Übungen zu e-Funktion und natürlichem Logarithmus: Differentialrechnung

(Quelle: Schroedel-Schöningh: Einführung in die Analysis 2, Grundkurs)

1) Rechnen mit Logarithmen: S. 86, Aufgaben 13–15
   (Lösungen S. 11)
2) Erste Ableitungsübungen: S. 86, Aufgaben 5–6; S. 93, Aufgabe 4
   (Lösungen S. 12)
3) Tangenten: S. 86, Aufgaben 7–9; S. 93, Aufgaben 5, 7
   (Lösungen S. 13)
4) Ableitungsübungen: S. 94, Aufgaben 1–3,6,7
   (Lösungen S. 15)
5) Erste Funktionsuntersuchungen: S. 90, Aufgabe 4 d)–f), a)–c); S. 93, Aufgabe 6
   (Lösungen S. 18)
6) Funktionsuntersuchungen: S. 95, Aufgaben 12–15
   (Lösungen S. 25)
7) Tangenten: S. 97, Aufgaben 24–27
   (Lösungen S. 40)
8) Funktionsscharen: S. 97/98, Aufgaben 28–30, 32–36
   (Lösungen S. 43)
9) Extremwertaufgaben: S. 96, Aufgaben 21–23
   (Lösungen S. 48)
10) Anwendungen: S. 98/99, Aufgaben 37–41
    (Lösungen S. 51)

5.
Bilde die Ableitung.

a) $f(x)=e^{2x}$ c) $f(t)=e^{-t}$ e) $f(x)=2e^{x}+x+1$ g) $f(x)=a\,e^{ux+v}+c$

b) $f(t)=3{,}5\,e^{2t+1}$ d) $g(x)=2e^{-\frac{x}{2}}$ f) $f(x)=e^{kx}$ h) $h(x)=e^{-\frac{x+1}{d}}$

6.
Bilde die n-te Ableitung.

a) $f(x)=e^{-x}$ b) $f(x)=e^{5x}+x^{n-1}$ c) $f(t)=e^{\lambda t+1}$ d) $f(t)=e^{-kt}$

7.
Berechne zu den Stellen -1; 0; 1; 2 jeweils die Gleichung der Tangente an den Graphen von $x\mapsto e^{x}$ [von $x\mapsto e^{0{,}5x}$; von $x\mapsto 3\cdot e^{0{,}1x}$]. Wo schneidet diese Tangente jeweils die 1. Achse?

8.
In der Umgebung von 0 unterscheidet sich der Graph von $x\mapsto e^{x}$ nur wenig von der Tangente im Punkt P(0; 1). Stelle hieraus eine Näherungsgleichung für e^{x} auf und berechne Näherungswerte für $e^{0{,}002}$; $e^{-0{,}001}$; $e^{0{,}1}$. Sind diese Werte jeweils größer oder kleiner als der genaue Wert?

△ **9.**

a) Beweise: Die Tangente an den Graphen der e-Funktion im Punkt $P(x;\,e^{x})$ schneidet die 1. Achse an der Stelle $x-1$.

b) Welche geometrische Konstruktion für die Tangente ergibt sich hieraus?

10.
Gib eine Stammfunktion F von f an.

a) $f(x)=e^{x}$ b) $f(x)=e^{x+1}$ c) $f(x)=e^{2x}$ d) $f(x)=e^{2x-3}$ e) $f(x)=e^{-x}$ f) $f(x)=e^{-3x+2}$

△ **11.**
Berechne den Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f über dem Intervall [0; 2] [[-2; 3]].

a) $f(x)=e^{x}+x+2$ b) $f(x)=2\cdot e^{x+1}$ c) $f(x)=e^{x}+e^{-x}$ d) $f(x)=e^{2x}+e^{-x}$

△ **12.**
Bestimme k so, daß das Integral den angegebenen Wert hat.

a) $\int_0^1 k\,e^{x}\,dx=e$ b) $\int_0^1 (e^{x}+kx)\,dx=2$ c) $\int_0^k e^{x}\,dx=e$ d) $\int_0^2 k\,e^{kx}\,dx=e-1$

13.
Vereinfache folgende Terme.

a) $\ln e^{2}$ c) $\ln\sqrt{e}$ e) $\ln\frac{e^{2}}{k}$ g) $\ln\sqrt{\frac{3}{e}}$ i) $\ln\sqrt[n]{e}$ k) $e^{-\ln 2}$ m) $e^{-\ln\sqrt{5}}$

b) $\ln\frac{1}{e^{2}}$ d) $\ln\sqrt[3]{e}$ f) $\ln 2\cdot e^{3}$ h) $\ln(e^{3k})$ j) $e^{\ln 3}$ l) $e^{\frac{1}{2}\ln 3}$ n) $2e^{-\ln 0{,}1}$

