Leistungskurs Mathematik

Übungen 5. Semester, WS 2009/10

Dr. Norbert Klingen, Köln-Kolleg

16. Dezember 2009

Inhaltsverzeichnis

Übungen (1)

1) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme

a) $\begin{bmatrix} x + 2y + z = 1 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + z = 7 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2x + y - 2z = -6 \\ y + z = 0 \\ 3x - 2z = 1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 3x + 4y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ x + y = 1 \end{bmatrix}$.

2) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme

a) $\begin{bmatrix} 4x + 3y - 3z - 8u = -10 \\ x - y + z + 4u = 13 \\ -4x - 2y + z + 3u = -3 \\ 3x - y - 2z - 7u = -6 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} x - y + z - u = 0 \\ x + y - z - u = 6 \\ x - y - z + u = -2 \\ 2x + y - 2z + 3u = 0 \end{bmatrix}$.

3) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $\begin{bmatrix} x - y + z = 6 \\ 2x + 4y - z = -3 \\ -x - 2y + 3z = 9 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 3x - y + z = 1 \\ -2x + 4y - z = -2 \\ x + 3y = -1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 2x + 3y - 4z = -2 \\ -x + 4y + z = -10 \\ x + y + 5z = 0 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} x - y + 2z = 9 \\ -x + 2y - z = 6 \\ y + z = 4 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 4x - 2y + z = 2 \\ -12x + 6y - 3z = -6 \\ -8x + 4y - 2z = -4 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} -x + y - z = -4 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ -4x - 4y + 2z = 6 \end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie – wenn möglich – Parameterdarstellungen für die Lösungsmengen. Was stellen die Lösungsmengen geometrisch dar?

4) Bestimmen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix und die Lösungsanzahl der folgenden Gleichungssysteme. Bestimmen Sie ggf. eine Parameterdarstellung für die Lösungsmenge.

a) $\begin{bmatrix} x + y + z = 3 \\ y + z + u = 3 \\ x - y - z + u = 0 \\ x + 2y + 2z + u = 6 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} x + y + z = 3 \\ y + z + u = 3 \\ x - y - z + u = 0 \\ x - 2y + 2z + u = -2 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} x + y + z + u = 10 \\ -x + 2y = 3 \\ -2y + 3z = 5 \\ 3z - 4u = -7 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} x - y + z - u = 1 \\ 2x + y - 2z + 3u = 10 \\ -x - 2y + 3z - 4u = -9 \\ 3x - z + 2u = 11 \end{bmatrix}$.

5) Lösen Sie die nachfolgenden linearen Gleichungssysteme. Überlegen Sie sich vor der Rechnung, welche Möglichkeiten es für den Rang r gibt und was dies für die Lösbarkeit bzw. Lösungsanzahl bedeutet.

a) $\begin{bmatrix} 6x - 3y + 2z = -6 \\ -3x + 9y + 4z = 18 \\ 12y + 8z = 24 \\ 3x - 6y + 6z = 12 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} x + y + 2z = 5 \\ -3x - 4y + z = -1 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - 2y - 3z = 2 \end{bmatrix}$,

c) $\left[\begin{array}{rrrrl} x\,+ & y\,- & z\,- & u & =-1 \\ x\,- & y\,+ & z\,+ & u & =\ \ 3 \\ -3x\,+ & 3y\,- & 3z\,- & 3u & =-7 \end{array}\right]$, d) $\left[\begin{array}{rrrrl} x\,- & y\,+ & z\,- & u & =3 \\ 2x\,+ & y\,- & z\,+ & u & =9 \\ -x\,+ & 3y\,- & 2z\,- & u & =0 \end{array}\right]$,

e) $\left[\begin{array}{rrrl} x\,- & y\,+ & z & =\ \ 4 \\ 2x\,+ & 3y\,- & z & =-1 \end{array}\right]$, f) $\left[\begin{array}{rrl} x\,+ & y & =5 \\ z\,- & u & =3 \\ y\,+ & z & =4 \end{array}\right]$, g) $\left[\begin{array}{rrrrl} x\,- & 2y\,- & 3z\,+ & u & =\ \ 4 \\ 2x\,+ & y\,- & z\,+ & 2u & =-2 \\ 3x\,- & y\,- & 4z\,+ & 3u & =\ \ 3 \end{array}\right]$,

h) $\left[\begin{array}{rrrl} x\,- & 2y\,- & 2z & =2 \\ x\,+ & 2y\,+ & z & =1 \\ 2x\,+ & 3y\,+ & 3z & =4 \\ x\,+ & 3y\,+ & z & =0 \end{array}\right]$, i) $\left[\begin{array}{rrrrl} -2x\,- & y\,+ & z & & =-2 \\ 4x\,+ & 2y\,- & 2z & & =\ \ 6 \\ & 7y\,- & 5z\,+ & 4w & =\ \ 2 \end{array}\right]$.

6) Auf einer Kleinkunstbühne tritt ein Rechenkünstler auf. Er fordert die Zuschauer auf, sich drei Zahlen (x, y, z) zu denken und ihm nur die Summen (A, B, C) von je zweien dieser Zahlen zu nennen. Er nennt dann unmittelbar die drei gedachten Zahlen.
a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, das der Rechenkünstler lösen muss. Lösen Sie es für
1) $A = 6$, $B = 9$, $C = 11$,
2) $A = 13$, $B = 17$, $C = 18$.
b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für *beliebige* A, B, C und ermitteln Sie so eine Lösungs*formel* zur Bestimmung von x, y, z.
c) Der Rechenkünstler verrät seinen ‘Trick’: Er addiert $A+B+C$ und halbiert das Ergebnis. Von diesem Wert subtrahiert er dann jeweils eine der Zahlen A, B, C und erhält dabei die drei gedachten Zahlen x, y, z. Vergleichen Sie mit Ihrer Lösungsformel aus b).
d) Der Rechenkünstler ändert die Fragestellung. Die Zuschauer sollen von den gedachten Zahlen (x, y, z) je zwei addieren und die dritte subtrahieren. Wie berechnet man jetzt aus den mitgeteilten Ergebnissen P, Q, R die gedachten Größen?

Übungen (1) — Lösungen

1) Alle Gleichungssysteme sind eindeutig lösbar. Die Lösungsvektoren sind jeweils:
a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Wieder sind alle Gleichungssysteme eindeutig lösbar. Die Lösungsvektoren sind:
a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3) a), c) und f) sind eindeutig lösbar. Die Lösungsvektoren sind $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ für a), $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ für c) und $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ für f).

b) Dieses Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Gauß-Elimination ergibt

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & -4 \\ 0 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die letzte Gleichung $0 = 0$ ist selbstverständlich erfüllt. Die übrigen Gleichungen löst man 'von unten nach oben' auf. Die erste dabei aufzulösende Gleichung $10y - z = -4$ enthält *zwei* Variable, man kann daher auswählen, nach welcher man auflösen will. Hier bietet sich z an.

$$10y - z = -4 \iff z = 10y + 4\,.$$

Die letzte Gleichung besagt, dass y beliebige Werte annehmen kann, dann jedoch $z = 10y + 4$ gewählt werden muss, z ist also durch y bestimmt. Man löst nun die noch verbleibende Gleichung nach der noch *verbleibenden* Variablen x auf (nicht etwa nach z oder y!):

$$3x - y + (10y + 4) = 1 \iff 3x = -9y - 3 \iff x = -3y - 1\,.$$

Die Lösungsvektoren haben also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y - 1 \\ y \\ 10y + 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit beliebigem } y \in \mathbb{R}\,.$$

Die Lösungsmenge ist daher unendlich. Indem man den Lösungsvektor zerlegt in die Vielfachen von y und die 'y-freien' Teile, erhält man die folgende Parameterdarstellung für die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y - 1 \\ y \\ 10y + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (y \in \mathbb{R})\,.$$

Die Lösungsmenge ist die Gerade durch den Punkt $(-1 \mid 0 \mid 4)$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

d) ist unlösbar, denn die Gauß-Elimination ergibt

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right).$$

Die letzte Gleichung enthält einen Widerspruch $0 = -11$, so dass keine Lösung existieren kann.

e) Hier reduziert sich das Gleichungssystem durch Gauß-Elimination auf eine einzige Gleichung, die erste: $4x - 2y + z = 2$. Diese kann man nun nach einer der drei Variablen auflösen, z. B.

$$4x - 2y + z = 2 \iff z = -4x + 2y + 2\,.$$

Dies zeigt, dass x *und* y beliebig gewählt werden können, während z dann gleich $-4x+2y+2$ sein muss, damit das Gleichungssystem erfüllt ist. Die Lösungsvektoren sind daher von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -4x + 2y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{R})\,.$$

Dies stellt eine Parameterdarstellung einer *Ebene* dar: Die Lösungsmenge ist die Ebene durch den Punkt $(0 \mid 0 \mid 2)$ mit den (linear unabhängigen) Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4) a) Gauß-Elimination ergibt:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 3$. In der letzten Nullzeile steht auch auf der rechten Seite 0: Das Gleichungssystem ist lösbar. Die Auflösung 'von unten nach oben' ergibt der Reihe nach

$$\begin{aligned} &3u = 3 \iff u = 1\,, \\ &y + z + 1 = 3 \iff y = 2 - z\,, \\ &x + (2 - z) + z = 3 \iff x = 1\,. \end{aligned}$$

und damit die folgende Parameterdarstellung für die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - z \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{R})\,.$$

Die Lösungsmenge ist damit eine *Gerade,* und zwar durch den Punkt $(1 \mid 2 \mid 0 \mid 1)$ mit *Richtungsvektor* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b),c) Hier ist der Rang jeweils $r = 4$, so dass beide Gleichungssysteme eindeutig lösbar sind. Die Lösungsvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für b) und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ für c).

d) Gauß-Elimination ergibt:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 10 \\ -1 & -2 & 3 & -4 & -9 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 11 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & -3 & 4 & -5 & -8 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 8 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist lösbar; der Rang ist $r = 2$, die Anzahl der freien Parameter daher $n - r = 4 - 2 = 2$, die Lösungsmenge also eine *Ebene.* Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\mathbb{L}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ 8/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5) Zunächst die Vorüberlegungen vor Beginn der Gauß-Umformungen.
a),b),h): Es ist $n = 3$, $m = 4$ und folglich $r \leq n = 3 < m = 4$. $r < m$ bedeutet, dass am Ende der Gauß-Umformungen mindestens eine Nullzeile in der Koeffizientenmatrix auftritt. Es muss also mindestens eine Bedingung für die Lösbarkeit überprüft werden.
c),d),f),g),i): Hier ist $n = 4$, $m = 3$ und folglich $r \leq m = 3 < n = 4$. $r < n$ bedeutet, dass das System – wenn es lösbar ist (!) – unendlich viele Lösungen haben muss, da mindestens ein freier Parameter in der Darstellung der Lösungsmenge auftritt. Diese 5 Gleichungssysteme sind also auf keinen Fall eindeutig lösbar!
Dieselben Überlegungen gelten auch für e), denn auch hier ist $r < n$, da $m = 2$, $n = 3$ und $r \leq 2$ ist.
Im folgenden sind die Gaußumformungen und die sich daraus ergebenden Ergebnisse aufgelistet:

a)
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -3 & 2 & -6 \\ -3 & 9 & 4 & 18 \\ 0 & 12 & 8 & 24 \\ 3 & -6 & 6 & 12 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 15 & 10 & 30 \\ 0 & 12 & 8 & 24 \\ 0 & -9 & 10 & 30 \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -9 & 10 & 30 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 48 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist lösbar; der Rang ist $r = 3 = n$, also gibt es genau eine

Lösung; diese ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b)
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ -3 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 14 \\ 0 & -3 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 26 & 52 \\ 0 & 0 & 26 & 45 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 26 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem ist *unlösbar.* Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 3$.
c)
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -3 & -3 & -7 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & -10 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist wiederum *unlösbar.* Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 2$.

d)
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem ist lösbar (keine Nullzeile). Der Rang ist $r = 3$, die Dimension des Lösungsraumes daher $d = n - r = 1$: Die Lösungsmenge ist eine *Gerade.* Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\mathbb{L}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

e)
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem hat den Rang $r = 2 = m$; es ist lösbar; die Dimension des Lösungsraumes ist $d = n - r = 3 - 2 = 1$, die Lösungsmenge also eine *Gerade.* Als Parameterdarstellung erhalten wir:

$$\mathbb{L}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ -9/5 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2/5 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{R}).$$

f) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Hier bestand die Gaußumformung aus einem simplen Zeilentausch. Der Rang ist $r = 3 = m$; das System ist lösbar und die Lösungsmenge ist $d = n - r = 1$-dimensional. Eine Parameterdarstellung für die Gerade ist

$$\mathbb{L}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

g) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -4 & 3 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & -9 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dieses System ist unlösbar. Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 2$.
Gleiches gilt für i).
h) dagegen ist lösbar; der Rang ist $r = 3$. Wegen $r = n$ ist die Lösung eindeutig: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6) Das zu lösende Gleichungssystem lautet $\left[\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & A \\ x & & & + & z & = & B \\ & & y & + & z & = & C \end{array}\right]$. Dieses Gleichungssystem soll für die angegebenen Werte von A, B, C bzw. für beliebige A, B, C gelöst werden. Dazu verwendet man das Gauß'sche Eliminationsverfahren. Da die Umformungsschritte im Gauß-Verfahren *unabhängig* von der rechten Seite sind, können wir alle drei Aufgaben auf einmal erledigen, indem wir in der Matrixform *mehrere* rechte Seiten gleichzeitig behandeln:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 6 & 13 & A \\ 1 & 0 & 1 & 9 & 17 & B \\ 0 & 1 & 1 & 11 & 18 & C \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 6 & 13 & A \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 4 & B - A \\ 0 & 1 & 1 & 11 & 18 & C \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 6 & 13 & A \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 4 & B - A \\ 0 & 0 & 2 & 14 & 22 & C + B - A \end{array}\right)$$

