen von h und der x-Achse müssen wir also zwei Integrale bestimmen:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} h(x)\,dx &= \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3\Big]_{-2}^{1} \\ &= \Big(\frac{1}{6} - \frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3}\Big) - \Big(\frac{32}{3} + \frac{32}{5} - 16 - \frac{32}{3}\Big) \\ &= \frac{3}{10} - \Big(-\frac{48}{5}\Big) = \frac{99}{10} \\ \int_{1}^{2} h(x)\,dx &= \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3\Big]_{1}^{2} \\ &= \Big(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3}\Big) - \Big(\frac{1}{6} - \frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3}\Big) \\ &= -\frac{16}{15} - \frac{3}{10} = -\frac{41}{30}\,.\end{aligned}$$

Da die Funktion h in den beiden Integrationsbereichen ihr Vorzeichen nicht ändert, sind die Beträge der Integrale gleich den Flächeninhalten der entsprechenden Flächenstücke und die gesuchte Gesamtfläche ist

$$A = \frac{99}{10} + \frac{41}{30} = \frac{169}{15}\,.$$

Diese zwischen dem Graphen von h und der x-Achse eingeschlossene Fläche ist genauso groß wie die gesuchte Fläche, die zwischen den beiden Graphen von f und g eingeschlossen ist.

d) Wieder berechnen wir als erstes die Differenzfunktion $h(x) = x^4 - x^3 + x - 1$ und deren Linearfaktorzerlegung. Erste Nullstellen liegen bei $x = \pm 1$ und Polynomdivision ergibt $h(x) = (x^2-1)(x^2-x+1)$. Da der Faktor $x^2 - x + 1$ keine Nullstellen besitzt, hat h nur die beiden Nullstellen ± 1.

Wir berechnen also das Integral $\int_{-1}^{1} h$ und beachten die symmetrischen Grenzen. Dies ergibt

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - x^3 + x - 1)\,dx = 2\int_{0}^{1} (x^4 - 1)\,dx = 2 \cdot \Big(\frac{1}{5} - 1\Big) = -\frac{8}{5}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also $A = \frac{8}{5}$.

e) Hier ist wegen des Pols von f bei 0 Vorsicht angebracht. Der Pol darf in keinem der nachfolgenden Integrationsintervalle liegen!

Wir beginnen wie üblich. Die Differenzfunktion ist

$$h(x) = \frac{4}{x^2} - (-x^2 + 5) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2}\,.$$

Deren Nullstellen bestimmen wir mittels Substitution:

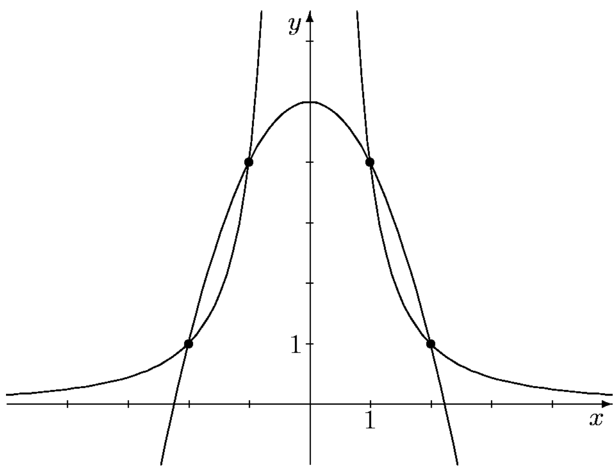
$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\iff x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \iff z^2 - 5z + 4 = 0 \ \wedge\ z = x^2 \\ &\iff (z-4)(z-1) = 0 \ \wedge\ z = x^2 \\ &\iff x^2 = 4 \ \vee\ x^2 = 1 \iff x = \pm 2 \ \vee\ x = \pm 1 \end{aligned}$$

Dies sind 4 verschiedene Nullstellen einer ganzrationalen Funktion vierten Grades, also alle mit Vorzeichenwechsel. Die Integrationsintervalle sind daher $[-2,-1]$ und $[1,2]$. Das Integrationsintervall $[-1,1]$ entfällt, da darin der Pol 0 von f und h liegt! Wegen der Achsensymmetrie von h braucht nur ein Integral berechnet zu werden:

$$\int_1^2 h(x)\,dx = \int_1^2 (4x^{-2} + x^2 - 5)\,dx = \Big[-4x^{-1} + \frac{1}{3}x^3 - 5x\Big]_1^2 = -\frac{2}{3}\,.$$

Die beiden Graphen schließen zwei kongruente Flächenstücke vom Inhalt $\frac{2}{3}$ miteinander ein. Der Gesamtflächeninhalt ist $A = \frac{4}{3}$.