14.
Fasse jeweils zu einem Term zusammen.

a) $\ln(x+1)-\ln x+\ln\frac{1}{x}$ c) $3\ln x-\ln(2+x)-\ln(x-2)$

b) $\ln(x+1)+\ln(x-1)-2\ln x$ d) $\ln(e^{x+1})\cdot\ln(e^{-x^{2}})$

15.
Bestimme die Lösungsmenge.

a) $\ln x=3$ c) $\ln(x+1)=2$ e) $\ln(3x-5)=0$ g) $e^{\frac{1}{2}x}=3$ i) $e^{\sqrt{x}}=2$

b) $\ln x=-1$ d) $\ln(x^{2})=1$ f) $e^{x}=2$ h) $e^{2x+1}=\frac{1}{2}$ j) $e^{3x^{2}}=7$

16.
An welchen Stellen schneidet der Graph der Funktion $x\mapsto\ln x$ die Geraden mit $y=n$ (wobei $n\in\mathbb{Z}$)?

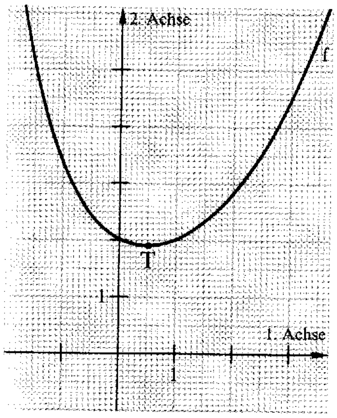
(5) *Wendepunkte*

Wendestellen können höchstens dort vorliegen, wo $f''(x)=0$ gilt. (Anhang, Seite 175) Nach c) gilt aber $f''(x)>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Daher hat die Funktion f keine Wendestellen.

(6) *Monotonieverhalten*

Ein hinreichendes Kriterium für strenge Monotonie wird durch das Vorzeichenverhalten von f' geliefert: Ist $f'(x)>0$ (bzw. $f'(x)<0$) in einem Intervall, so ist f dort streng monoton wachsend (bzw. fallend) (Anhang Seite 175).
Wie in (4) berechnet man: $f'(x)<0$ ist äquivalent zu $x<\frac{2}{3}\ln 2$ und $f'(x)>0$ ist äquivalent zu $x>\frac{2}{3}\ln 2$.

Deshalb ist die Funktion f im Intervall $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<\frac{2}{3}\ln 2\}$ streng monoton fallend, im Intervall $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>\frac{2}{3}\ln 2\}$ streng monoton wachsend.



(7) *Wertemenge*

Wegen (6) ist der Punkt T auch absoluter Tiefpunkt des Graphen von f. Deshalb ist die Wertemenge nach (4) gleich

$\{y\in\mathbb{R}\,|\,y\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\}=\{y\in\mathbb{R}\,|\,y\geq 1{,}890\}$ (wobei $\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{2}\approx 1{,}890$).

Übungen

1.

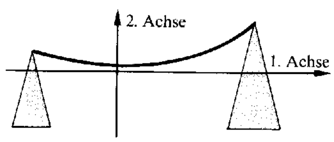
Untersuche die gegebene Funktion.

a) $x\mapsto e^x-2$ c) $x\mapsto\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ e) $x\mapsto e^{2x}-2e^x+1$ △ g) $x\mapsto e^{-x^2}$

b) $x\mapsto e^{\frac{1}{2}x}-e^x$ d) $x\mapsto e^x-\frac{5}{4}e^{-x}+2$ △ f) $x\mapsto e^{2kx}+2e^{-kx}$ △ h) $x\mapsto x\cdot e^x$

2.

Hängt eine Leitung frei zwischen zwei Masten, so wird ihr Verlauf bei geeignet gewähltem Koordinatensystem sehr gut durch die Gleichung $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ wiedergegeben.
Untersuche die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$; $x\in\mathbb{R}$.



3.

Beweise, daß die Funktion f_k mit $f_k(x)=e^{kx}+k\,e^{(k+1)x}$ genau dann eine Wendestelle hat, wenn $k<0$ und $k\neq-1$ ist. Berechne dann den Wendepunkt des Graphen.

4.