Jetzt muss man die Gleichungen für die verschiedenen rechten Seiten von unten nach oben auflösen:
1) $2z = 14 \iff z = 7, \quad -y + 7 = 3 \iff y = 4, \quad x + 4 = 6 \iff x = 2;$
2) $2z = 22 \iff z = 11, \quad -y + 11 = 4 \iff y = 7, \quad x + 7 = 13 \iff x = 6.$
Diese beiden Rechnungen sind natürlich überflüssig, wenn wir nun die Aufgabe bei *beliebiger* rechter Seite lösen. Dies ist möglich, da die Koeffizientenmatrix den Rang 3 hat! Die Auflösung ergibt:

$$2z = C + B - A \iff z = \frac{C + B - A}{2},$$
$$-y + \frac{C + B - A}{2} = B - A \iff y = \frac{C}{2} + \frac{B}{2} - \frac{A}{2} + A - B = \frac{C - B + A}{2},$$
$$x + \frac{C - B + A}{2} = A \iff x = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = \frac{A + B - C}{2}.$$

Setzt man die speziellen Werte aus 1) und 2) in diese Auflösungsformeln ein, so ergeben sich die oben konkret berechneten Lösungen.
c) Die Formeln des Rechenkünstlers sind leichter zu verwenden, aber mit den eben berechneten Formeln gleichwertig. Zum Beispiel

$$z = \frac{A+B+C}{2} - A = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} - A = -\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{C+B-A}{2}.$$

Genauso überprüft man die Formeln für y und z.

Für d) lautet das Gleichungssystem $\left[\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & P \\ x & - & y & + & z & = & Q \\ -x & + & y & + & z & = & R \end{array}\right]$ und Gauß-Elimination ergibt

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & -1 & P \\ 1 & -1 & 1 & Q \\ -1 & 1 & 1 & R \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & -1 & P \\ 0 & -2 & 2 & Q-P \\ 0 & 2 & 0 & R+P \end{array}\right).$$

Die Auflösung ist wieder möglich (Rang 3) und ergibt

$$y = \frac{P+R}{2}, \; z = \frac{Q+R}{2}, \; x = \frac{P+Q}{2}.$$

Die *gedachten* Zahlen x, y, z erhält man also, indem man je zwei der *genannten* Zahlen P, Q, R mittelt.

Übungen (2)

1) Gegeben sind die Punkte $A = (2, 1)$, $B = (-2, -3)$ und $C = (4, -1)$.
a) Skizzieren Sie diese drei Punkte in einem Koordinatensystem.
b) Verschieben Sie das Dreieck ABC um den Vektor $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eckpunkte A', B', C' des verschobenen Dreiecks.
c) Überprüfen Sie Ihre Zeichnung durch eine entsprechende Rechnung.
d) Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, sowie die entsprechenden Vektoren $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'A'}$. Was stellen Sie fest?

2) Gegeben sind die Punkte $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$ und $C = (4, 1, 2)$ im Raum. Berechnen Sie die Vektoren

$$\overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{BC}\,,\ \overrightarrow{AC}\,,\ \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})\,,\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\,.$$

3) Es seien A, B und C drei beliebige Punkte. Zeigen Sie auf der Basis der Definition von Vektoraddition und skalarer Multiplikation:
a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$,
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = o$,
c) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,
d) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

4) Es sei $O = (0, 0, 0)$ der Koordinatenursprung eines fest gewählten Koordinatensystems. Überprüfen Sie die folgenden einfachen, aber nützlichen Beziehungen zwischen Ortsvektoren und formulieren Sie ihre Bedeutung in Worten:
a) $A = (a_1, a_2, a_3) \implies \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$,
b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$,
c) Ist $v = \overrightarrow{AB}$, so gilt $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + v$ und $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - v$.

5) a) Zeigen Sie, daß für 4 beliebige Punkte A, B, C, D die folgenden Äquivalenzen gelten:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Ein Viereck $ABCD$ mit diesen Eigenschaften heißt *Parallelogramm*.
b) Bestimmen Sie einen vierten Punkt D so, daß er mit den drei Punkten $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$, $C = (4, 1, 2)$ ein Parallelogramm bildet.

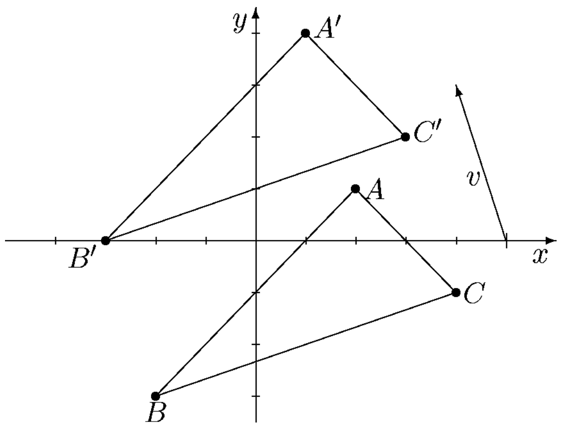
6) a) Zeigen Sie, daß für *beliebige* Punkte die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$$

b) Erläutern Sie an einer geeigneten Skizze, warum der Punkt M *Mittelpunkt* zwischen A und B genannt wird.
c) Welche Bedeutung für Ortsvektoren hat die zweite Eigenschaft in der Äquivalenz von a), wenn man darin für P den Koordinatenursprung O wählt?
d) Berechnen Sie mittels c) die Seitenmitten des Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$ und $C = (4, 1, 2)$.

Übungen (2) — Lösungen

1) Skizze zu a), b):



c) Die Eckpunkte des verschobenen Dreiecks sind charakterisiert durch

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Man muß also die Endpunkte von Pfeilen bestimmen, wenn der Anfangspunkt und der Vektor gegeben sind. Nun gilt (mit den Bezeichnungen $v = \binom{v_1}{v_2}$, $A = (a_1, a_2)$ und entsprechend für A'):

$$v = \overrightarrow{AA'} \iff \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' - a_1 \\ a_2' - a_2 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rl} v_1 &= a_1' - a_1 \\ \wedge\ v_2 &= a_2' - a_2 \end{array}.$$

Damit lassen sich die Koordinaten a_i' von A' sofort berechnen:

$$a_1' = a_1 + v_1\,, \quad a_2' = a_2 + v_2\,.$$

Mit den konkret gegebenen Punkten erhält man so

$$A' = (1,4)\,, \quad B' = (-3,0) \quad \text{und} \quad C' = (3,2)\,.$$

d) Man stellt fest

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{A'B'}\,,\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{B'C'} \text{ und } \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{C'A'}\,.$$

Bei Verschiebung ändern sich zwar die Punkte, nicht aber die Vektoren!

2) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = o$ (Nullvektor). (Zu den letzten beiden Gleichungen siehe auch die nächste Aufgabe.)

3) Gemäß der Definition der Vektorsumme gilt $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. Insbesondere gilt dann $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = o$ und damit ist $\overrightarrow{QP}$ der Gegenvektor zu $\overrightarrow{PQ}$: $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$. Daraus ergibt sich dann:
a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = o$.
c) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
d) Hier kann man die beiden Seiten der Behauptung nicht einfacher darstellen; vielmehr formt man die Vektorgleichung unter Verwendung der Rechengesetze für Vektoren *äquivalent* um, z. B. indem man auf beiden Seiten $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ addiert:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ \iff & \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \\ \iff & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist nun tatsächlich wahr (nach Definition der Vektoraddition), also auch die ursprüngliche Behauptung.

4) a) Es gilt (siehe Skript S. 2) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 - 0 \\ a_2 - 0 \\ a_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$. Dies bedeutet, daß die Koordinaten des Ortsvektors mit denen des Punktes übereinstimmen.
b) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$. Unter Verwendung von a) bedeutet dies, daß die Koordinaten des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AB}$ die Differenz der Koordinaten von End- und Anfangspunkt sind.
c) Die Behauptungen dieses Aufgabenteils erhält man aus b) durch einfache Äquivalenzumformungen (Addition/Subtraktion eines Vektors auf beiden Seiten der Gleichung):

$$v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \iff v + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \iff \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - v\,.$$

Man erhält also die Koordinaten des Endpunktes B, indem man die Koordinaten des Verbindungsvektors $v = \overrightarrow{AB}$ zu den Koordinaten des Anfangspunktes A addiert.
Entsprechend erhält man die Koordinaten des Anfangspunktes A, indem man die Koordinaten des Verbindungsvektors v von den Koordinaten des Endpunktes subtrahiert.

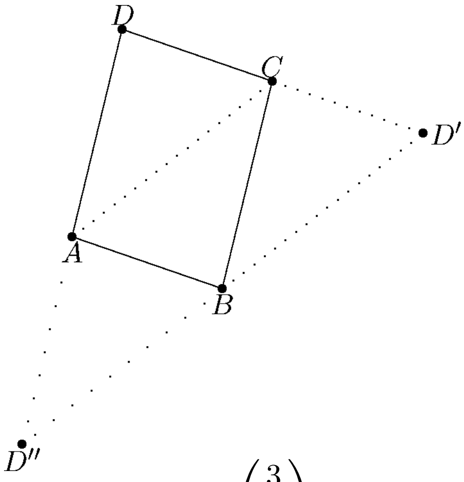
5) a) Es gilt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, womit die erste Äquivalenz bewiesen ist. Weiter gilt

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}\,.$$

Anmerkung: Wir werden noch sehen, daß die hier gewählte vektorielle Charakterisierung von Parallelogrammen mit der üblichen geometrischen gleichwertig ist, die besagt: *Ein Parallelogramm ist ein Viereck $ABCD$ mit zwei Paaren paralleler Seiten.*

b) Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten für die Wahl von D, je nachdem welchem der drei Punkte A, B, C er in dem entstehenden Parallelogramm gegenüberliegen soll. Wenn D der dem Punkt B gegenüberliegende vierte Punkt eines Parallelogramms $ABCD$ sein soll, muß gelten

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\,.$$



Für die Ortsvektoren der vier Punkte muß dann gelten

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $D = (3, 2, 3)$. Die anderen Möglichkeiten wären $D' = (5, 0, 1)$ (gegenüber von A) und $D'' = (1, 0, -3)$ (gegenüber von C).

6) a) beweist man durch geeignete Äquivalenzumformungen (Addition desselben Vektors auf beiden Seiten einer Gleichung oder skalare Multiplikation beider Seiten mit derselben Zahl $r \neq 0$):

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \iff \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$$
$$\iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} = (1 - \frac{1}{2})\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

b) Die erste Eigenschaft $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ bedeutet, daß der Punkt M auf halbem Wege zwischen A und B liegt, also der *Mittelpunkt* zwischen A und B ist.

c) Wählt man in der zweiten Eigenschaft P speziell als Koordinatenursprung O, so erhält man die folgende Beziehung zwischen den Ortsvektoren von A, B und M:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\,.$$

Dies bedeutet, daß der Ortsvektor $\overrightarrow{OM}$ des Mittelpunktes M zwischen A und B das arithmetische Mittel der Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ von A und B ist. Man bestimmt also die Koordinaten des Mittelpunktes M von A und B, indem man die Koordinaten von A und B addiert und dann halbiert.

d) Seien A', B', C' die dem jeweiligen Eckpunkt gegenüberliegenden Seitenmittelpunkte. Unter Verwendung der eben formulierten Regel berechnet man die Koordinaten der Mittelpunkte wie folgt:

$$A' = (\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad B' = (3, 1, 1), \quad C' = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Übungen (3)

1) Gegeben ist der Vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

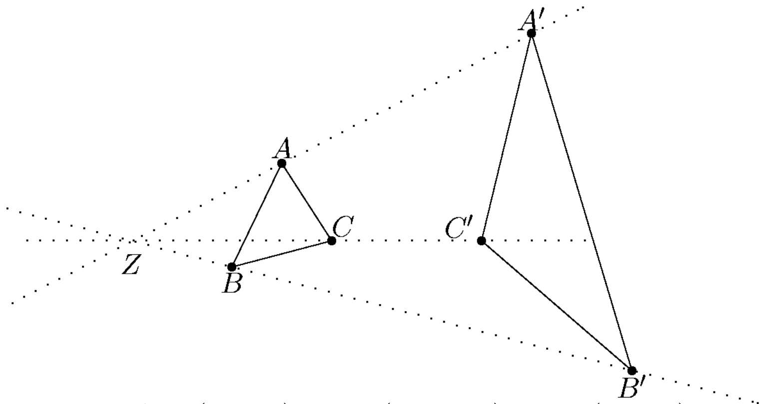
   a) Stellen Sie die Vektoren u, $2u$, $3u$, $\frac{1}{2}u$, $-u$, $-2u$, $-2,5\,u$, $0u$ als Pfeile mit Anfangspunkt $O = (0, 0)$ dar. Wo liegen die Endpunkte?

   b) Wo liegen die Endpunkte, wenn man als Anfangspunkt $A = (-1, 1)$ wählt?

   c) Gehören die Punkte $X = (2, \frac{5}{2})$ und $Y = (25, 13)$ zu dem in b) gefundenen geometrischen Gebilde?