Die nachstehende Skizze beider Graphen (begründen Sie kurz den Verlauf) zeigt die Problematik des Pols von f: Im Bereich zwischen den Schnittstellen ± 1 umschließen die Graphen von f und g kein Flächenstück.



f) Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R}$, während g nur für positive x definiert ist. Der gemeinsame Definitionsbereich beider Funktionen ist also das Intervall $]0,\infty[$. Über diesem Definitionsbereich gelten dann die folgenden Äquivalenzen:

$$-\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \iff -x\sqrt{x} + 7\sqrt{x} - 6 = 0 \iff z = \sqrt{x} \wedge -z^3 + 7z - 6 = 0 \quad (*)$$

Die kubische Gleichung $z^3-7z+6=0$ hat eine Nullstelle bei $z=1$. Polynomdivision ergibt $z^3-7z+6=(z-1)(z^2+z-6)$. Den quadratischen Faktor zerlegt man nach Vieta in $z^2+z-6=(z-2)(z+3)$ und erhält somit die folgende Faktorisierung $z^3-7z+6=(z-1)(z-2)(z+3)$. Also

$$\begin{aligned}
(*) \iff{}& z=\sqrt{x} \ \wedge\ (z-1)(z-2)(z+3)=0 \\
\iff{}& z=\sqrt{x} \ \wedge\ \big(z=1 \ \vee\ z=2 \ \vee\ z=-3\big) \\
\iff{}& \sqrt{x}=1 \ \vee\ \sqrt{x}=2 \\
\iff{}& x=1 \ \vee\ x=4\,.
\end{aligned}$$

Wir berechnen also folgendes Integral, das hier positiv ausfällt und daher zugleich den gesuchten Flächeninhalt angibt:

$$\int_1^4 (-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}-2x^{-\frac{1}{2}})\,dx = \Big[-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{3}x-4x^{\frac{1}{2}}\Big]_1^4$$
$$=\big(-\frac{8}{3}+\frac{28}{3}-8\big)-\big(-\frac{1}{6}+\frac{7}{3}-4\big)=\frac{1}{2}$$

5) Da die Flächen zwischen zwei Graphen genauso groß sind, wie die Flächenstücke zwischen der Differenzfunktion und der x-Achse, untersuchen wir nur letztere. Wir faktorisieren die Differenzfunktion durch Ausklammern und mit dem Satz des Vieta:

$$f(x)-g(x)=3x^3-18x^2+24x=3x(x^2-6x+8)=3x(x-2)(x-4)\,.$$

Damit liegen 3 Nullstellen 0, 2, 4 vor, jeweils mit Vorzeichenwechsel. Also schließt der Graph der Differenzfunktion zwei Flächenstücke mit der x-Achse ein; eines liegt ober-, eines unterhalb der x-Achse. Um nun zu zeigen, dass beide gleich groß sind, berechnen wir das Gesamtintegral von 0 bis 4 und zeigen, dass dieses den Wert 0 hat:

$$\int_0^4 (3x^3-18x^2+24x)\,dx = \Big[\frac{3}{4}x^4-6x^3+12x^2\Big]_0^4 = 3\cdot 4^3-6\cdot 4^3+12\cdot 4^2=0$$

6) Da die Punkte auf der Parabel liegen sollen, gilt $y_1=(-1)^2=1$ und $y_2=4$. Der Sekantenanstieg ist damit $m=\frac{4-1}{2-(-1)}=1$. Die Sekantengleichung daher $y=x+b$, wobei wir das b bestimmen, indem wir einen der Punkte in die Sekantengleichung einsetzen: $4=2+b \iff b=2$. Damit ist die Sekante Graph der Funktion $g(x)=x+2$.
Gesucht ist nun der Inhalt des von den Graphen von $f(x)=x^2$ und $g(x)=x+2$ eingeschlossenen Flächenstücks. Die Schnittstellen beider Graphen (aus Gradgründen höchstens zwei) sind bereits durch die beiden Punkte bekannt: -1 und 2. Wir berechnen also das Integral der Differenzfunktion in diesen Grenzen:

$$\int_{-1}^2 (x^2-x-2)\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_{-1}^2=-\frac{9}{2}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also 4,5. (Das negative Vorzeichen des Integrals zeigt, dass zwischen den beiden Schnittpunkten die Parabel *unter* der Sekante verläuft.)