Untersuche die Funktion f. Fertige eine Zeichnung an (Produktregel bzw. Quotientenregel erforderlich).

a) $f(x)=\frac{e^x-2}{1+e^x}$ △ c) $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^x}$ △ e) $f(x)=x^2e^{-x}$

b) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ △ d) $f(x)=(x^2-1)\,e^x$ △ f) $f(x)=x(x-1)\,e^{-x}$

5.

Bestimme alle ganzrationalen Funktionen 3. Grades [5. Grades; n-ten Grades], die an der Stelle 0 mit der Funktion f im Funktionswert und in den ersten 3 [5; n] Ableitungen übereinstimmen.

a) $f(x)=e^x$ b) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ c) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ △ d) $f(x)=x\cdot e^{-x}$

6.

Untersuche die Funktion f und gib die Gleichung der Wendetangente(n) an. Berechne den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der 1. Achse über dem Intervall $[-1;2]$.

a) $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x$ b) $f(x)=-e^{2x}+2e^x$ c) $f(x)=e^x+4e^{-x}$ d) $f(x)=\frac{4e^{2x}-1}{e^{3x}}$

Übungen

4.
Bilde die 1. und 2. Ableitung.

a) $f(x)=\ln(x+1)$ **c)** $f(x)=\log_3 x+3^x$ **e)** $f(t)=\ln(1+kt)$ **g)** $f(x)=\ln b\cdot\log_b x$

b) $f(x)=\log_2 x+x+2$ **d)** $f(x)=2\ln(2x)$ **f)** $h(t)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t}{b}-1\right)$ **h)** $f(x)=e^{2\ln x}+\ln(e^{2x})$

5.
An welchen Punkten sind die Tangenten an den Graphen der Logarithmusfunktion ln parallel zur Geraden mit $2x-3y+7=0$? Wie lautet jeweils die Gleichung der Tangente?

6.
Untersuche die gegebene Funktion.

a) $x\mapsto\ln x-\frac{1}{2}x^2;\ x\in\mathbb{R}^+$ **b)** $x\mapsto x-\ln(x+1);\ x>-1$ **c)** $x\mapsto 1+\ln|x|;\ x\neq 0$

7.
In der Umgebung von 0 unterscheidet sich der Graph von $x\mapsto\ln(1+x)$ nur wenig von der Tangente im Ursprung O.
Folgere hieraus die Näherungsgleichung $\ln(1+x)\approx x$. Berechne hiermit Näherungswerte für
$\ln 1{,}05$; $\ln 0{,}99$; $\ln\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

8.
Ein Wachstumsprozeß werde durch die Exponentialfunktion $t\mapsto\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ beschrieben.

Begründe, daß p als prozentuale Wachstumsrate gedeutet werden kann $(p>0)$.
Es sei d die Verdopplungszeit des Prozesses, d.h. zur Zeit $t+d$ ist der Funktionswert stets doppelt so groß wie zur Zeit t.
Beweise: $p\cdot d\approx 70$
Anleitung: Überlege: $\left(1+\frac{p}{100}\right)^d=2$; forme um und benutze die Näherungsgleichung aus Aufgabe 7; beachte: $\ln 2\approx 0{,}7$.

9.
Beweise: Wird eine Gerade mit der Gleichung $y=mx+b$ $(m\neq 0)$ an der 1. Winkelhalbierenden gespiegelt, so hat die gespiegelte Gerade die Gleichung $y=\frac{1}{m}x-\frac{b}{m}$.

10.
Berechne das folgende Integral.

a) $\int_{-2}^{-6}\frac{1}{x}\,dx$ **b)** $\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\,dx$ **c)** $\int_{0,5}^{2}\frac{1}{x}\,dx$ **d)** $\int_{-5}^{-1}\frac{1}{x}\,dx$ **e)** $\int_{a}^{b}\frac{1}{x}\,dx$ $(a,b>0)$ **f)** $\int_{a}^{b}\frac{1}{x}\,dx$ $(a,b<0)$

11.
Berechne mit Hilfe linearer Substitution (siehe Seite 50).

a) $\int_{2}^{3}\frac{1}{x-1}\,dx$ **b)** $\int_{-1}^{+1}\frac{3}{x+5}\,dx$ **c)** $\int_{-1}^{0}\frac{1}{3x-6}\,dx$ **d)** $\int_{2}^{3}\frac{4}{5x+10}\,dx$ **e)** $\int_{-1}^{3}\frac{-7}{-2y+8}\,dy$

12.
Berechne den Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x}$ über dem Intervall

a) $[1;4]$; **b)** $[-2;\ -0{,}5]$.