2) Wir betrachten nun die Gerade g durch den Punkt $A = (-2, 2, 0)$ mit dem Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Punkte auf der Geraden g liegen: $P = (32, 19, -17)$, $Q = (-18, -7, 9)$, $R = (8, 7, -5)$.

Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ nennt man *perspektivisch,* wenn sich die drei Verbindungsgeraden einander entsprechender Ecken in *einem* Punkt, dem sog. *Zentrum* Z, schneiden:



Gegeben sind die Punkte $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$, $C = (4, 1, 2)$ sowie $A' = (5, 4, -3)$, $B' = (2, 0, 0)$, $C' = (7, 2, 3)$.

3) a) Zeigen Sie, dass die beiden oben angegebenen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ perspektivisch sind und bestimmen Sie das *Zentrum* Z.

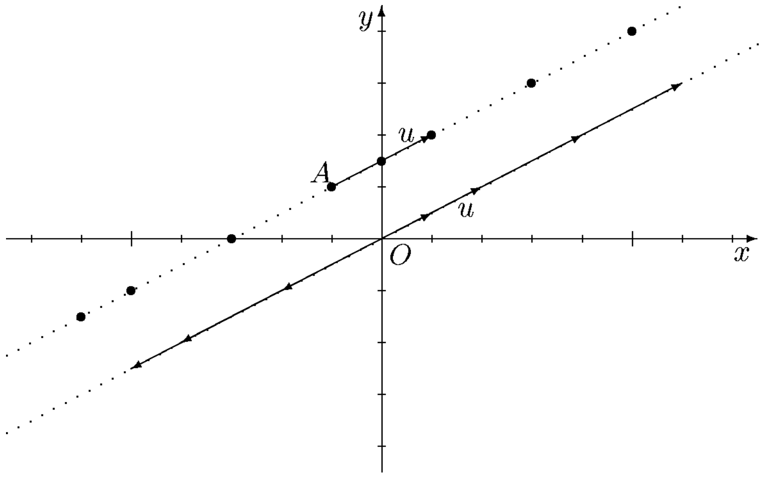
   b) Stellen Sie fest, ob auch die Geraden durch die Schwerpunkte der Dreiecke durch Z verlaufen.

4) a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte einander entsprechender Seiten der beiden Dreiecke.

   b) Zeigen Sie, dass die so gefundenen drei Schnittpunkte wiederum auf einer Geraden liegen!

Übungen (3) — Lösungen

1) Skizzen zu a) – b):



a) Alle Endpunkte liegen auf einer Geraden g durch den Punkt O. Dabei gibt der Vektor u die Richtung dieser Geraden an, man nennt ihn daher *einen Richtungsvektor* von g.
b) Wieder ergibt sich eine Gerade, jetzt jedoch durch A statt O; wieder ist u Richtungsvektor der Geraden.
c) Damit X zu der Geraden aus b) gehört, muss der Vektor $\overrightarrow{AX}$ dieselbe Richtung (aber nicht notwendig Orientierung) wie u haben. Dies bedeutet, dass $\overrightarrow{AX}$ ein *Vielfaches* ru von u sein muss ($r \in \mathbb{R}$). Aus der Skizze bzw. der nachfolgenden Rechnung entnimmt man $r = 3/2$: X liegt auf der Geraden aus b).

$$\overrightarrow{AX} = ru \iff \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} .$$

Zwei Spaltenvektoren stimmen genau dann überein, wenn sie in *allen* ihren Koordinaten übereinstimmen. Damit ist die letztgenannte Vektorgleichung nichts anderes als das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2r &= 3 \\ \wedge \quad r &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

mit der offensichtlichen Lösung $r = 3/2$.
Genauso geht man für Y vor, wobei man auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2r &= 26 \\ \wedge \quad r &= 12 \end{aligned}$$

geführt wird, welches offensichtlich unlösbar ist. Es gibt also kein derartiges r: Y liegt nicht auf der Geraden.

2)

$$\overrightarrow{AP} = rv \iff \begin{pmatrix} 34 \\ 17 \\ -17 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} 34 &= 2r \\ \wedge \quad 17 &= r \\ \wedge \quad -17 &= -r \end{aligned} \iff r = 17 ,$$

also liegt P auf g. Genauso zeigt man, dass R zu g gehört: $\overrightarrow{AR} = 5v$. Für Q hingegen erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcl} & -16 &=& 2r \\ \wedge & -9 &=& r\ , \\ \wedge & 9 &=& -r \end{array}$$

welches offenbar unlösbar ist: Q liegt nicht auf der Geraden g.

3) a) Parameterdarstellungen der drei Verbindungsgeraden entsprechender Dreieckspunkte:

$$g(A,A'):\ x = \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}),$$

$$g(B,B'):\ x = \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}),$$

$$g(C,C'):\ x = \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Schnittpunkt von $g(A,A')$ und $g(B,B')$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \left[\begin{array}{rcrcr} 3r &+& s &=& 1 \\ 3r && &=& -1 \\ -3r &-& s &=& -1 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{rcrcr} 3r && &=& -1 \\ -1 &+& s &=& 1 \\ 1 &-& s &=& -1 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{rcrcr} r && &=& -\frac{1}{3} \\ && s &=& 2 \\ &-& s &=& -2 \end{array}\right] \iff r = -\frac{1}{3} \wedge s = 2$$

Wir erkennen, dass das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Dies bedeutet, dass sich die beiden Geraden in genau einem Punkt schneiden. Den Schnittpunkt Z erhalten wir, indem wir $s = 2$ in die Parameterdarstellung von $g(B,B')$ einsetzen:

$$\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man muss nun zeigen, dass die Gerade $g(C,C')$ ebenfalls durch $Z = (1,0,1)$ verläuft. Dies ist der Fall, wenn für ein $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist $t = -1$ eine Lösung; alle drei Geraden schneiden sich in dem einen Punkt $Z = (1,0,1)$.

b) Die Schwerpunkte der beiden Dreiecke sind (siehe oben) $S = (3, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ sowie $S' = (\frac{14}{3}, 2, 0)$. Z liegt auf der Geraden $g(S,S')$, wenn $\overrightarrow{SZ}$ ein Vielfaches des Richtungsvektors $\overrightarrow{SS'}$ ist:

$$\overrightarrow{SZ} = r\overrightarrow{SS'} \iff \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung ist unlösbar; Z und die beiden Schwerpunkte liegen nicht auf einer Geraden.

4) Man erhält $S_1 = (17/7, 4/7, -3/7)$ als Schnittpunkt von $g(A, B)$ mit $g(A', B')$, $S_2 = (8, 1, 6)$ als Schnittpunkt von $g(A, C)$ mit $g(A', C')$ und schließlich $S_3 = (11/3, 2/3, 1)$ als Schnittpunkt von $g(B, C)$ mit $g(B', C')$. Diese drei Punkte S_i liegen auf einer Geraden, da die beiden Vektoren

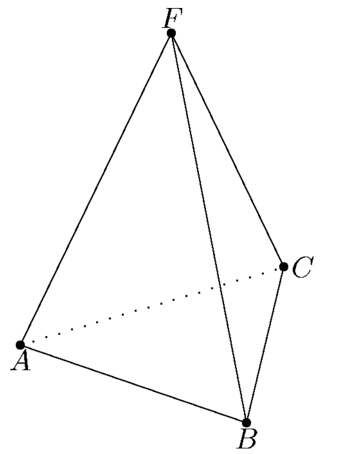
$$\overrightarrow{S_2S_1} = \begin{pmatrix} -39/7 \\ -3/7 \\ -45/7 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{S_2S_3} = \begin{pmatrix} -13/3 \\ -1/3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Vielfache voneinander sind (Faktor 7/9).

Übungen (4)

Seien im Folgenden $A = (2,1,0)$, $B = (3,0,-1)$, $C = (4,1,2)$ sowie $D = (3,2,3)$, $E = (-1,2,1)$, $F = (0,1,2)$.

1) a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene $e(A,B,C)$ durch die Punkte A, B, C an.
   b) Stellen Sie fest, welche der Punkte D, E, F in der Ebene $e(A,B,C)$ liegen.
2) a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene e', die durch den Punkt E verläuft und *parallel* zur Ebene $e(A,B,C)$ ist.
   b) Untersuchen Sie, ob die Gerade $g(C,F)$ die Ebene e' schneidet, und wenn ja, in welchem Punkt.
3) Gesucht ist der Durchschnitt der Ebene $e = e(A,B,C)$ mit der Ebene $e'' = e(C,E,F)$.
   a) Welches Ergebnis erwarten Sie aufgrund Ihrer geometrischen Anschauung?
   b) Reduzieren Sie das Problem auf ein lineares Gleichungssystem. Wieviele Gleichungen und wieviele Unbekannte umfasst es?
   c) Wieviele Lösungen erwarten Sie für dieses Gleichungssystem aufgrund Ihrer Antwort zu a)?
4) Wir betrachten das Tetraeder $ABCF$.
   a) Warum bilden diese 4 Punkte ein Tetraeder?
   b) Wir ‘zersägen’ das Tetraeder längs der in Aufgabe 2 a) gegebenen Ebene e'. Gesucht sind die dadurch entstehenden neuen Eckpunkte A', B', C'. Erläutern Sie einen Ansatz für dieses Problem und reduzieren Sie es auf lineare Gleichungssysteme. Wieviele Gleichungen und wieviele Unbekannte umfasst dieses?



Übungen (4) — Lösungen

1) a) Eine Parameterdarstellung für die Ebene durch drei gegebene Punkte A, B, C erhält man durch

$$X \in e(A,B,C) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \text{ für geeignete } r, s \in \mathbb{R}.$$

In unserem konkreten Fall also

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

b) Um zu überprüfen, ob ein Punkt (etwa E) in dieser Ebene liegt, muss man untersuchen, ob sein Ortsvektor sich in der Form $(*)$ darstellen lässt, d. h. ob die Gleichung

$$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

(mindestens) eine Lösung (r, s) hat. Die Vektorgleichung $(**)$ ist ein lineares Gleichungssystem von 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten $(r,\ s)$:

$$\left[\begin{array}{rcrcr} r & + & 2\ s & = & -3 \\ -\ r & & & = & 1 \\ -\ r & + & 2\ s & = & 1 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{rcrcr} r & & & = & -1 \\ -\ 1 & + & 2\ s & = & -3 \\ 1 & + & 2\ s & = & 1 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{rcr} r & = & -1 \\ 2\ s & = & -2 \\ 2\ s & = & 0 \end{array}\right]$$

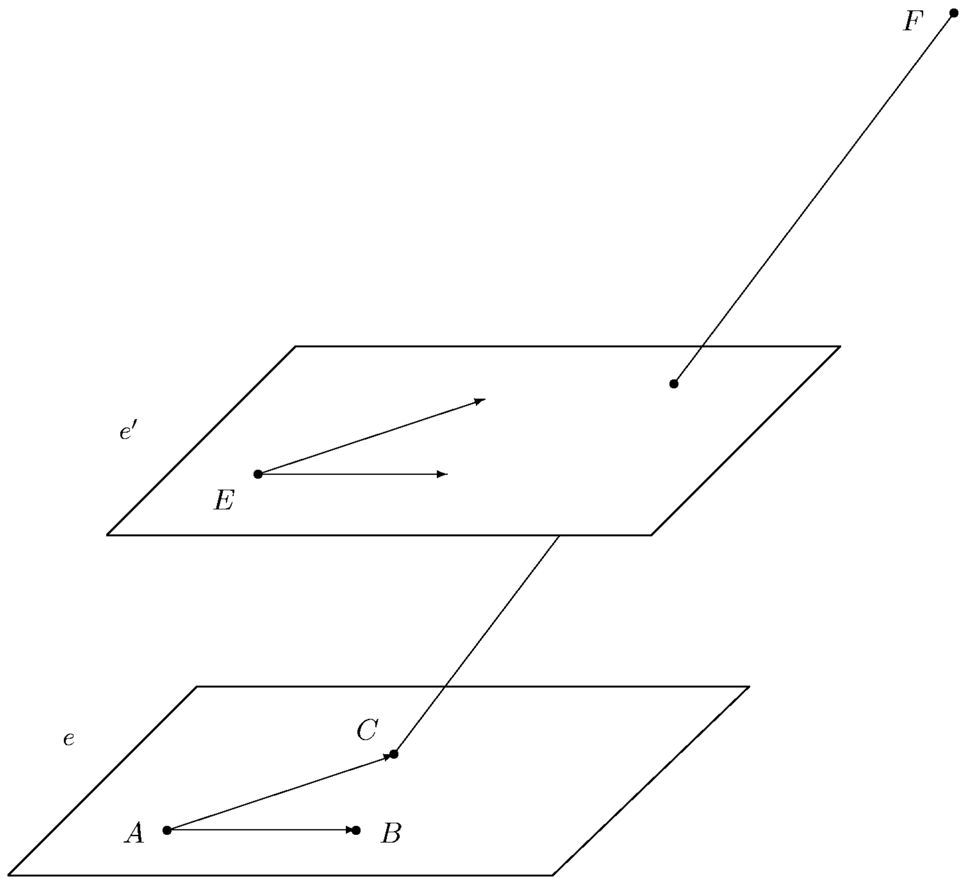
Die letzten beiden Gleichungen für s widersprechen einander: Es gibt also keine Lösung! Damit liegt der Punkt E nicht in der Ebene e.
Für F erhält man mit einer entsprechenden Rechnung ebenfalls: F liegt nicht in der Ebene e. Für den Punkt D erhält man die eindeutige Lösung $r = -1$, $s = 1$.