7) Der Graph von f ist achsensymmetrisch. Wir bestimmen zunächst die Extrempunkte. $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$ hat die Nullstellen 0 sowie $\pm\sqrt{2}$, alle einfach, alle mit VZW, also alle Extremstellen von f. Da der führende Koeffizient von f positiv ist, sind $\pm\sqrt{2}$ Minimalstellen und 0 eine Maximalstelle. Die Extrempunkte sind also

$$T_1 = (-\sqrt{2}\,, f(-\sqrt{2})) = (-\sqrt{2}\,, -1)\,, \quad T_2 = (\sqrt{2}\,, -1) \quad \text{und} \quad H = (0\,,3)\,.$$

a) Die Gerade durch die Tiefpunkte ist eine Parallele zur x-Achse. Sie ist Graph der Funktion $g(x) = -1$. $\pm\sqrt{2}$ sind die einzigen Schnittstellen dieser beiden Graphen ($f(x) = g(x) \iff x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \iff (x^2-2)^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$). Da der Graph achsensymmetrisch ist, berechnen wir nur

$$\int_0^{\sqrt{2}} (f-g) = \int_0^{\sqrt{2}} (x^4 - 4x^2 + 4)\,dx = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x\Big]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot(\frac{4}{5} - \frac{8}{3} + 4) = \frac{32}{15}\cdot\sqrt{2}$$

und verdoppeln diesen Wert. Der gesuchte Flächeninhalt ist $A = \dfrac{64\sqrt{2}}{15}$.

b) Der einzige Hochpunkt ist $H = (0,3)$; die Tangente hat den Anstieg 0, so dass sie Funktionsgraph von $g(x) = 3$ ist. Die Schnittstellen von f und g sind

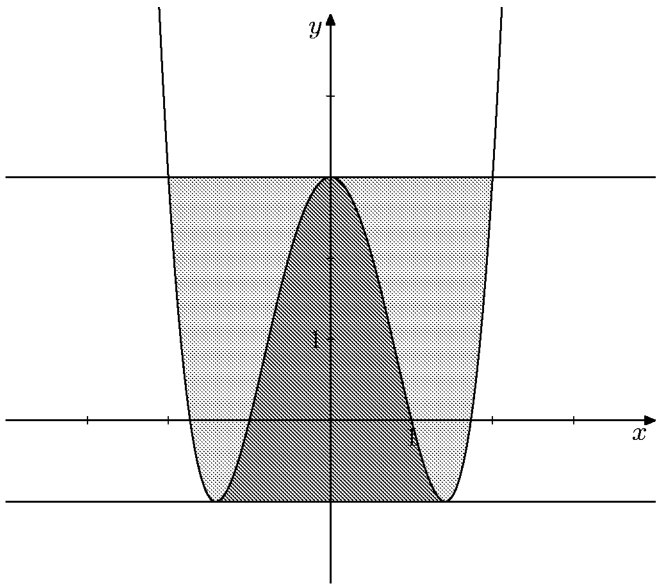
$$f(x) = g(x) \iff 0 = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) \iff x = 0 \ \vee \ x = \pm 2\,.$$

Da $f - g$ bei 0 eine doppelte Nullstelle hat, also kein VZW vorliegt, berechnen wir nur

$$\int_{-2}^{2} (f-g) = 2\cdot\int_0^2 (x^4 - 4x^2)\,dx = 2\cdot\Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\Big]_0^2 = 2\cdot(\frac{32}{5} - \frac{32}{3}) = -\frac{128}{15}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist nun $A = \dfrac{128}{15}$.

Nachfolgend eine Skizze des Graphen und der Flächenstücke. Beachten Sie, dass zur Berechnung der Flächeninhalte keine detaillierte Untersuchung des Funktionsgraphen notwendig war, aber zur Veranschaulichung ist eine grobe Skizze immer nützlich.



8) S. 147, Nr. 7:
a) Es ist

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{-2x}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1}\,.$$

b) Berechnung der Extremstellen von f:

$$f'(x) = 0 - \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = 2\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}\,.$$

Damit sind ± 1 die einzigen Nullstellen von f', beide mit VZW, also Extremstellen von f. Da f keine Definitionslücken hat, ist das zu berechnende Integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ wohldefiniert.
Zur Bestimmung einer Stammfunktion benutzen wir die Zerlegung von a). Für den zweiten Summanden kann man Substitution mit $u(x) = x^2 + 1$ verwenden. Dann gilt

$$\frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{u'(x)}{u(x)}\,.$$

Man erhält also ein logarithmisches Integral (vgl. Skript S. 74). Eine Stammfunktion ist dann $\ln(|u(x)|)$. Insgesamt erhält man als Stammfunktion von $f(x)$:

$$F(x) = x - \ln\left(\left|x^2 + 1\right|\right) = x - \ln(x^2 + 1)\,.$$

Das Integral ist dann

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-1) = 2\,.$$

S. 147, Nr. 10:
a) Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, sie ist punktsymmetrisch: $f(-x) = -f(x)$, und hat bei 0 die einzige Nullstelle. Dort liegt ein VZW vor.
Wir berechnen die Ableitung mittels Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = 5e^{-\frac{1}{2}x^2} + 5x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = 5e^{-\frac{1}{2}x^2}(1 - x^2)\,.$$
$$f''(x) = (-2x) \cdot 5e^{-\frac{1}{2}x^2} + (1 - x^2) \cdot 5e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = 5e^{-\frac{1}{2}x^2} x(x^2 - 3)\,.$$

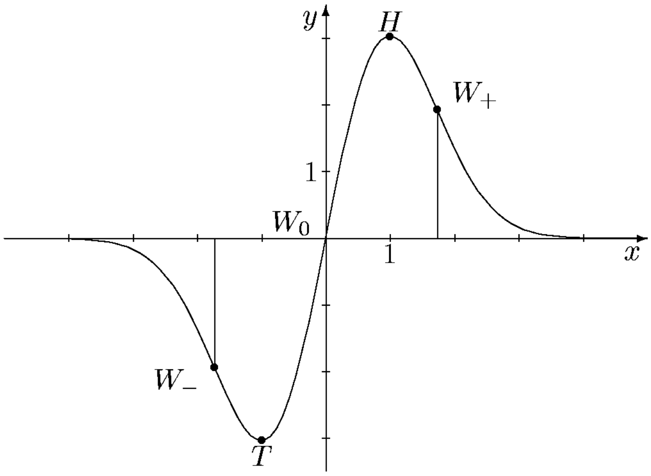
Damit hat f' die einzigen Nullstellen bei ± 1, beide mit VZW, also beide Extremstellen von f.
f'' hat drei einfache Nullstellen, nämlich 0 und $\pm\sqrt{3}$, ebenfalls mit VZW, so dass hier Wendestellen von f liegen.
Da f' schließlich negativ ist (der e-Faktor ist immer positiv, $1 - x^2$ hingegen schließlich negativ), muss die Funktion f schließlich fallen. Der letzte Extrempunkt ist daher ein Hochpunkt. Aus Symmetriegründen ist die andere Extremstelle bei -1 ein Tiefpunkt:

$$H = (1\,, f(1)) = (1\,, \frac{5}{\sqrt{e}})\,,\ T = (-1\,,\ -\frac{5}{\sqrt{e}})\,.$$

Die Wendepunkte sind

$$W_0 = (0{,}0)\,, \quad W_\pm = (\pm\sqrt{3}\,,\, \pm\,\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}})\,.$$

Skizze:



b) Wegen der Symmetrie genügt es ein Integral zu berechnen. Wir benutzen dazu die Substitutionsregel (mit $u(x) = -\frac{1}{2}x^2$ und $u'(x) = -x$):

$$\int_0^{\sqrt{3}} f = -5\int_0^{\sqrt{3}} e^{u(x)}\cdot u'(x)\,dx = -5\int_{u(0)}^{u(\sqrt{3})} e^z\,dz = -5\Big[e^z\Big]_0^{-\frac{3}{2}} = 5(1-\frac{1}{\sqrt{e^3}})\,.$$

c) Genauso berechnet man

$$\int_0^k f = 5(1-e^{-\frac{1}{2}k^2})$$

und ermittelt als Grenzwert (mit den Grenzwertsätzen sowie der Tatsache $e^z \to 0$ für $z \to -\infty$):

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^k f = 5\cdot(1-0) = 5\,.$$

Man kann diesen Grenzwert deuten als den Flächeninhalt des *unbegrenzten* Flächenstücks zwischen dem Graphen und der positiven x-Achse. Dieses Flächenstück hat zwar eine unbegrenzte Ausdehnung aber einen endlichen Flächeninhalt.