2.4. Vermischte Übungen*)

Differentiation und Integration

1.

Gib zur Funktion f jeweils f′ und f″ an. Fasse gegebenenfalls zusammen (z.T. mit *Kettenregel*).

a) $f(x)=e^{x-4}+3e^{-2x}+e^{1-x}-\frac{1}{2}e^{1-3x}$

b) $f(x)=5e^{-0,1x}+0{,}25e^{4x+1}-2e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x}$

c) $f(x)=(e^x-1)^2+(e^x+1)^2$

d) $f(x)=(e^{-x}+1)^2+(e^{-x}-1)^2$

e) $f(x)=\left(\frac{e^{-x}+e^x}{2}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$

f) $f(k)=e^{x-4}-4x$

g) $f(x)=e^{-x}+x-1$

h) $f(x)=e^{-x}-\frac{1}{3}x^2+0{,}3x$

i) $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3e^{-x+1}+x^2$

j) $f(x)=\frac{e^{3x}-e^{2x}+e^{-x}+1}{e^x}$

2.

Bestimme zu folgenden Funktionen jeweils f′ und f″.

a) $f(x)=-4^x$ **b)** $f(x)=0{,}25^x$ **c)** $f(x)=(\sqrt{2})^{2x}$ **d)** $f(x)=2^{x+1}-3^{2x-1}+\frac{1}{2}x^3-3$

3.

Bestimme zu folgenden Funktionen jeweils f′ und f″ *(Produktregel)*.

a) $f(x)=x\cdot e^x$

b) $f(x)=x\cdot e^{-x}$

c) $f(x)=(2-x)e^x$

d) $f(x)=(x-3)e^{-x}$

e) $f(x)=(x^2-2x+3)e^{-x}$

f) $f(x)=(4-x^2)e^x+(x^2-4)e^{-x}$

4.

Ermittle zu folgenden Funktionen f jeweils eine Stammfunktion F.

a) $f(x)=3e^{2x+1}$

b) $f(x)=2e^{-x+1}$

c) $f(x)=-0{,}5e^{2-\frac{1}{4}x}$

d) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

e) $f(x)=(e^x-e^{-x})^2$

f) $f(x)=(e^x+e^{-x})^2$

5.

Berechne die folgenden bestimmten Integrale.

a) $\int_1^3 2e^{3x}\,dx$

b) $\int_{-1}^{+1} 3e^{-x}\,dx$

c) $\int_{-2}^{+3} (e^x-e^{-x})\,dx$

d) $\int_0^1 (e^{-x}+x)\,dx$

e) $\int_{-1}^{0} (e^x-x-1)\,dx$

f) $\int_0^1 (e^x-1)^2\,dx$

6.

Berechne f′(x) und f″(x) *(Quotientenregel und Kettenregel)*.

a) $f(x)=\frac{e^x}{x}$ **b)** $f(x)=\frac{e^{-x}}{x+1}$ **c)** $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ **d)** $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ **e)** $f(x)=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

7.

Berechne f′. (z.T. mit *Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel*)

a) $f(x)=\ln(x+1)+\ln(x-1)$

b) $f(x)=\ln(x^2)+\ln\left(\frac{1}{x}\right)-\ln(2x)$

c) $f(x)=\ln(\sqrt{x})-\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

d) $f(x)=x^2-\ln x+1$

e) $f(x)=\ln(2x+1)+\ln(2x-1)$

f) $f(x)=x\cdot\ln x$

g) $f(x)=x^2\cdot\ln x$

h) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

i) $f(x)=(\ln x)^2$

j) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

k) $f(x)=(x^2-4)\ln x$

l) $f(x)=\ln\frac{3x}{x-1}$

m) $f(x)=\ln\frac{1}{x^2-4}$

n) $f(x)=\ln(x^2+1)$

---

*) In den Aufgaben werden teilweise neben der Kettenregel die Quotientenregel und die Produktregel benötigt.

8.

Bestimme zur Funktion f jeweils eine Stammfunktion F.

a) $f(x)=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x-1}$ **d)** $f(x)=\frac{2}{2x+1}-\frac{3}{3x-1}+\frac{1}{\frac{1}{2}x+1}$ **g)** $f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+2}$

b) $f(x)=\frac{1-x-x^2-x^4}{2x^2}$ **e)** $f(x)=\frac{-3x^3+\frac{1}{2}x^2-5x-3}{x^2}$ △ **h)** $f(x)=\frac{x-4}{x-5}$

c) $f(x)=\frac{1}{3(x-4)}+\frac{1}{2(x+3)}$ **f)** $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{3}{x+1}$ △ **i)** $f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$

△ **9.**

Bestimme zur Funktion f jeweils eine Stammfunktion F *(Kettenregel)*.

a) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ **b)** $f(x)=\frac{-x}{1-x^2}$ **c)** $f(x)=\frac{x}{3x^2+1}$ **d)** $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ **e)** $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

10.