2) a) Da die Ebene e' *parallel* zur Ebene $e = e(A,B,C)$ verlaufen soll, können wir als Richtungsvektoren für e' dieselben wie für e wählen, nämlich

$$u = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da e' durch E verlaufen soll, erhalten wir die Parameterdarstellung

$$x = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OE} + ru + sv = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



b) Parameterdarstellung für die Gerade $g(C, F)$:

$$x = \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung des Durchschnitts $g(C, F) \cap e'$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} r + 2s + 4t = 5 \\ -r = -1 \\ -r + 2s = 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} r = 1 \\ 2s = r + 1 \\ 4t = 5 - r - 2s \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} r = 1 \\ 2s = 2 \\ 4t = 2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow r = 1, s = 1, t = \frac{1}{2}$$

Da das Gleichungssystem lösbar ist, gibt es einen Schnittpunkt S. Diesen erhält man, indem man in *eine* der beiden Parameterdarstellung den entsprechenden gefundenen Parameterwert einsetzt. Dafür bietet sich die Parameterdarstellung der Geraden an:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt ist $S = (2, 1, 2)$.

3) a) Da der Punkt C zu beiden Ebenen gehört, E aber nur zu einer von beiden (siehe Aufgabe 1) b)), sind die Ebenen verschieden, aber nicht parallel. Daher schneiden sie sich in einer ganzen Geraden.

b) Wir erstellen zunächst Parameterdarstellungen für beide Ebenen:

$$X \in e \iff x = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$X \in e'' \iff x = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CE} + u \cdot \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung des Schnittes muss man also das durch 'Gleichsetzen' entstehende lineare Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff\ & r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - u \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten (je zwei Parametern der beiden Ebenendarstellungen).

Wir wollen dieses Gleichungssystem erst lösen, wenn wir mit dem Gauß-Verfahren ein systematisches Lösungsverfahren für beliebige lineare Gleichugnssysteme kennengelernt haben.

c) Nach a) wissen wir aber bereits, dass dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen haben muss.

4) a) Da der Punkt F nicht in der durch A, B, C bestimmten Ebene liegt, bilden die 4 Punkte $ABCF$ ein Tetraeder.

b) Wir müssen die Schnittpunkte der drei Kantengeraden $g(F, A)$, $g(F, B)$ und $g(F, C)$ mit der Ebene e' bestimmen. Dazu stellt man für die Geraden und die Ebene e' Parameterdarstellungen auf (für e' siehe oben) und setzt die Parameterdarstellung der Ebenen jeweils mit der Parameterdarstellung einer Geraden gleich. Es ergibt sich jeweils ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen (da Punkte und Vektoren <u>drei</u> Koordinaten haben). Die Unbekannten sind der eine Parameter aus der Geradendarstellung und die zwei Parameter aus der Ebenendarstellung, insgesamt also <u>drei</u> Unbekannte.

Fortführung der Aufgaben 3) und 4) mit dem Gauß-Verfahren:

3) Wir lösen das bereits bei 3) b) aufgestellte Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren. Bei Reihenfolge der Unbekannten r, s, t, u ergibt sich die nachfolgende erweiterte Matrix und ihre Umformung in Dreiecksgestalt:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 4 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

(Bei Beachtung der beiden Nullen in der letzten Spalte hätte man (durch Spaltentausch) den Rechenaufwand verringern können. Er war aber ohnehin nicht sehr groß, und die folgenden Überlegungen zeigen, dass ein solcher Spaltentausch auch Nachteile hat.)

Wir stellen nun nach Abschluss der Gauß-Verfahrens zunächst einmal fest, dass das Gleichungssystem den Rang $r = 3$ hat, lösbar ist ($m = r$, keine Nullzeile) und 1 Parameter frei wählbar ist ($d = n - r = 1$). Damit gibt es unendlich viele Lösungen (wie schon bei der Lösung der ursprünglichen Aufgabenstellung erkannt). Diese wollen wir nun bestimmen.

Wir lösen das Gleichungssystem nun wie üblich 'unten nach oben' auf. Die letzte Gleichung besagt:

$$-2t - 4u = 0 \iff t = -2u\,.$$

Löst man die Gleichungen weiter nach s und dann r auf, so erhält man Formeln für s und r in Abhängigkeit von dem (bei der Auflösung der letzten Gleichung gewählten) freien Parameter u. [Es ergibt sich $s = 2u + 1$ und $r = 2u$ und die Lösungsvektoren sind von der Form

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ 2u+1 \\ -2u \\ u \end{pmatrix}$$

mit frei wählbarem Parameter u.] Aber diese Formeln für r, s werden gar nicht mehr benötigt, um die Schnittpunkte zu bestimmen. Man muss nämlich zwischen den Parametern r, s, t, u, die in dem Gleichungssystem vorkommen, und den gesuchten Schnitt*punkten* unterscheiden. Diese Schnittpunkte kann man entweder als Punkte der Ebene e mit den Parametern r, s oder als Punkte der Ebene e'' mit den Parametern t, u beschreiben. Um also die Schnittpunkte zu beschreiben, muss man ein zusammengehörendes Parameterpaar r, s *oder* t, u in die zugehörige Parameterdarstellung einsetzen. Setzt man $t = -2u$, $u \in \mathbb{R}$ beliebig, in die Parameterdarstellung von e'' ein, erhält man die für die Schnittpunkte S:

$$e \cap e'': \qquad \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2u \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine Parameterdarstellung für die Menge aller Schnittpunkte; diese stellt offenbar eine Gerade dar, und zwar durch den Punkt $C = (4, 1, 2)$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Man erkennt nun, dass die Berechnung von r, s hierfür gar nicht benötigt wurde! Man kann aber zur Kontrolle einmal nach r, s auflösen (s.o.) und die Ergebnisse dann in die Parameterdarstellung von e einsetzen. Man erhält dann

$$e' \cap e'' : \qquad \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + (2u+1) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist genau dieselbe Parameterdarstellung für die Schnittgerade. (Dass sich dieselbe Parameterdarstellung ergibt, liegt daran, dass wir auch denselben Parameter u benutzen! Bei einer anderen Auflösung des Gleichungssystems, etwa nach Zeilen- oder auch Spaltentausch oder Wahl eines anderen freien Parameters, erhält man *andere Parameterdarstellungen* für *dieselbe Schnittgerade.)*

4) Hier müssen wir die Schnittpunkte der Ebene e' mit den drei Kanten $g(F, A)$, $g(F, B)$ und $g(F, C)$ ermitteln. Die Parameterdarstellungen sind:

$$\begin{aligned} e' : \qquad & \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ g(F, A) : \qquad & \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \\ g(F, B) : \qquad & \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \\ g(F, C) : \qquad & \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Die Ermittlung des Schnittpunktes A' führt (bei Reihenfolge der Parameter r, s, t) auf folgende Rechnung

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Um den gesuchten Schnittpunkt zu ermitteln, braucht man nur den Geraden-Parameter t zu ermitteln, der sich unmittelbar aus der letzten Gleichung ergibt: $t = 1/2$. Der gesuchte Schnittpunkt A' ergibt sich, indem man diesen Wert von t in die Parameterdarstellung der Geraden einsetzt. Dies ergibt $A' = (1|1|1)$.
Die anderen Rechnungen verlaufen völlig analog, nur der Richtungsvektor der Geraden ändert sich. Sein Negatives stellt jeweils die dritte Spalte dar.
Berechnung von B':

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Wieder ergibt sich der (Geraden-)Parameter $u = 1/2$ und $B' = (\frac{3}{2}|\frac{1}{2}|\frac{1}{2})$.
Berechnung von C':

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Wieder ergibt sich der (Geraden-)Parameter $v = 1/2$ und $C' = (2|1|2)$.

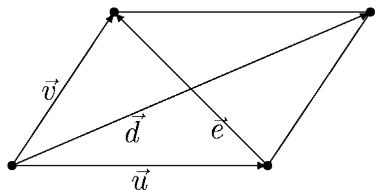
Übungen (5)

1) LS, p. 97: Längen und Abstände

2) LS, p. 105: Eigenschaften des Skalarproduktes

3) Zeigen Sie für ein beliebiges Parallelogramm die Gültigkeit der folgenden *Parallelogrammrelation:*
Die Summe der Längenquadrate beider Diagonalen ist gleich der Summe der Längenquadrate der vier Seiten.
Mit den Bezeichnungen der nebenstehenden Skizze bedeutet dies:

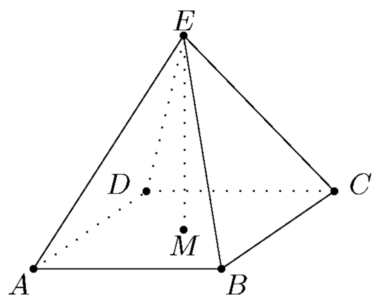
$$|\vec{d}|^2 + |\vec{e}|^2 = 2\,|\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{v}|^2 \ .$$



4) LS, p. 102f.: Skalarprodukt und Orthogonalität

5) Zeigen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes: Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn die Diagonalen gleich lang sind.
Tipp: Drücken Sie die Längengleichheit der Diagonalen mit Hilfe des Skalarproduktes aus und vereinfachen Sie.

6) Gegeben sind 5 Punkte $A = (3, -4, -1)$, $B = (5, 0, 3)$, $C = (9, 2, -1)$, $D = (7, -2, -5)$ und $E = (0, 5, -4)$.
a) Zeigen Sie, dass $ABCD$ die Ecken eines Rechtecks sind. Wie lang sind die Seiten?
b) Zeigen Sie, dass die 5 Punkte $ABCDE$ eine *senkrechte quadratische Pyramide* bilden. Dies bedeutet: Die Spitze E liegt *orthogonal* über dem Mittelpunkt der *quadratischen* Grundfläche $ABCD$ (siehe Skizze).
c) Wie hoch ist die Pyramide?



7) LS, p. 101 f.: Winkelberechnungen

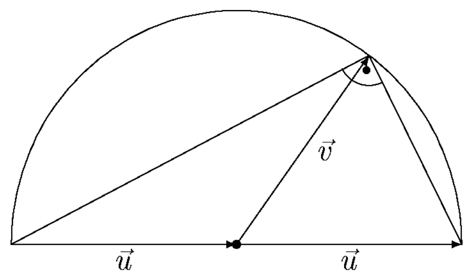
8) für Interessierte: bitte wenden

Für Interessierte

8) a) Begründen Sie für zwei beliebige Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ durch geeignete Rechnung mit dem Skalarprodukt:

$$\vec{u}+\vec{v} \perp \vec{u}-\vec{v} \iff |\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 \ .$$

Erläutern Sie den Zusammenhang mit binomischen Formeln.
Formulieren Sie den geometrischen Inhalt dieser Äquivalenz in Worten.
Folgern Sie aus dieser Beziehung die nachfolgenden geometrischen Sachverhalte:
b) Ein Parallelogramm ist genau dann eine *Raute* (d. h. hat 4 gleichlange Seiten), wenn die Diagonalen orthogonal zueinander sind.
c) Ein Dreieck ist genau dann *gleichschenklig,* wenn eine Seitenhalbierende die Gegenseite senkrecht schneidet bzw. wenn eine Mittelsenkrechte durch den gegenüberliegenden Eckpunkt verläuft.
d) Ein Punkt P hat genau dann von zwei verschiedenen Punkten A, B denselben Abstand, wenn er auf der Mittelsenkrechten von A, B liegt. Folgern Sie hieraus: Der Schnittpunkt der drei *Mittelsenkrechten* eines Dreiecks ist der Mittelpunkt des *Umkreises.*
e) Folgern Sie aus a) (mit Hilfe nachstehender Skizze) den Satz des *Thales:*
Verbindet man die beiden Endpunkte eines Kreisdurchmessers mit irgendeinem anderen Punkt des Kreises, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Durchmesser als Hypotenuse.



f) Formulieren und begründen Sie die *Umkehrung* des Satzes des Thales.