Übungen (5)

1) S. 146 oben(!), Aufgabe 2

△ ***2.***
Wende Produktintegration an. Ermittle eine Stammfunktion der Integrandenfunktion.

a) $\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$ **c)** $\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx$ **e)** $\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$ **g)** $\int_0^{1} x^2 e^x \, dx$ **i)** $\int_1^{2} x \ln x \, dx$

b) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx$ **d)** $\int_1^{4} x\sqrt{x} \, dx$ **f)** $\int_0^{1} x e^x \, dx$ **h)** $\int_0^{1} x^3 e^x \, dx$ **j)** $\int_1^{2} x^2 \ln x \, dx$

2) a) Machen Sie sich an den Beispielen der vorangehenden Aufgabe klar, dass man folgende Integraltypen mittels partieller Integration berechnen kann. Dabei sei p eine beliebige *ganzrationale* Funktion.

$$\int_a^b p(x)e^x \, dx \ : \quad \text{Partielle Integration mit } u'(x) = e^x\,,\ v(x) = p(x)\,,$$

$$\int_a^b p(x)\ln(x) \, dx \ : \quad \text{Partielle Integration mit } u'(x) = p(x)\,,\ v(x) = \ln(x)\,,$$

Beurteilen Sie den unterschiedlichen Rechenaufwand in den beiden Fällen.
b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $\ln(x)$, indem Sie oben $p(x) = 1$ wählen.

3) Berechnen Sie auf der Basis der oben gefundenen Stammfunktion von $\ln(x)$ die Integrale $\int_a^b \ln^2$ und $\int_a^b \ln^3$.

4) S. 144/145, Nr. 2, 6

△ ***2.***
Wende die Substitutionsformel an.

a) $\int_0^{4} x(x^2+1)^2 \, dx$ **d)** $\int_{-1}^{-2} \frac{5x}{x^2+1} \, dx$ **g)** $\int_1^{4} x\cdot\sqrt{x^2+1} \, dx$ **j)** $\int_1^{2} \frac{x}{(3x^2+5)^4} \, dx$

b) $\int_{-1}^{2} x^2(2x^3-1) \, dx$ **e)** $\int_2^{3} \frac{3x}{4x^2-1} \, dx$ **h)** $\int_0^{1} x\cdot\sqrt{2x^2+4} \, dx$ **k)** $\int_a^{b} f(x)\cdot f'(x) \, dx$

c) $\int_0^{1} (4x+3)\cdot(2x^2+3x-1)^3 \, dx$ **f)** $\int_2^{4} \frac{2x-1}{x^2-x+1} \, dx$ **i)** $\int_1^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$ **l)** $\int_a^{b} \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx \quad (f(x)>0)$

△ ***6.***
Zur Exponential- und Logarithmusfunktion

a) $\int_a^{b} x\cdot e^{x^2} \, dx$ **b)** $\int_a^{b} (x\cdot e^{3x^2}+2x) \, dx$ **c)** $\int_a^{b} e^{2x+1} \, dx$ **d)** $\int_a^{b} x e^{2x^2} \, dx$ **e)** $\int_1^{2} \frac{\ln x}{x} \, dx$ **f)** $\int_1^{2} x\cdot\ln x^2 \, dx$

5) S. 146, Nr. 1 a)–c), g)–l)

△ ***1.***
Ermittle eine Stammfunktion F zu f.

a) $f(x) = 2x\cdot e^{x^2}$ **d)** $f(x) = (1-4x)^3$ **g)** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ **j)** $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^3}$

b) $f(x) = x^2\cdot e^{x^3}$ **e)** $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ **h)** $f(x) = \frac{x^2}{(x^3-1)^2}$ ▲ **k)** $f(x) = \frac{1}{x\cdot(\ln x)^3}$

c) $f(x) = x^2\cdot e^{-x^3}$ **f)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$ **i)** $f(x) = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x}}$ ▲ **l)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2\cdot\ln x}}$

Übungen (5) — Lösungen

1) Ergebnisse der Aufgabe 2 auf S. 146, oben(!):

a) -2π	b) $\pi^2 - 4$	c) $\pi \cdot (\pi^2 - 6)$
d) $\frac{62}{5}$	e) -2π	f) 1,
g) $e - 2 \approx 0{,}71828$,	h) $6 - 2e \approx 0{,}56$,	i) $2\ln(2) - \dfrac{3}{4} \approx 0{,}64$,

j) $\dfrac{8}{3}\ln(2) - \dfrac{7}{9} \approx 1{,}07$.

2) a) Mit den angegebenen Setzungen ergibt partielle Integration im ersten Fall

$$\int_a^b p(x)e^x\,dx = \big[p'(x)e^x\big]_a^b - \int_a^b p'(x)e^x\,dx\,.$$

Das letzte Integral ist wieder von demselben Typ, jedoch ist der ganzrationale Faktor nun $p'(x)$ und damit um einen Grad kleiner als $p(x)$. Man kann nun denselben Prozess wiederholen, und zwar solange, bis der Grad 0 ist (und damit der ganzrationale Faktor eine Konstante). Das entstehende Integral $\int_a^b c \cdot e^x\,dx$ ist dann unmittelbar berechenbar.
Im zweiten Fall erhält man durch partielle Integration

$$\int_a^b p(x)\ln(x)\,dx = \big[P(x)\ln(x)\big]_a^b - \int_a^b P(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx\,.$$