Berechne das bestimmte Integral.

a) $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$ **c)** $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2}\,dx$ **e)** $\int_1^2 \left(\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2x}\right)dx$ △ **g)** $\int_0^1 \frac{x+1}{x+2}\,dx$

b) $\int_1^2 \frac{2}{x+1}\,dx$ **d)** $\int_1^2 \frac{2x^2-4x-1}{x^2}\,dx$ **f)** $\int_0^2 \left(\frac{1}{2(x+3)}-\frac{2}{3(x+1)}\right)dx$ △ **h)** $\int_{-1}^0 \frac{x+2}{x-1}\,dx$

Flächenberechnungen

11.

Fertige eine Skizze an und lies die Schnittstellen ab.
Berechne die von den Graphen von f und g eingeschlossene Fläche.
(Eine Skizze erleichtert das Auffinden der Schnittstellen.)

a) $f(x)=e^x$	$g(x)=(e-1)\cdot x+1$	**e)** $f(x)=2^x$	$g(x)=-2x^2+8x-4$
b) $f(x)=e^{1-x}$	$g(x)=(1-e)\cdot x+e$	**f)** $f(x)=-2^{x+1}+12$	$g(x)=3x^2-18x+23$
c) $f(x)=e^{3-x}$	$g(x)=(1-e)\cdot x+3e-2$	△ **g)** $f(x)=4e^{-x}-2$	$g(x)=3-e^x$
d) $f(x)=3^x$	$g(x)=2x^2+1$	△ **h)** $f(x)=e^x-5$	$g(x)=-6e^{-x}$

Funktionsuntersuchungen

12.

Untersuche die Funktion f. Fertige eine Zeichnung an.

a) $f(x)=e^{2x-1}-e^{x+1}$ **c)** $f(x)=x-e^{x-1}$ **e)** $f(x)=\frac{e^{3x}-1}{10e^x}$

b) $f(x)=e^x-x-1$ **d)** $f(x)=2+3x-2^{x+1}$ △ **f)** $f(x)=2^x-0{,}5x^2-2$

13.

Untersuche die Funktion f. Fertige eine Zeichnung an. *(Produktregel)*

a) $f(x)=4xe^{-x}$ **c)** $f(x)=(x^2+3x+2)e^{-x}$ **e)** $f(x)=\frac{x^2-1}{e^x}$

b) $f(x)=x^2e^x$ **d)** $f(x)=(x^2-2x+2)e^x$ △ **f)** $f(x)=(x^3-4)\cdot e^x$

14.

Untersuche die Funktion f. Fertige eine Zeichnung an.

a) $f(x)=\ln x-x$ **b)** $f(x)=\ln x+x^2-1$ △ **c)** $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{7-x}\right)$

△ **15.**

Untersuche die Funktion f. Fertige eine Zeichnung an. *(Produktregel)*

a) $f(x)=x^2(\ln x-2)$ **b)** $f(x)=3x-2x\ln x$ **c)** $f(x)=x\ln x-\frac{x^2}{2}$

Flächen; Rotationsvolumina

16.

a) Bestimme den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f: $x \mapsto e^{-x}$, der Tangente an f in $P(0; 1)$, der 1. Achse und der Geraden $x = 5$ [10; 100; u] eingeschlossen wird.

b) Was erhält man für $u \to \infty$?

17.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.

a) Von $O(0; 0)$ aus wird eine Tangente an den Graphen von f gelegt. Bestimme den Berührpunkt und die Tangentengleichung.

b) Der Graph von f, die Tangente aus Teilaufgabe a) und die negative 1. Achse begrenzen eine Fläche. Berechne den Inhalt.
(*Hinweis:* Wähle zunächst als untere Integrationsgrenze $u \in \mathbb{R}^-$ und ermittle anschließend den Grenzwert für $u \to -\infty$.)

18.

Zeige, daß sich die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = e^{x+2}$ und g mit $g(x) = 2e - e^{-x}$ an der Stelle -1 berühren. Zeichne beide Funktionsgraphen und berechne den Inhalt der von beiden Funktionsgraphen und der 2. Achse eingeschlossenen Fläche.