Übungen (5) — Lösungen

3) $\vec{d} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{e} = \vec{v} - \vec{u}$, also

$$\begin{aligned}\left|\vec{d}\right|^2 + |\vec{e}|^2 &= (\vec{u}+\vec{v}) \bullet (\vec{u}+\vec{v}) + (\vec{v}-\vec{u}) \bullet (\vec{v}-\vec{u}) \\ &= \vec{u}\bullet\vec{u} + 2\vec{u}\bullet\vec{v} + \vec{v}\bullet\vec{v} \ + \ \vec{u}\bullet\vec{u} - 2\vec{u}\bullet\vec{v} + \vec{v}\bullet\vec{v} \\ &= 2\,|\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{v}|^2\end{aligned}$$

5) Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ benachbarte Kantenvektoren des Parallelogramms, dann sind $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$ Diagonalvektoren und es gilt:

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| \iff |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2 \iff (\vec{a}+\vec{b}) \bullet (\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{a}-\vec{b}) \bullet (\vec{a}-\vec{b})$$
$$\iff |a|^2 + |b|^2 + 2\cdot\vec{a}\bullet\vec{b} = |a|^2 + |b|^2 - 2\cdot\vec{a}\bullet\vec{b} \iff \vec{a}\bullet\vec{b} = 0 \iff \vec{a}\perp\vec{b}\,.$$

6) a) Wegen $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ ist $ABCD$ ein Parallelogramm. Wegen

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ also } \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = 8 + 8 - 16 = 0$$

sind die Kantenvektoren dieses Parallelogramms orthogonal; es liegt also ein Rechteck vor. Wegen

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+16+16} = 6\,, \ |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{16+4+16} = 6$$

haben die Rechtecksseiten die *gleiche* Länge 6; es liegt sogar ein Quadrat vor.
b) Dass E nicht zur Bodenebene gehört, folgt aus dem unten berechneten (positiven) Abstand.
Da die Grundfläche nach dem in a) Bewiesenen ein Quadrat ist, bleibt nur noch zu zeigen, dass der Verbindungsvektor vom Mittelpunkt M des Quadrates zur Spitze E orthogonal ist zur Bodenebene. Wir berechnen M als Mittelpunkt zwischen AC und erhalten $M = (6, -1, -1)$. Da $\vec{u}, \vec{v}$ zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Bodenebene sind, genügt es zu zeigen, dass $\overrightarrow{ME}$ orthogonal zu $\vec{u}$ *und* $\vec{v}$ ist:

$$\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \ \overrightarrow{ME} \bullet \vec{u} = -12 + 24 - 12 = 0\,, \ \overrightarrow{ME} \bullet \vec{v} = -24 + 12 + 12 = 0\,.$$

c) Die Höhe der Pyramide ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$,
also $\sqrt{36+36+9} = 9$.

7) **Aufgabe 101/7:**

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{74}} \implies \alpha = \arccos(\dfrac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{74}}) \approx 110{,}8^0.$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{0}{\ldots} \implies \alpha = 90^0 \; (\vec{a} \perp \vec{b}).$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{33}{\sqrt{97}\sqrt{34}} \implies \alpha = \arccos(\dfrac{33}{\sqrt{97}\sqrt{34}}) \approx 54{,}9^0.$

d) $\cos\alpha = \dfrac{8}{\sqrt{11}\sqrt{34}} \implies \alpha \approx 65{,}6^0.$

e) $\cos\alpha = \dfrac{19}{\sqrt{35}\sqrt{35}} = \dfrac{19}{35} \implies \alpha \approx 57{,}1^0.$

f) $\alpha = 90^0$, denn $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$.

Aufgabe 101/8:

a) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Also

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{17} \approx 4{,}12\,, \;\; b = |\vec{b}| = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83\,, \;\; c = |\vec{c}| = \sqrt{13} \approx 3{,}61\,.$$

Bei der Berechnung der Winkel beachte man, dass die Vektoren von dem jeweiligen Eckpunkt ausgehend gebildet werden:

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle(\vec{c}, \vec{b}) = \arccos\big(\frac{2}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{13}}\big) \approx 78{,}7^0\,, \\ \beta &= \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \angle(-\vec{c}, \vec{a}) = \arccos\big(\frac{11}{\sqrt{13}\sqrt{17}}\big) \approx 42{,}3^0\,, \\ \gamma &= \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \angle(-\vec{b}, -\vec{a}) = \arccos\big(\frac{6}{2\sqrt{2}\sqrt{17}}\big) \approx 59^0\,. \end{aligned}$$

Natürlich hätte man den dritten Winkel mit dem Winkelsummensatz berechnen können. (So haben wir eine kleine Kontrolle: Die Winkelsumme ergibt tatsächlich 180^0.)

b) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix}$. Also

$$a = |\vec{a}| = 7\sqrt{5} \approx 15{,}65\,, \;\; b = |\vec{b}| = 2\sqrt{17} \approx 8{,}25\,, \;\; c = |\vec{c}| = 3\sqrt{13} \approx 10{,}82\,.$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle(\vec{c}, \vec{b}) = \arccos\big(\frac{-30}{2\sqrt{17} \cdot 3\sqrt{13}}\big) \approx 109{,}7^0\,, \\ \beta &= \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \angle(-\vec{c}, \vec{a}) = \arccos\big(\frac{147}{3\sqrt{13} \cdot 7\sqrt{5}}\big) \approx 29{,}7^0\,, \\ \gamma &= \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \angle(-\vec{b}, -\vec{a}) = \arccos\big(\frac{98}{2\sqrt{17} \cdot 7\sqrt{5}}\big) \approx 40{,}6^0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 101/9:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{5}$,

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{2}$,

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{5}$.

Damit ist das Dreieck gleichschenklig und folglich die gegenüberliegenden Winkel gleich: $\gamma = \alpha$. Man muss also nur einen Winkel berechnen:

$$\alpha = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arccos\left(\frac{16}{2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2}}\right) \approx 50{,}8^0 .$$

Damit ist $\gamma = \alpha = 50{,}8^0$ und $\beta = 180^0 - 2\alpha = 78{,}5^0$.

b) $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{DE}| = 2\sqrt{5}$,

$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{DF}| = 2\sqrt{2}$,

$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{EF}| = 2\sqrt{5}$.

Wieder liegt ein gleichschenkliges Dreieck vor und folglich genügt die Berechnung von

$$\varphi = \delta = \angle(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = \arccos\left(\frac{4}{4\sqrt{10}}\right) \approx 71{,}6^0 .$$

Es ergibt sich $\epsilon = \angle(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) = 180^0 - 2 \cdot \delta = 36{,}9^0$.

8) a) Es gilt

$$\vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v} \iff 0 = (\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 \iff |\vec{u}| = |\vec{v}| .$$

In Worten bedeutet dies: Zwei Vektoren sind genau dann gleich lang, wenn ihr Summenvektor senkrecht zum Differenzvektor ist.
Es handelt sich hierbei offenbar um die dritte binomische Formel für das Skalarprodukt

$$(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 .$$

b) Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die linear unabhängigen Kantenvektoren eines Parallelogramms. Dann sind $\vec{u} - \vec{v}$ und $\vec{u} + \vec{v}$ die Diagonalenvektoren und diese sind genau dann orthogonal, wenn die Kantenvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gleich lang sind, also eine Raute vorliegt.
c) Sind $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ zwei Seitenvektoren eines Dreiecks, so ist $\vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{BC}$ Richtungsvektor der dritten Seite und $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{AM_{BC}}$ Richtungsvektor der Seitenhalbierenden. Dann gilt gemäß a)

$$\begin{aligned} \vec{u}, \vec{v} \text{ gleich lang} &\iff \vec{v} - \vec{u} \perp \vec{u} + \vec{v} \iff \vec{v} - \vec{u} \perp \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \\ &\iff \text{Dreiecksseite} \perp \text{Seitenhalbierende} \\ &\iff \text{Mittelsenkrechte} = \text{Seitenhalbierende} \\ &\iff \text{Mittelsenkrechte trifft gegenüberliegende Ecke.} \end{aligned}$$

d) Dies ist eine Umformulierung von c), denn ein Punkt C hat von 2 Punkten A, B genau dann den gleichen Abstand, wenn das Dreieck ABC gleichschenklig ist. Nach c) ist dies genau dann der Fall, wenn C auf der Mittelsenkrechten von A, B liegt.
Ist M der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten, so hat M von A, B und von B, C, also von allen drei Punkten denselben Abstand. Damit ist M Mittelpunkt des Umkreises und die dritte Mittelsenkrechte verläuft auch durch M.
e) Da der Punkt P auf dem Kreis liegt, sind die eingezeichneten Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gleich lang, also sind die Vektoren $\vec{v} + \vec{u}$ und $\vec{v} - \vec{u}$, dies sind gerade die Kantenvektoren des Dreiecks, orthogonal zueinander.
f) Es gilt umgekehrt:

Die Eckpunkte aller rechtwinkligen Dreiecke mit fester Hypotenuse liegen auf einem Kreis.

Begründung: Wenn die Kantenvektoren $\vec{u} + \vec{v}$ und $\vec{u} - \vec{v}$ des Dreiecks orthogonal sind, dann sind nach a) die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gleich lang, d. h. der Eckpunkt hat vom Mittelpunkt der Hypotenuse denselben Abstand wie die Endpunkte der Hypotenuse. Also liegt der Punkt auf dem Kreis mit der Hypotenuse als Durchmesser.

Übungen (6)

Wir betrachten ein Dreieck in der Ebene mit den Ecken

$$\boxed{A = (2,3)\,,\ B = (6,7)\,,\ C = (7,11).}$$

1) Fertigen Sie parallel zur Lösung der folgenden Aufgabe eine Skizze an und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse daran.
   a) Bestimmen Sie für alle drei Höhen die Höhenfußpunkte und die Längen der Höhen.
   b) Stellen Sie fest, welche Höhenfußpunkte auf der jeweiligen Dreiecksseite *zwischen* den Ecken liegen, und welche *außerhalb.*
   c) Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks.
2) Aus der Physik übernehmen wir: Ein Körper (mit ebenen Begrenzungsflächen) steht stabil auf einer seiner Begrenzungsflächen, wenn das *Lot* vom *Schwerpunkt* des Körpers auf die Bodenebene seinen Fußpunkt im *Innern* der Auflagefläche hat. Wir wollen zunächst ein 2-dimensionales Beispiel betrachten. Dieses ist realitätsferner, dafür aber einfacher! Wir gehen aus von dem in der ersten Aufgabe gegebenen Dreieck. (Ergänzen Sie Ihre bisherige Skizze!) Stellen Sie fest, auf welcher seiner Seiten das Dreieck stabil stehen kann.

Wir betrachten ein Tetraeder mit den Ecken

$$\boxed{A = (0,1,-2)\,,\ B = (5,5,6)\,,\ C = (3,1,-2)\,,\ D = (0,5,-2).}$$

3) a) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Kante $g(A,B)$ und daraus die Fläche des Dreiecks ABC.
   b) Bestimmen Sie die Oberfläche des Tetraeders.
4) a) Bestimmen Sie alle 4 Höhenfußpunkte des Tetraeders.
   b) Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders.
5) Bestimmen Sie die Abstände aller Paare von windschiefen Kanten sowie die Fußpunkte der jeweiligen gemeinsamen Lote.
6) Stellen Sie fest, auf welchen seiner vier Seiten das oben gegebene Tetraeder stabil stehen kann (vgl. Aufgabe 2).

Hinweis: Der Ortsvektor des Schwerpunktes eines Dreiecks bzw. eines Tetraeders ist das arithmetische Mittel der Ortsvektoren der Eckpunkte.