Dabei sei P eine (ganzrationale) Stammfunktion von p, und zwar ohne absolutes Glied. Damit ist $P(x)$ durch x teilbar und folglich der Integrand $P(x)\cdot\frac{1}{x}$ im letzten Integral selbst eine *ganzrationale* Funktion, so dass dieses Integral problemlos berechnet werden kann.
Man bemerkt, dass im zweiten Fall eine einmalige Anwendung der partiellen Integration unmittelbar zum Ergebnis führt, während im ersten Fall die partielle Integration mehrfach angewendet werden muss (so oft wie der Grad von p angibt).
b) Hier ist $p(x) = 1$ und man wählt $P(x) = x$. Dann erhält man nach obigem Schema

$$\int_a^b 1\cdot\ln(x)\,dx = \big[x\ln(x)\big]_a^b - \int_a^b x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \big[x\ln(x)\big]_a^b - \big[x\big]_a^b = \big[x\ln(x) - x\big]_a^b\,.$$

Der so gefundene Funktionsterm $x\ln(x) - x$ ist damit eine Stammfunktion für $\ln(x)$ (was man durch Ableiten überprüfen kann).

3) Wir benutzen den in der vorangehenden Aufgabe ermittelten Stammfunktionsterm $x(\ln x - 1)$ für $\ln x$ und erhalten mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_a^b \underbrace{\ln(x)}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{v(x)}\,dx &= \big[x(\ln x - 1)\cdot\ln x\big]_a^b - \int_a^b x(\ln x - 1)\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= \big[x(\ln^2 x - \ln x)\big]_a^b - \int_a^b (\ln x - 1)\,dx\\ &= \big[x(\ln^2 x - \ln x)\big]_a^b - \big[x(\ln x - 1) - x\big]_a^b\\ &= \big[x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)\big]_a^b\end{aligned}$$

und unter Verwendung dieses Resultats

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \ln^2(x)\cdot\ln(x)\,dx\\
&= \big[x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)\cdot\ln x\big]_a^b - \int_a^b (\ln^2 x - 2\ln x + 2)\,dx\\
&= \big[x(\ln^3 x - 2\ln^2 x + 2\ln x)\big]_a^b - \big[x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) - 2x(\ln x - 1) + 2x\big]_a^b\\
&\qquad\qquad = \big[x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6)\big]_a^b
\end{aligned}$$

Damit ist $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)$ ein Stammfunktionsterm für $\ln^2 x$ und $x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$ einer für $\ln^3 x$. (Die Überprüfung dieser Resultate ist eine gute Ableitungsübung (Produkt-, Kettenregel).)

4) S. 144, Nr. 2.:

a) Wähle $u(x) = x^2 + 1$, also $u'(x) = 2x$ und somit $x = \frac{1}{2}u'(x)$. Daher

$$\int_0^4 x(x^2+1)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^4 u(x)^2\cdot u'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(4)} z^2\,dz = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}z^3\Big]_1^{17} = \frac{2456}{3}\,.$$

b) Wähle $u(x) = 2x^3 - 1$, also $u'(x) = 6x^2$ und $x^2 = \frac{1}{6}u'(x)$. Daher

$$\int_{-1}^2 x^2(2x^3-1)dx = \frac{1}{6}\int_{-1}^2 u(x)\cdot u'(x)\,dx = \frac{1}{6}\int_{u(-1)}^{u(2)} z\,dz = \frac{1}{6}\Big[\frac{1}{2}z^2\Big]_{-3}^{15} = 18\,.$$

c) Wähle $u(x) = 2x^2 + 3x - 1$, also $u'(x) = 4x + 3$. Daher

$$\int_0^1 (4x+3)(2x^2+3x-1)^3 dx = \int_0^1 u(x)^3\cdot u'(x)\,dx \int_{u(0)}^{u(1)} z^3\,dz = \Big[\frac{1}{4}z^4\Big]_{-1}^{4} = \frac{255}{4}\,.$$

d) Wähle $u(x) = x^2 + 1$, also $u'(x) = 2x$ und $x = \frac{1}{2}u'(x)$. Daher

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{-2} \frac{5x}{x^2+1}\,dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{-2} \frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\,dx = \frac{5}{2}\int_{u(-1)}^{u(-2)} \frac{1}{z}\,dz\\
&= \frac{5}{2}\Big[\ln(|z|)\Big]_2^5 = \frac{5}{2}(\ln(5) - \ln(2)) = \frac{5}{2}\ln(\frac{5}{2}) \approx 2{,}29\,.
\end{aligned}$$

e) Wähle $u(x) = 4x^2 - 1$. Integralwert: $\dfrac{3}{8}(\ln(7) - \ln(3))$.