19.

Die von den Graphen von f und g mit $f(x) = e^x - 0{,}5$ und $g(x) = e^{-x} - 0{,}5$ und der 1. Achse eingeschlossene Fläche rotiere um die 1. Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

20.

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$.

a) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der 1. Achse über dem Intervall $[1; k]$, $k > 1$ sowie das Volumen des bei Rotation dieser Fläche um die 1. Achse entstehenden Körpers.

b) Untersuche das Verhalten von Flächeninhalt und Volumen für $k \to \infty$.

Extremwertaufgaben

21.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x$.

a) Ermittle die Gleichung der Geraden g durch die Punkte $P_1(0; 1)$ und $P_2(1; e)$ des Graphen der Funktion f. Fertige eine Zeichnung an.

b) Für welches $x \in [0; 1]$ ist die Differenz der Funktionswerte $g(x) - f(x)$ maximal? Berechne das Extremum.

22.

Gegeben sei die Funktion f mit **a)** $f(x) = \ln \frac{1}{x}$; **b)** $f(x) = e^{-x}$.

Welches Rechteck mit achsenparallelen Seiten zwischen dem Graphen von f und den Koordinatenachsen im 1. Quadranten hat maximalen Flächeninhalt?

23.

a) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = e^{x+1}$.
Welcher Punkt des Graphen von f hat vom Ursprung den kleinsten Abstand?

b) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$.

Welcher Punkt des Graphen von f hat vom Ursprung den kleinsten Abstand?

Hinweis: Genau dann, wenn der Abstand ein Minimum hat, hat auch das Quadrat dieses Abstandes ein Minimum.

Bestimmung von Funktionen, Funktionenscharen

24.
Bestimme die ganzrationalen Funktionen g 2. Grades, welche den Graphen von f mit $f(x)=e^x$ [mit $f(x)=e^{-x}$] im Punkte P(0; 1) berühren. Zeichne eine nach oben und eine nach unten geöffnete berührende Parabel zusammen mit dem Graphen von f in dasselbe Koordinatensystem.

25.
Bestimme die ganzrationalen Funktionen 2. Grades, welche den Graphen von f mit $f(x)=\ln(x+1)$ $\left[\text{mit } f(x)=\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)\right]$ im Punkt P(0; 0) berühren. Zeichne eine nach oben und eine nach unten geöffnete berührende Parabel zusammen mit dem Graphen von f in ein Koordinatensystem.

26.
Gegeben sei die Funktion f mit $f(x)=\ln x$, $x>0$.

a) Welche der Tangenten an den Graphen von f verläuft durch den Ursprung?

b) Was ergibt sich entsprechend für $\ln(x+1)$?

27.
Gegeben sei die Funktion f mit $f(x)=e^x$.

a) Welche der Tangenten an den Graphen von f verläuft durch den Ursprung?

b) Was ergibt sich entsprechend für die Funktionenscharen $f_k(x)=e^{x-k}$ bzw. $f_k(x)=e^{kx}$?

28.
Für $k\in\mathbb{R}$ sind die Funktionen f_k und g_k gegeben durch $f_k(x)=e^{kx}$ und $g_k(x)=e^{-kx}$.
Wie ist k zu wählen, damit die Tangenten an die Graphen von f_k und g_k im Punkt P(0; 1) mit der 1. Achse ein **a)** rechtwinklig-gleichschenkliges **b)** gleichseitiges Dreieck bilden?
Fertige jeweils eine Skizze an!

29.
Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x)=x\cdot e^x$ bzw. $g(x)=x\cdot e^{-x}$.

a) Ermittle die Gleichungen der Wendetangenten an die Graphen von f und g.

b) Was ergibt sich, wenn man die Gleichungen der Wendetangenten für $f_k(x)=x\cdot e^{kx}$ und $g_k(x)=x\cdot e^{-kx}$, $k\neq 0$, berechnet und miteinander vergleicht?

c) Zeige, daß die Wendepunkte von f_k bzw. g_k auf einer Geraden liegen.
Was läßt sich über die Lage der Extrempunkte sagen?

30.
Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x)=(x^2+4x+k)e^{-x}$, $k\in\mathbb{R}$.
Begründe, daß eine Funktion f_k, deren Graph eine Nullstelle hat, auch stets eine Extremstelle hat

a) durch Vergleich der Gleichungen $f_k(x)=0$ und $f_k'(x)=0$;

b) durch Betrachtung des Verhaltens von f(x) für $x\to+\infty$ bzw. $x\to-\infty$, ohne f_k' zu betrachten.