Übungen (6) — Lösungen

1) <u>Höhe durch C</u>: Die C gegenüberliegende Dreiecksseite ist die Gerade $g(A,B)$ durch A, B; sie hat die Parameterdarstellung

$$X \in g(A,B) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Höhenfußpunkt H ist durch zwei Bedingungen gekennzeichnet:
1. H liegt auf der Dreiecksseite $g(A,B)$:

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

2. Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{CH}$ ist orthogonal zu der Geraden $g(A,B)$, d. h. orthogonal zum Richtungsvektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$:

$$0 = \overrightarrow{CH} \bullet \overrightarrow{AB}.$$

Diese zweite Bedingung stellt eine lineare Gleichung für die eine Unbekannte r dar:

$$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\implies 0 = \overrightarrow{CH} \bullet \overrightarrow{AB} = \left[\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = -52 + 32r \iff r = \frac{13}{8}.$$

Damit erhält man den Höhenfußpunkt durch

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{13}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 19/2 \end{pmatrix}, \; H = (\frac{17}{2}, \frac{19}{2}).$$

Da der Parameterwert r für den Höhenfußpunkt H *größer* als 1 ist, liegt H nicht *zwischen* A und B, sondern *außerhalb* der Strecke AB, und zwar auf der Seite von B. Die Länge h_C der Höhe durch C ist die Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$, also

$$h_C = |\overrightarrow{CH}| = \frac{3}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2{,}12.$$

<u>Höhe durch B</u>: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Der gesuchte Höhenfußpunkt H ist nun gekennzeichnet durch

$$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \iff \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$$
$$\iff -52 + 89r = 0 \iff r = \frac{52}{89}.$$

Da der Parameterwert zwischen 0 und 1 liegt, liegt der Höhenfußpunkt auf der Dreiecksseite *zwischen* A und C. Explizit ergibt sich

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{52}{89}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{89}\begin{pmatrix} 438 \\ 683 \end{pmatrix}, \quad H = (\frac{438}{89}, \frac{683}{89}) \approx (4,92; 7,67)\,.$$

Die Länge h_B der Höhe ist

$$|\overrightarrow{BH}| = \left|\begin{pmatrix} -96/89 \\ 60/89 \end{pmatrix}\right| = \frac{12}{89} \cdot \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \frac{12}{89}\sqrt{89} \approx 1{,}27\,.$$

Die Ergebnisse für die <u>Höhe durch A</u>:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \iff r = -\frac{20}{17},$$

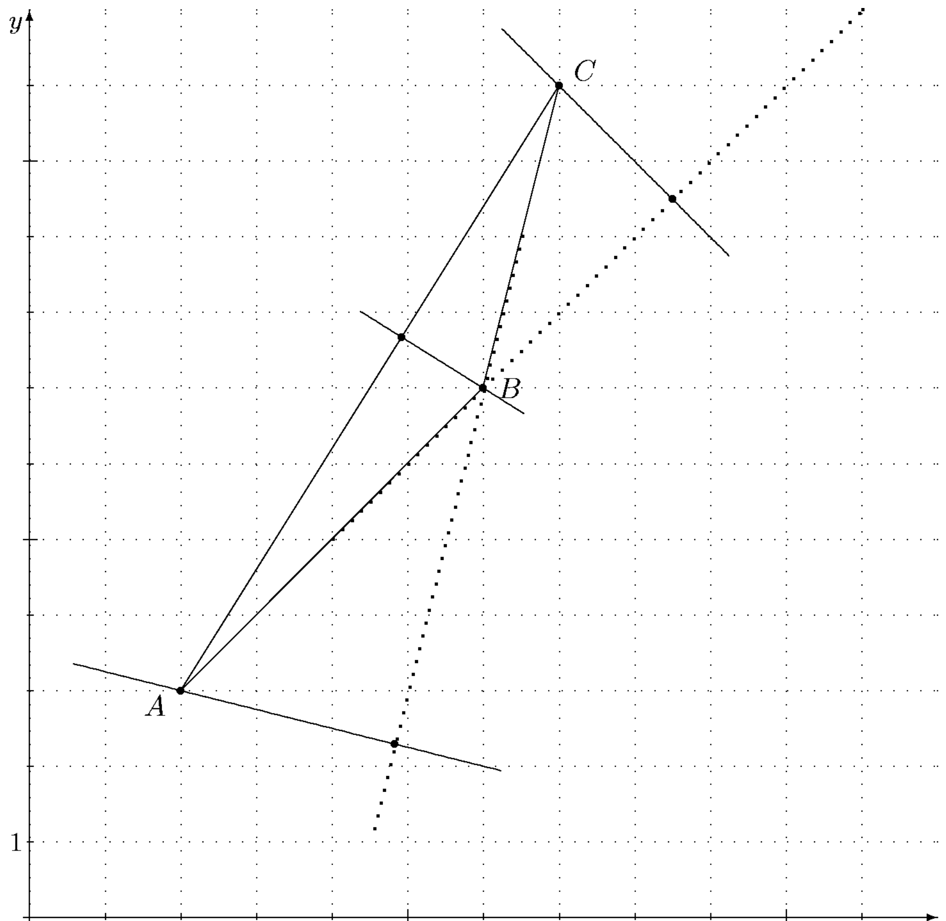
$$\implies H = (\frac{82}{17}, \frac{39}{17}) \approx (4,82; 2,29)$$

$$\implies \overrightarrow{AH} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 48 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{12}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\implies h_A = \frac{12}{17}\sqrt{17} \approx 2{,}91\,.$$

Da der Parameterwert r negativ ist, liegt der Höhenfußpunkt nicht *zwischen* B und C, sondern *außerhalb,* und zwar auf der Seite von B.

Skizze:



c) Die Flächenberechnung dient hier nur zur Demonstration der bereits erzielten Ergebnisse. Wir werden später bessere Verfahren kennenlernen.
Die Fläche des Dreiecks ist

$$F = \frac{1}{2} \cdot d(A,B) \cdot h_C = \frac{1}{2} \cdot |\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}| \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} = 6\,.$$

Natürlich kann man auch jede andere Seite mit der dazugehörenden Höhe benutzen, um die Fläche zu berechnen:

$$F = \frac{1}{2} \cdot d(A,C) \cdot h_B = \frac{1}{2} \cdot |\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}| \cdot \frac{12}{89}\sqrt{89} = \frac{1}{2}\sqrt{89} \cdot \frac{12}{89}\sqrt{89} = 6\,,$$
$$F = \frac{1}{2} \cdot d(B,C) \cdot h_A = \frac{1}{2} \cdot |\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}| \cdot \frac{12}{17}\sqrt{17} = \frac{1}{2}\sqrt{17} \cdot \frac{12}{17}\sqrt{17} = 6\,.$$

Sollten Ihnen hier Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Werten (Kantenvektor, Lotvektor, Parameter r, Seitenlänge, Radikand, Fläche) auffallen, so sind diese nicht zufällig und werden demnächst im Unterricht aufgeklärt. Sie führen dann zu einer äußerst einfachen Methode zur vektoriellen Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreiecks:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot |4 \cdot 8 - 4 \cdot 5| = 6\,.$$

2) Wir berechnen den Schwerpunkt $S = (5,7)$ gemäß der Formel $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ und dann die Fußpunkte der *Lote von S auf die Dreiecksseiten.*

<u>Lot von S auf $g(A,B)$</u>: Der Lotfußpunkt H soll auf der Geraden $g(A,B)$ liegen, also $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB}$ mit einer (gesuchten) Zahl $r \in \mathbb{R}$. Da H der Lotfußpunkt von S auf $g(A,B)$ ist, muss $\overrightarrow{SH}$ zu $\overrightarrow{AB}$ orthogonal sein:

$$0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB}) \bullet \overrightarrow{AB} = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\iff 0 = -28 + 32r \iff r = \frac{7}{8}\,.$$

Da der Parameterwert r zwischen 0 und 1 liegt, liegt der Lotfußpunkt *zwischen* A und B: Das Dreieck kann auf dieser Dreiecksseite stabil stehen.

<u>Lot von S auf $g(B,C)$</u>: $\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SB} + r\overrightarrow{BC}$ und

$$0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{BC} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 + 17r \iff r = -\frac{1}{17}\,.$$

Da der Parameterwert negativ ist, liegt der Lotfußpunkt nicht zwischen den Eckpunkten (wenn auch sehr dicht bei der Ecke B); auf der Dreiecksseite BC kann das Dreieck nicht stabil stehen. Es kippt zu der Seite, bei der B liegt, (und bleibt dann auf der Dreiecksseite durch A, B stabil liegen).

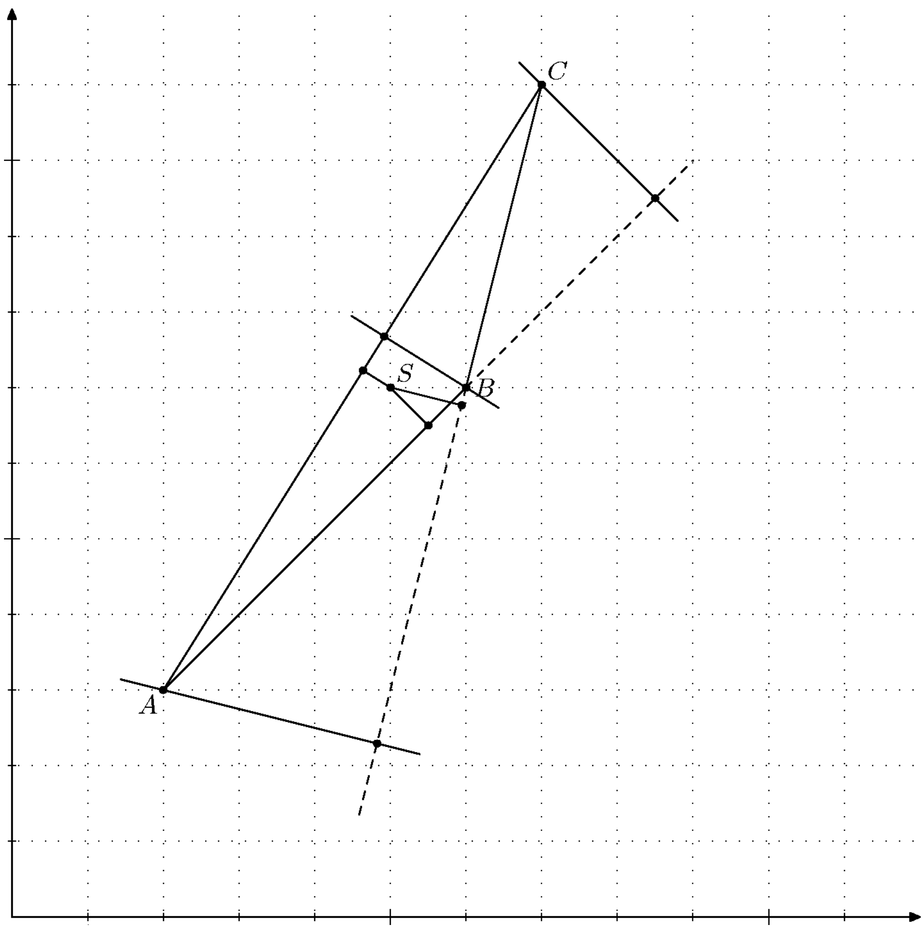
<u>Lot von S auf $g(A,C)$</u>: $\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AC}$ und

$$0 = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}) + r\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = -47 + 89r \iff r = \frac{47}{89}\,.$$

Wieder liegt der Lotfußpunkt des Schwerpunktes *zwischen* den Eckpunkten und wieder ist das Dreieck auf dieser Seite standfest.
[In diesem letzten Fall braucht man nichts zu rechnen, wenn man die anschaulich einsichtige Tatsache beweist: Liegt der Höhenfußpunkt zwischen den Ecken, so gilt dies erst recht für den Fußpunkt des Schwerpunktlotes. Wenn man dies zu beweisen versucht, findet man eine allgemeingültige Beziehung zwischen Höhenfußpunkt, Fußpunkt der Schwerpunktlotes und Seitenmittelpunkt: Der Lotfußpunkt liegt *zwischen* Höhenfußpunkt und Seitenmittelpunkt und teilt diese Strecke im Verhältnis 2:1. Für die Parameterwerte r_H des Höhenfußpunktes, r_L des Lotfußpunktes und $r_M = \frac{1}{2}$ des Mittelpunktes bedeutet dies:

$$r_L = r_H + \frac{2}{3}(r_M - r_H) = r_H + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} r_H = \frac{1}{3} r_H + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(r_H + 1)\,.$$

Vergleichen Sie diese Formel mit den Ergebnissen für r_H aus Aufgabe 1) und für r_L in Aufgabe 2).]
Hier nun die Skizze mit den Lotfußpunkten vom Schwerpunkt S auf die Dreiecksseiten. Sie erkennen, dass nur das Lot von S auf die Seite $g(B, C)$ nicht zwischen den Eckpunkten liegt und das Dreieck auf dieser Seite nicht stabil steht, sondern über die Ecke B auf die Seite $g(A, B)$ umkippt.



An dieser Skizze lassen sich auch die für die Lotfußpunkte des Schwerpunktes gefundenen Parameterwerte nachmessen.

3) a) Diese Aufgabe ist wie Aufgabe 1, jedoch mit einem Dreieck im Raum.

Wir bestimmen im Dreieck ABC den Fußpunkt H der Höhe durch C. Also gilt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \\ \overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{CA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wegen $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ muss gelten

$$0 = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = -15 + 105r \iff r = \frac{1}{7}$$

und daher

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{11}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix}, \; H = (\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, -\frac{6}{7}).$$

Der gesuchte Abstand ist daher die Länge der entsprechenden Höhe

$$d(C, g(A,B)) = h_C = \left|\overrightarrow{CH}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{16}{7} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}\right| = \frac{4}{7} \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{4}{7}\sqrt{21}.$$

Als Fläche des Dreiecks ergibt sich somit

$$F = \frac{1}{2} \cdot d(A,B) \cdot h_C = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right| \cdot \frac{4}{7}\sqrt{21} = \frac{1}{2}\sqrt{105} \cdot \frac{4}{7}\sqrt{21} = 6\sqrt{5} \approx 13{,}42.$$

b) Zur Bestimmung der Oberfläche des Tetraeders muss man die obige Rechnung noch dreimal durchführen. Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man die Berechnung von Lotfußpunkten auf Geraden üben will, denn es gibt andere, direktere Methoden zur Flächenberechnung mit Hilfe des *Vektorproduktes* (siehe später):

$$F = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 12\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = 6\sqrt{5}.$$

Man kann die nachfolgend angegebenen Dreiecksflächen als Kontrollergebnisse benutzen. Es bezeichne $F(ABC)$ die Fläche des Dreiecks ABC:

$$F(ABC) = 6\sqrt{5}, \quad F(ABD) = 4\sqrt{41}, \quad F(ACD) = 6, \quad F(BCD) = 20\sqrt{2}.$$

Die Oberfläche ist dann die Summe dieser Dreiecksflächen, ungefähr 73,31.