f) Wähle $u(x) = x^2 - x + 1$. Integralwert: $\ln(13) - \ln(3)$.

g) Wähle $u(x) = x^2 + 1$, also $u'(x) = 2x$ und $x = \frac{1}{2}u'(x)$. Daher

$$\begin{aligned}
&\int_1^4 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{u(x)}\cdot u'(x)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{u(1)}^{u(4)} \sqrt{z}\,dz = \frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\Big]_2^{17} = \frac{17}{3}\sqrt{17} - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

h) Wähle $u(x) = 2x^2 + 4$. Integralwert: $\sqrt{6} - \dfrac{4}{3}$.
i) Wähle $u(x) = x^2 + 1$. Integralwert: $\sqrt{5} - \sqrt{2}$.
j) Wähle $u(x) = 3x^2 + 5$, also $u'(x) = 6x$ und $x = \frac{1}{6}u'(x)$. Daher

$$\int_1^2 \frac{x}{(3x^2+5)^4}\,dx = \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{1}{u(x)^4} \cdot u'(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\int_{u(1)}^{u(2)} z^{-4}\,dz = \frac{1}{6}\Big[-\frac{1}{3}z^{-3}\Big]_8^{17} = \frac{489}{2^{10}\cdot 17^3} = \frac{489}{5030912} \approx 9{,}72\cdot 10^{-5}\,.$$

In den abschließenden beiden Aufgaben k) und l) werden zwei *Typen* von Integralen behandelt, die man generell mittels Substitution berechnen kann. Ich schreibe hier $u(x)$ statt $f(x)$, um an unsere Notation der Substitutionsregel anzuschließen.
k) Ein Beispiel für diesen Typ war Aufgabenteil b) (bis auf einen zusätzlichen Faktor).

$$\int_a^b u(x)\cdot u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} z\,dz = \Big[\frac{1}{2}z^2\Big]_{u(a)}^{u(b)} = \frac{1}{2}(u(b)^2 - u(a)^2)\,.$$

l) Dies ist ein äußerst wichtiger Integraltyp. Beispiele dafür waren d) – f). Man nennt dies die *logarithmische* Integration, denn es gilt (sofern das Integral definiert ist, d. h. sofern u zwischen a und b keine Nullstelle hat):

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \int_a^b \frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{1}{z}\,dz = \Big[\ln|z|\Big]_{u(a)}^{u(b)}$$
$$= \ln|u(b)| - \ln|u(a)| = \ln\frac{|u(b)|}{|u(a)|} = \ln\Big|\frac{u(b)}{u(a)}\Big| = \ln\frac{u(b)}{u(a)}\,.$$

Man beachte bei der letzten Beziehung, dass $u(b)$ und $u(a)$ dasselbe Vorzeichen haben (sonst hätte die stetige Funktion u zwischen a und b eine Nullstelle) und folglich $\frac{u(b)}{u(a)}$ positiv ist.
S. 145, Nr. 6.:
a) Wir setzen $u(x) = x^2$, also $u'(x) = 2x$ und $x = \frac{1}{2}u'(x)$. Daher

$$\int_a^b xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b e^{u(x)}\cdot u'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{u(a)}^{u(b)} e^z\,dz = \frac{1}{2}\Big[e^z\Big]_{a^2}^{b^2} = \frac{1}{2}(e^{b^2} - e^{a^2})\,.$$

b) Wir zerlegen das Integral und wenden auf den ersten Summanden die Substitutionsregel mit $u(x) = 3x^2$ an:

$$\int_a^b (xe^{3x^2} + 2x)\,dx = \int_a^b xe^{3x^2}\,dx + \int_a^b 2xdx = \frac{1}{6}\int_a^b e^{u(x)}\cdot u'(x)\,dx + (b^2 - a^2)$$
$$= \frac{1}{6}\Big[e^z\Big]_{u(a)}^{u(b)} + (b^2 - a^2) = \frac{1}{6}(e^{3b^2} - e^{3a^2}) + (b^2 - a^2)\,.$$

c) Hier hat man es lediglich mit linearer Substitution $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$ zu tun:

$$\int_a^b e^{2x+1}\,dx = \Big[\frac{1}{2}e^{2x+1}\Big]_a^b = \frac{1}{2}(e^{2b+1} - e^{2a+1})\,.$$

d) Man wählt $u(x) = x^2$ und erhält als Integralwert: $\frac{1}{4}(e^{2b^2} - e^{2a^2})$.
e) Mit $u(x) = \ln(x)$, also $u'(x) = \frac{1}{x}$ ist dieses Integral vom Typ der vorangehenden Aufgabe 2.k):