31.

a) Die Funktion F sei ein Produkt der Funktion $x\mapsto e^x$ mit einer quadratischen Funktion, das heißt $F(x)=(ax^2+bx+c)\cdot e^x$ mit festen Zahlen a, b, $c\in\mathbb{R}$.
Zeige, daß dann auch die Ableitungsfunktion F′ ein Produkt der Funktion $x\mapsto e^x$ mit einer quadratischen Funktion ist.

b) Es ist $f(x)=(x^2-3x-1)e^x$. Bestimme mit Hilfe des Ergebnisses aus a) eine Stammfunktion F zu f.

32.

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = x + 1 - k \cdot e^x$, $k > 0$.

a) Untersuche f_k auf Extrema und Wendepunkte, zeichne den Graphen für $k = 1$.

b) Zeige, daß die Hochpunkte der Funktionenschar f_k auf einer Geraden liegen.

33.

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = (k - x)e^x$, $k \in \mathbb{R}$.

a) Zeige, daß der Graph einer jeden Funktion f_k genau einen Extrempunkt hat.

b) Zeige, daß die Extrempunkte aller Funktionen f_k auf dem Graphen der Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ liegen.

△ **34.**

Untersuche die Anzahl der Lösungen der Gleichung $e^x - x + k = 0$ in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$.

△ **35.**

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = ae^x + be^{-x}$ mit festen Zahlen a, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeige, daß der Graph von f entweder einen Extrempunkt oder einen Wendepunkt besitzt.

△ **36.**

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = \frac{1}{k} \cdot \ln x$, $k > 0$.

a) Bestimme die Gleichung der Tangenten t_k und der zugehörigen Normalen n_k an den Graphen von f_k im Punkt $P(1; 0)$.
Zeichne f_2, t_2 und n_2 in dasselbe Koordinatensystem.

b) Für welches k hat das von n_k, t_k und der 2. Achse begrenzte Dreieck minimalen Flächeninhalt?

Anwendungsaufgaben

37.

Das Element U 234 zerfällt mit der Halbwertszeit $2{,}44 \cdot 10^5$ Jahre.

a) Wieviel Prozent der ursprünglichen Menge sind noch nach 1000 [10000; 100000; t] Jahren vorhanden?

b) Nach welcher Zeit sind noch 10 [5; 1; p]% der ursprünglichen Menge vorhanden?

c) Gib eine Funktion an, die den bereits *zerfallenen* Anteil zum Zeitpunkt $t > 0$ angibt. Zeichne den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

38.

Die Bevölkerung eines Staates wachse entsprechend der Funktion N mit $N(t) = N_0 \cdot e^{\alpha(t - t_0)}$, wobei $N_0 = 120 \cdot 10^6$ die Anzahl der Einwohner im Jahr 1990 (t_0) bezeichnet und $\alpha = 0{,}03 \frac{1}{\text{Jahr}}$ (Wachstumsrate) ist.

a) Wie groß wird die Bevölkerungszahl im Jahre 2000 sein?

b) Vor wieviel Jahren war die Bevölkerungszahl halb so groß wie im Jahre 1990?

c) Um wieviel Prozent nimmt die Bevölkerungszahl jährlich zu? Vergleiche mit der Wachstumsrate!

39.

Die Bevölkerung eines Staates nahm in 5 Jahren um 2 Millionen Einwohner zu. Die jährliche Zunahme betrug 0,5%. Bestimme die Bevölkerungszahl nach Ablauf dieser 5 Jahre. Nach wie vielen Jahren wird sich die Bevölkerungszahl verdoppelt haben?

40.

Im Jahr 1987 hatten die USA 242 Millionen Einwohner. Mexiko hatte in diesem Jahr 81 Millionen Einwohner. Das jährliche Bevölkerungswachstum betrug für die USA in den letzten Jahren durchschnittlich 1%, für Mexiko durchschnittlich 2,6%. Es sei als konstant unterstellt.

a) Bestimme jeweils die Bevölkerungszahl in Abhängigkeit von der Zeit. Stelle die Wachstumsfunktionen graphisch dar.

b) Berechne die Verdoppelungszeiten.

c) Wann wird die Einwohnerzahl der USA nur noch doppelt so groß wie die von Mexiko sein?

41.