4) a) Spitze D, Bodenfläche ABC: Der Höhenfußpunkt heiße H; er gehört zur Ebene durch ABC, also

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\overrightarrow{DH}$ zur Ebene durch ABC orthogonal sein soll, muss gelten

$$0 = \overrightarrow{DH} \bullet \overrightarrow{AB} \quad \text{und} \quad 0 = \overrightarrow{DH} \bullet \overrightarrow{AC}\,.$$

Dies ergibt *zwei* lineare Gleichungen für die beiden unbekannten Parameterwerte r, s:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{DA} \bullet \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = -16 + 105r + 15s \\ 0 &= \overrightarrow{DA} \bullet \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} = 15r + 9s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung dieses Gleichungssystems ist $r = \frac{1}{5}$, $s = -\frac{1}{3}$. Der Ortsvektor des Höhenfußpunktes ist daher

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}, \; H = (0, \frac{9}{5}, -\frac{2}{5})\,.$$

Die Höhe des Tetraeders ist der Abstand der Spitze vom Lotfußpunkt, hier also der Abstand von D und H:

$$\overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{16}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \frac{8}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{DH}\right| = \frac{8}{5}\sqrt{5} \approx 3{,}58\,.$$

Spitze C, Bodenfläche ABD: Es gilt für den Höhenfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} = -15 + 105r + 16s \\ 0 &= \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} = 16r + 16s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = \frac{15}{89}$, $s = -\frac{15}{89}$. Der Ortsvektor des Höhenfußpunktes ist daher

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \frac{15}{89}\overrightarrow{AB} - \frac{15}{89}\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{15}{89}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{15}{89}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{75}{89} \\ 1 \\ -\frac{58}{89} \end{pmatrix}$$

und der Höhenfußpunkt dann $H = (\frac{75}{89}, 1, -\frac{58}{89})$.

Die Höhe des Tetraeders ist der Abstand der Spitze vom Lotfußpunkt, hier also der Abstand von C und H:

$$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} \frac{75}{89} \\ 1 \\ -\frac{58}{89} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{24}{89} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{CH}\right| \approx \frac{24}{89}\sqrt{89} = 2{,}54\,.$$

<u>Spitze B, Bodenfläche ACD</u>: Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + r\overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AC} = -15 + 9r \\ 0 &= \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} = -16 + 16s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = \frac{5}{3}$, $s = 1$. Der Ortsvektor des Höhenfußpunktes ist daher

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und der Höhenfußpunkt dann $H = (5, 5, -2)$.
<u>Spitze A, Bodenfläche BCD</u>: Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + r\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen für r, s lauten dann:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} + r \cdot \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{BC} = -90 + 84r + 74s \\ 0 &= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BD} + r \cdot \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BD} + s \cdot \overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{BD} = -89 + 74r + 89s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = \frac{89}{125}$, $s = \frac{51}{125}$. Der Ortsvektor des Höhenfußpunktes ist daher

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{89}{125}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + \frac{51}{125}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{192}{125} \\ \frac{269}{125} \\ -\frac{74}{25} \end{pmatrix}$$

und der Höhenfußpunkt dann $H = (\frac{192}{125}, \frac{269}{125}, -\frac{74}{25})$.
b) Das Volumen eines Tetraeders ist Grundfläche mal Höhe geteilt durch 3. (Diese Formel werden wir evtl. bei der Wiederholung der Integralrechnung begründen.) Mit der in der vorangehenden Aufgabe berechneten Fläche F des Dreiecks ABC

sowie dem Fußpunkt $H = (0, \frac{9}{5}, -\frac{2}{5})$ der Tetraederhöhe durch D erhalten wir als Volumen

$$V = \frac{1}{3} \cdot F \cdot |\overrightarrow{DH}| = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{5} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{16}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{5} \cdot \frac{8}{5} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{5} \cdot \frac{8}{5}\sqrt{5} = 16\,.$$

Wieder fallen Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Werten auf und, obwohl Grundfläche und Höhe irrational sind ($\sqrt{5}$!), ist das Volumen eine ganze Zahl. Auch dies ist wieder kein Zufall, wie wir bei der Behandlung des Vektorproduktes sehen werden:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) \bullet \overrightarrow{AD} = \frac{1}{6} \cdot \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 24 \cdot 4 = 16\,. \end{aligned}$$

5) Zwei Kanten sind genau dann windschief, wenn sie nicht in einer Ebene liegen, und dies bedeutet, wenn sie alle 4 Ecken des Tetraeders enthalten.
<u>Abstand $g(A, B)$ zu $g(C, D)$:</u> Wir betrachten auf jeder Geraden einen beliebigen Punkt:

$$\begin{aligned} X \in g(A, B) &\iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \\ Y \in g(C, D) &\iff \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir suchen nun die Punkte, für die $\overrightarrow{XY}$ orthogonal ist zu beiden Geraden, d. h. zu beiden Richtungsvektoren:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{XY} &= \overrightarrow{AC} - r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ 0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{AB} &= \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 15 - 105r + s \cdot 1 \\ 0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{CD} &= \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -9 - r \cdot 1 + s \cdot 25 \end{aligned}$$

Als Lösung dieses linearen Gleichungssystems erhalten wir $r = \frac{6}{41}$, $s = \frac{15}{41}$.
Ortsvektoren der Fußpunkte des gemeinsamen Lotes:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OA} + \frac{6}{41}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{6}{41} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{41} \\ \frac{65}{41} \\ -\frac{34}{41} \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{OY} &= \overrightarrow{OC} + \frac{15}{41}\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{15}{41} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{78}{41} \\ \frac{101}{41} \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Abstand der Geraden ist die Länge des gemeinsamen Lotvektors

$$\overrightarrow{XY} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 48 \\ 36 \\ -48 \end{pmatrix} = \frac{12}{41}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{XY}\right| = \frac{12}{41}\sqrt{41} \approx 1{,}87\,.$$

<u>Abstand $g(A,C)$ zu $g(B,D)$:</u> Wir betrachten auf jeder Geraden einen beliebigen Punkt:

$$X \in g(A,C) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Y \in g(B,D) \iff \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen nun die Punkte, für die $\overrightarrow{XY}$ orthogonal ist zu beiden Geraden, d. h. zu beiden Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB} - r\overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix},$$

$$0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{AC} = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 15 - 9r - 15s$$

$$0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{BD} = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = -89 + 15r + 89s$$

Als Lösung dieses linearen Gleichungssystems erhalten wir $r = 0$, $s = 1$. Die Fußpunkte sind also A und D. Ihr Abstand ist $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 4$.

<u>Abstand $g(A,D)$ zu $g(B,C)$:</u> Wir betrachten auf jeder Geraden einen beliebigen Punkt:

$$X \in g(A,D) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Y \in g(B,C) \iff \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen nun die Punkte, für die $\overrightarrow{XY}$ orthogonal ist zu beiden Geraden, d. h. zu beiden Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB} - r\overrightarrow{AD} + s\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix},$$

$$0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{AD} = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 16 - 16r - 16s$$

$$0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{BC} = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = -90 + 16r + 84s$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhalten wir $r = -\frac{3}{34}$, $s = \frac{37}{34}$. Ortsvektoren der Fußpunkte des gemeinsamen Lotes:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} - \frac{3}{34}\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{3}{34}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{11}{17} \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OB} + \frac{37}{34}\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{37}{34}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{48}{17} \\ \frac{11}{17} \\ -\frac{46}{17} \end{pmatrix}.$$

Abstand der Geraden ist die Länge des gemeinsamen Lotvektors

$$\overrightarrow{XY} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 48 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{12}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \left|\overrightarrow{XY}\right| = \frac{12}{17}\sqrt{17} \approx 2{,}91\,.$$

6) Wir berechnen den Schwerpunkt S des Tetraeders gemäß $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ und erhalten $S = (2, 3, 0)$ und bestimmen dann die Lotfußpunkte von S aus auf die vier Begrenzungsflächen des Tetraeders.
<ins>Seitenfläche ABC</ins>: Der Lotfußpunkt heiße H; er gehört zur Ebene durch ABC, also

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

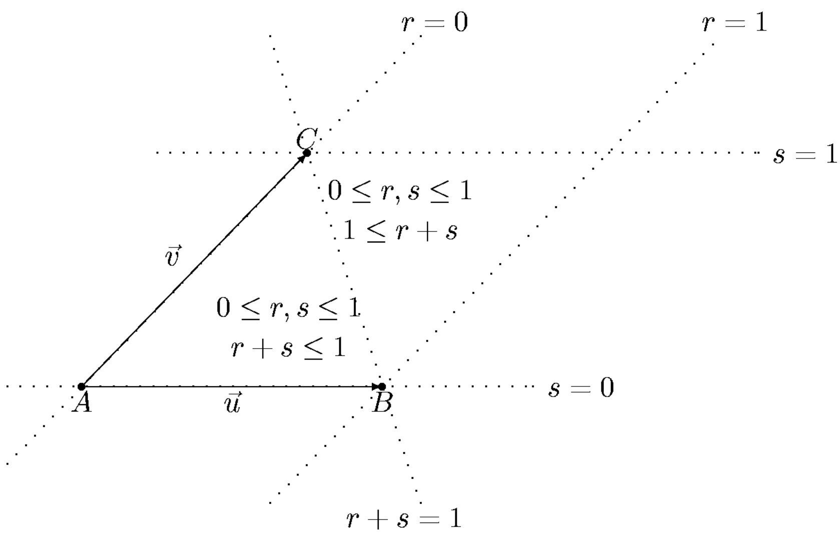
Da SH zur Ebene durch ABC orthogonal sein soll, muss gelten

$$0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{AB} \quad \text{und} \quad 0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{AC}\,.$$

Dies ergibt *zwei* lineare Gleichungen für die beiden unbekannten Parameterwerte r, s:

$$0 = \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = -34 + 105r + 15s$$
$$0 = \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} = -6 + 15r + 9s\,.$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 3/10$, $s = 1/6$. Beide Parameterwerte liegen zwischen 0 und 1, daher liegt der zugehörige Punkt H innerhalb des *Parallelogramms,* das von den Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ bestimmt wird (siehe Skizze).



Die Frage der Aufgabenstellung ist aber, ob H innerhalb des *Dreiecks* ABC liegt. Dazu muss zusätzlich gelten: $r + s \leq 1$. (Begründung: Auf der Geraden durch B und C liegen die Punkte X, für die die Parameterwerte zusammen genau 1 ergeben; die Punkte mit $r+s < 1$ liegen ganz auf einer Seite der Geraden $g(B,C)$, und zwar bei A.) Insgesamt:

$$H \text{ liegt } \textit{im} \text{ Dreieck } ABC \iff r, s \geq 0 \text{ und } r + s \leq 1\,.$$

Für die oben gefundenen Werte $r = 3/10$ und $s = 1/6$ sind beide Bedingungen erfüllt: Der Lotfußpunkt H liegt *im* Dreieck ABC; das Tetraeder kann auf dieser Seite stabil stehen.

<u>Seitenfläche ABD</u>: Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$0 = \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} = -34 + 105r + 16s$$
$$0 = \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} = -8 + 16r + 16s\,.$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 26/89$, $s = 37/178$. Es gilt für diese Werte $r, s \geq 0$ und $r + s \leq 1$, also liegt wieder der Lotfußpunkt H *in* dem entsprechenden Seitendreieck ABD: Auch auf dieser Seite kann das Tetraeder stehen.

<u>Seitenfläche ACD</u>: Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}) + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$0 = \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AC} = -6 + 9r$$
$$0 = \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} = -8 + 16s\,.$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 2/3$, $s = 1/2$. Es gilt für diese Werte zwar wieder $r, s \geq 0$, aber nun ist $r + s > 1$, also liegt der Lotfußpunkt H *außerhalb* des entsprechenden Seitendreiecks ACD: Auf dieser Seite kann das Tetraeder nicht stabil stehen.

<u>Seitenfläche BCD</u>: Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SB} + r\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$0 = \overrightarrow{SB} \bullet \overrightarrow{BC} + r \cdot \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{BC} = -62 + 84r + 74s$$
$$0 = \overrightarrow{SB} \bullet \overrightarrow{BD} + r \cdot \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BD} + s \cdot \overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{BD} = -63 + 74r + 89s\,.$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 107/250$, $s = 44/125$. Wegen $r, s \geq 0$ und $r+s \leq 1$, liegt der Lotfußpunkt H wieder *in* dem entsprechenden Seitendreieck BCD: Auch auf dieser Seite kann das Tetraeder stehen.