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int_1^2 \ln(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 u(x)\cdot u'(x)\,dx = \int_{u(1)}^{u(2)} z\,dz$$
$$= \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{2}\ln^2(2)\,.$$

f) Setzt man hier $u(x) = x^2$, so erhält man

$$\int_1^2 x\ln(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{u(1)}^{u(2)} \ln(z)\,dz\,.$$

Man muss dann entweder eine früher berechnete Stammfunktion von ln benutzen, oder diese erneut mittels partieller Integration berechnen. Man erhält so als Integralwert

$$\int_1^2 x\ln(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\Big[z\ln(z) - z\Big]_1^4 = 4\ln(2) - \frac{3}{2}\,.$$

Man kann das Integral aber auch unter Verwendung der Gesetzmäßigkeiten für den Logarithmus ($\ln(x^2) = 2\ln(x)$ für $x > 0$!) vereinfachen und direkt partielle Integration anwenden (vgl. Aufgabe 5a)):

$$\int_1^2 x\ln(x^2) = 2\int_1^2 x\ln(x) = 2\Big[\frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x)\Big]_1^2 - 2\int_1^2 \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= 4\ln(2) - \int_1^2 x\,dx = 4\ln(2) - \frac{3}{2}\,.$$

5) S. 146, Nr. 1:
a) Substitution $u(x) = x^2$, also $u'(x) = 2x$, ergibt $f(x) = e^{u(x)}\cdot u'(x)$. Nach der Substitutionsregel muss man eine Stammfunktion für e^z bestimmen und in diese $u(x)$ einsetzen. Man erhält so $F(x) = e^{x^2}$ als eine Stammfunktion von f.
b) Substitution $u(x) = x^3$, also $u'(x) = 3x^2$ und somit $x^2 = \frac{1}{3}u'(x)$. Damit wird $f(x) = \frac{1}{3}\cdot e^{u(x)}\cdot u'(x)$. Wieder ist nur eine Stammfunktion für e^z zu bestimmen. Man erhält so $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3}$ als einen Stammfunktionsterm für $f(x)$.
c) Substitution $u(x) = -x^3$; eine Stammfunktion ist $F(x) = -\frac{1}{3}e^{-x^3}$.
g) Substitution $u(x) = x^2-1$; damit ist $f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u(x)}}\cdot u'(x)$ und man benötigt eine Stammfunktion für $\frac{1}{\sqrt{z}} = z^{-\frac{1}{2}}$. Diese ist durch $z^{+\frac{1}{2}}\cdot 2 = 2\sqrt{z}$ gegeben. Setzt man für z nun $u(x)$ ein, so erhält man schließlich $\sqrt{x^2-1}$ als gesuchte Stammfunktion.

h) Substitution $u(x) = x^3 - 1$; eine Stammfunktion ist $-\dfrac{1}{3(x^3-1)}$.
i) Substitution $u(x) = x^2 + x$; eine Stammfunktion ist $F(x) = \sqrt{x^2+x}$.

j) Substitution $u(x) = x^2 + 1$; eine Stammfunktion ist $F(x) = -\dfrac{1}{4(x^2+1)^2}$.
k) Substitution $u(x) = \ln(x)$. Dies ergibt $u'(x) = \frac{1}{x}$ und damit hat $f(x)$ die Form

$$f(x) = \frac{1}{\ln^3 x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{u(x)^3} \cdot u'(x)\,.$$

Gemäß Substitutionsregel muss man nun eine Stammfunktion für $\frac{1}{z^3} = z^{-3}$ bestimmen (etwa $-\frac{1}{2}z^{-2}$) und in diese $u(x)$ einsetzen. Man erhält so $F(x) = -\frac{1}{2\ln^2 x}$ als Stammfunktion für $f(x)$.
l) Diese Funktion ist höchstens für $x > 0$ definiert (ln ist nur dort definiert!), also gilt $\sqrt{x^2} = x$ und damit ist die hier gegebene Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\,.$$

Wegen des Wurzelterms im Nenner ist f nur definiert für $\ln(x) > 0$, d. h. $x > 1$. Die Bestimmung einer Stammfunktion verläuft nun wie in k), nur dass der Exponent 3 durch $\frac{1}{2}$ ersetzt ist. Man erhält als Stammfunktion $F(x) = 2\sqrt{\ln(x)}$.