Übungen (7)

1) a) Wir betrachten die Pyramide aus Übung (5), Aufgabe 6 mit den Eckpunkten $A = (3, -4, -1)$, $B = (5, 0, 3)$, $C = (9, 2, -1)$, $D = (7, -2, -5)$ und $E = (0, 5, -4)$. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die Bodenebene dieser Pyramide. [Zur Kontrolle: $2x - 2y + z = 13$.]
   b) Berechnen Sie mit der Hesse'schen Abstandsformel die Höhe der Pyramide.

2) Wir gehen aus von dem Dreieck von Übungen (6), Aufgabe 1 mit den Eckpunkten $A = (2, 3)$, $B = (6, 7)$, $C = (7, 11)$.
   a) Bestimmen Sie Normalenvektoren für die Dreiecksseiten und damit dann Gleichungen für sie.
   [Zur Kontrolle: $g(A, B): \ x - y = -1$, $g(A, C): \ 8x - 5y = 1$, $g(B, C): \ 4x - y = 17$.]
   b) Berechnen Sie die Längen der drei Höhen des Dreiecks.
   c) Berechnen Sie erneut die Höhenfußpunkte.

3) Gegeben sind die Punkte $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$, $C = (4, 1, 2)$ sowie $D = (0, 1, 2)$.
   a) Zeigen Sie, dass diese 4 Punkte ein Tetraeder bilden.
   b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene e durch A, B, C.
   c) Bestimmen Sie die Höhe des Tetraeders (e als Boden betrachtet).
   d) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene e', die parallel zur Bodenebene e durch den Schwerpunkt S des Tetraeders verläuft.
   e) Wir 'zersägen' das Tetraeder längs der Ebene e'. Bestimmen Sie die neuen Eckpunkte A', B', C'.

4) a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass gegenüberliegende Kanten eines beliebigen Tetraeders windschief sein müssen.
   b) Bestimmen Sie für das Tetraeder der vorangehenden Aufgabe die Abstände der gegenüberliegenden Kanten.

Übungen (7) — Lösungen

1) a) Da gemäß Übung (5), Aufgabe 6 die Pyramide *senkrecht* (man sagt auch *gerade*) ist, ist der Vektor $\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor für die Bodenebene $e = e(A, B, C)$. Damit ist auch $\vec{n} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor für e und eine Gleichung für e hat die Form $2x - 2y + z = d$. Den Wert von d bestimmen wir durch Einsetzen von B in diese Gleichung:

$$B \in e \iff 2 \cdot 5 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = d \iff d = 13\,.$$

Wir erhalten also die als Kontrollergebnis angegebene Gleichung für e:

$$X = (x, y, z) \in e \iff 2x - 2y + z = 13\,.$$

Ohne Verwendung der Vorkenntnisse aus Übung (5) kann man mit Hilfe des Vektorproduktes einen Normalenvektor zur Ebene e ermitteln. Wir wählen zwei beliebige linear unabhängige Richtungsvektoren für e aus, etwa

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und berechnen deren Vektorprodukt

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir (nach Division durch -12) denselben Normalenvektor $\vec{n}$ und damit dieselbe Gleichung für e wie oben.

b) Die Höhe der Pyramide ist der Abstand des Punktes $E = (0, 5, -4)$ von der Ebene e durch A, B, C, D. Dieser berechnet sich nach der Hesse'schen Abstandsformel gemäß

$$d(P, e) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 5 - 4 - 13|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{27}{\sqrt{9}} = 9\,.$$

2) a) Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, ein Normalenvektor ist $\vec{n}_c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und eine Gleichung für $g(A, B)$ daher von der Form $x - y = d$. Setzt man $A = (2, 3)$ ein, so erhält man $2 - 3 = d$, also $d = -1$. Eine Gleichung für $g(A, B)$ ist also $x - y = -1$.

Es ist $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_b = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$, $8x - 5y = d$ eine Gleichung für $g(A, C)$ und

nach Einsetzen von $A = (2,3)$ ergibt sich $16 - 15 = d$, also $d = 1$. Die gefundene Gleichung ist daher $8x - 5y = 1$.
$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_a = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, Gleichung $4x - y = d$, Einsetzen von $B = (6,7)$ ergibt $24 - 7 = d$, also $d = 17$ und die Gleichung wie angegeben.
b) Berechnung der Abstände der Eckpunkte von den gegenüberliegenden Seiten:

$$
\begin{aligned}
d(C, g(A,B)) &= \frac{|7 - 11 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,, \\
d(B, g(A,C)) &= \frac{|8 \cdot 6 - 5 \cdot 7 - 1|}{\sqrt{64 + 25}} = \frac{12}{\sqrt{89}}\,, \\
d(A, g(B,C)) &= \frac{|8 - 3 - 17|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}
$$

c) Berechnung der Höhenfußpunkte:
Höhe durch C: Eine Gleichung für $g(A,B)$ ist $x - y + 1 = 0$. Damit gilt für den Höhenfußpunkt H_c:

$$\overrightarrow{H_cC} = r \cdot \vec{n}_c = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r = \frac{7 - 11 + 1}{1^2 + 1^2} = -\frac{3}{2}\,,$$

also $\overrightarrow{OH_c} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{H_cC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und damit $H_c = (\frac{17}{2}, \frac{19}{2})$.
Höhe durch A: Eine Gleichung für $g(B,C)$ ist $4x - y - 17 = 0$. Damit gilt für den Fußpunkt H_a

$$\overrightarrow{H_aA} = s \cdot \vec{n}_a = s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s = \frac{4 \cdot 2 - 3 - 17}{4^2 + 1^2} = -\frac{12}{17}\,,$$

also

$$\overrightarrow{OH_a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{12}{17} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und damit $H_a = (\frac{82}{17}, \frac{39}{17})$.
Höhe durch B: Eine Gleichung für $g(A,C)$ ist $8x - 5y - 1 = 0$. Damit ergibt sich für den Fußpunkt H_b:

$$\overrightarrow{H_bB} = t \cdot \vec{n}_b = t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t = \frac{8 \cdot 6 - 5 \cdot 7 - 1}{64 + 25} = \frac{12}{89}$$

also

$$\overrightarrow{OH_b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{12}{89}\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix},$$

und damit $H_b = (\frac{438}{89}, \frac{683}{89})$.

3) a) Wir lösen zuerst b) und verifizieren dann durch einfaches Einsetzen, dass D die Koordinatengleichung der Bodenebene e nicht erfüllt, also nicht zu e gehört.
b) Da es sich um eine Ebene (Dimension 2) im 3-dimensionalen Raum handelt, kann man mit Hilfe des Vektorproduktes zuerst einen Normalenvektor und daraus

dann eine Normalengleichung bestimmen.
Zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene sind

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen ihr Vektorprodukt

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit ist $\vec{n} = -\frac{1}{2}\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor für e. Eine Koordinatengleichung für e lautet daher $x + 2y - z = d$ und wir bestimmen d durch Einsetzen eines der drei Punkte A, B, C. Wir setzen $A = (2, 1, 0)$ ein und erhalten $2 + 2 = d$. Damit ist $x + 2y - z = 4$ eine Koordinatengleichung für e.
c) Wir benutzen die Hessesche Abstandsformel

$$d(D, e) = \frac{|-2 + 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{6} \approx 1{,}63\,.$$

d) Der Schwerpunkt eines Tetraeders ist gegeben durch $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, also $S = (\frac{9}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. Da e' zu $e = e(A, B, C)$ parallel sein soll, haben beide Ebenen dieselben Normalenvektoren, eine Gleichung für e' also auch die Form $x + 2y - z = d'$. Zur Bestimmung von d' setzen wir den Punkt S in diese Gleichung ein:

$$\frac{9}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = d' \iff d' = 3\,.$$

Eine Koordinatengleichung für e' ist daher $x + 2y - z = 3$.
e) Wir bestimmen die Schnittpunkte der Ebene e' mit den drei Kanten $g(D, A)$, $g(D, B)$, $g(D, C)$:

$$X = (x, y, z) \in g(D, A) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Ein solcher Punkt X liegt nun in e', wenn er die Koordinatengleichung für e' erfüllt, wenn also gilt

$$x + 2y - z = 3 \iff (2t) + 2 \cdot 1 - (2 - 2t) = 3 \iff 4t = 3 \iff t = \frac{3}{4}\,.$$

Damit ist der gesuchte Schnittpunkt A' gegeben durch

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A' = (\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})\,.$$

Genauso geht man für die beiden anderen Kanten vor. Man erhält ebenfalls jeweils den Parameterwert $t = \frac{3}{4}$ (wenn man die Parameterdarstellungen in gleicher Weise mit dem Basispunkt D aufstellt). Die gesuchten Punkte sind dann $B' = (\frac{9}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ und $C' = (3, 1, 2)$.

Zusatzfrage: Warum ergibt sich immer derselbe Parameterwert?

4) a) Sei $ABCD$ ein beliebiges Tetraeder und angenommen, die Kanten $g(A, B)$, $g(C, D)$ wären nicht windschief. Dann lägen beide Geraden und mit ihnen die 4 Punkte A, B, C, D in einer Ebene; Widerspruch zur Definition eines Tetraeders.

b) Der Abstand zweier Geraden ist der kürzeste Abstand der Punkte dieser Geraden. Dieser wird angenommen für die Punkte der Geraden, deren Verbindungsvektor senkrecht zu beiden Geraden verläuft.

1. Abstand zwischen $g_1 = g(A, B)$ und $g_2 = g(C, D)$:

Gesucht sind $P \in g(A, B)$ und $Q \in g(C, D)$ mit $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{CD}$.

$$P \in g(A,B) \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (r \in I\!R),$$

$$Q \in g(C,D) \iff \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s \in I\!R).$$

Gesucht sind nun $r, s \in I\!R$ mit $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff -8 + 16s + 4r = 0 \ \wedge \ -4s - 3r = 0$$

$$\iff 4s + r = 2 \ \wedge \ 4s + 3r = 0 \iff r = -1 \ \wedge \ s = \frac{3}{4}.$$

Damit erhält man $P = (1, 2, 1)$ und $Q = (1, 1, 2)$. [Man überprüft leicht, dass $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tatsächlich zu beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ senkrecht ist.]

Der Abstand der beiden Geraden beträgt nun

$$d(g_1, g_2) = d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2}.$$

2. Abstand zwischen $g_3 = g(A, C)$ und $g_4 = g(B, D)$:

$$P \in g(A,C) \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (r \in I\!R),$$

$$Q \in g(B,D) \iff \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (s \in I\!R).$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff -7 + 19s = 0 \ \wedge \ -4r = 0 \iff r = 0 \ \wedge \ s = \frac{7}{19}.$$

Damit erhält man $P = A$ und $Q = (\frac{36}{19}, \frac{7}{19}, \frac{2}{19})$ und als Abstand der Geraden

$$d(g_3, g_4) = d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{2}{19}\sqrt{38} \approx 0{,}65\,.$$

3. Abstand zwischen $g_5 = g(A, D)$ und $g_6 = g(B, C)$:

$$P \in g(A, D) \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}),$$

$$Q \in g(B, C) \iff \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff -3 + 11s - 4r = 0 \ \wedge\ -4 + 4s - 8r = 0 \iff s = \frac{1}{9} \ \wedge\ r = -\frac{4}{9}\,.$$

Damit erhält man $P = (\frac{26}{9}, 1, -\frac{8}{9})$ und $Q = (\frac{28}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{3})$ sowie als Abstand der beiden Geraden

$$d(g_5, g_6) = d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{2}{9}\sqrt{18} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}94\,.$$

Ich empfehle dringend, bei derartigen Rechnungen am Ende zur Kontrolle zu überprüfen, ob der gefundene Abstandsvektor $\overrightarrow{PQ}$ bzw. ein glattes Vielfaches davon (hier $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$) tatsächlich orthogonal zu den gewählten Richtungsvektoren der beiden Geraden ist (hier $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$). Dies ist sehr schnell durchgeführt und deckt evtl. Rechenfehler auf.

b′) Lösung von b) unter Verwendung von Vektorprodukt und Abstandsformel windschiefer Geraden (siehe Skript). Wir bestimmen einen gemeinsamen Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ zu den beiden windschiefen Geraden als Vektorprodukt von zwei Richtungsvektoren $\vec{u}, \vec{v}$ der beiden Geraden, wir wählen je einen Punkt P bzw. Q auf den Geraden und berechnen damit den Abstand:

$$d = \frac{|\vec{n} \bullet \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|}\,.$$

1. Abstand zwischen $g_1 = g(A, B)$ und $g_2 = g(C, D)$: Dann wählen wir

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für das Vektorprodukt erhalten wir

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und damit dann

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -8\,, \quad |\vec{n}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\,, \quad d = \frac{8}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,.$$

2. Abstand zwischen $g_3 = g(A, C)$ und $g_4 = g(B, D)$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 8\,, \quad d = \frac{8}{\sqrt{152}} = \frac{2}{19}\sqrt{38}$$

3. Abstand zwischen $g_5 = g(A, D)$ und $g_6 = g(B, C)$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -8\,, \quad d = \frac{8}{\sqrt{72}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,.$$