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab, und zwar bei einem Aufstieg von 1000 m um (etwa) 12% (konstante Temperatur unterstellt). Am Erdboden herrsche der Luftdruck $p_0 = 1013$ hPa.

a) Wie hoch ist der Luftdruck in einer Höhe von 100 m [von 2000 m, von 8000 m] über dem Erdboden?
In welcher Höhe ist der Luftdruck auf die Hälfte von p_0 gefallen?

b) Bestimme k so, daß die Funktion $x \mapsto p_0 e^{-kx}$ den Luftdruck in einer Höhe von x Metern angibt.

42.

Ein Anfangskapital K_0 von 10000 DM sei mit dem Zinssatz 7% langfristig angelegt.

a) Wie groß ist das Kapitel K_1 (Anfangskapital zuzüglich Zinsen) nach einem Jahr?

b) Beweise: Nach n Jahren beträgt das Kapital $K_n = K_0 \cdot 1{,}07^n$.

c) Berechne mit einem Taschenrechner die Potenzen $1{,}07^n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots, 30$ und stelle das Wachstum des Kapitals graphisch dar.

d) Wann ungefähr hat sich das Anfangskapital verdoppelt?

43.

Ein Anfangskapital von 5000 DM war bei wechselnden Zinssätzen 5 Jahre lang angelegt und hat sich in dieser Zeit (mit Zinseszins) auf 6755 DM erhöht. Welcher feste Zinssatz (genannt Rendite) hätte (ungefähr) dieses Resultat erbracht?
Anleitung: Verwende einem Taschenrechner und schachtele den gesuchten Zinssatz durch fortwährendes Probieren so ein, daß er auf 2 Stellen hinter dem Komma genau ist.

44.

Ein Kapital von 10000 DM wird zu einem Zinssatz von 4% jährlich verzinst.

a) Wie hoch ist das Kapital nach 1 Jahr [5; 10; n Jahren]?

△ b) Wie hoch ist das Kapital am Ende des ersten Jahres, wenn die Verzinsung $\frac{1}{2}$-jährlich $\left[\frac{1}{4}\text{-jährlich}; \frac{1}{12}\text{-jährlich}; \frac{1}{n}\text{-jährlich}\right]$ zu einem diesem Zeitraum entsprechenden Zinssatz von 2% $\left[1\%; \frac{4}{12}\%; \frac{4}{n}\%\right]$ erfolgt? Was erhält man für $n \to \infty$? (Momentanverzinsung)
(Verwende zur Ermittlung des Grenzwertes, daß $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ ist.)

△ **45.**

Berechne ausgehend von einem Jahreszinssatz von 5% [10%; p %] und einem Anfangskapital von 2000 DM wie in Aufgabe 42b) das Gesamtkapital nach einem Jahr bei Momentanverzinsung.

△ **46.**

Ein Kapital wird zu einem Jahreszinssatz von 5% [10%; p %] verzinst. Wie wäre der entsprechende Zinssatz bei Momentanverzinsung zu wählen, wenn man auf 1 Jahr bezogen den gleichen Zuwachs erhalten möchte?

Übung zu e^x und $\ln x$ — Lösungen

1) Ergebnisse: **S. 86, Aufgabe 13:**

a) 2, b) -2, c) $\frac{1}{2}$,

d) $\frac{1}{3}$, e) $2-\ln(k)$, f) $\ln(2)+3$,

g) $\frac{1}{2}\cdot(\ln(3)-1)$, h) $3k$, i) $\frac{1}{n}$

j) 3, k) $\frac{1}{2}$, l) $\sqrt{3}$,

m) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, n) 20.

Lösungsweg: Anwendung der Logarithmengesetze

$$\ln(e^x) = x\,, \tag{1}$$
$$e^{\ln(x)} = x\,, \tag{2}$$
$$\ln(a\cdot b) = \ln(a)+\ln(b)\,, \tag{3}$$
$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a)-\ln(b)\,, \tag{4}$$
$$\ln(a^r) = r\cdot\ln(a)\,, \tag{5}$$
$$\ln(\sqrt[r]{a}) = \ln a^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r}\ln a\,. \tag{6}$$

a) $\ln(e^2) \underset{(1)}{=} 2$,

b) $\ln\frac{1}{e^2} = \ln e^{-2} \underset{(1)}{=} -2$,

c) $\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{\frac{1}{2}}) \underset{(1)}{=} \frac{1}{2}$

d) $\ln\sqrt[3]{e} = \ln e^{\frac{1}{3}} \underset{(1)}{=} \frac{1}{3}$,

e) $\ln\frac{e^2}{k} \underset{(4)}{=} \ln e^2 - \ln k \underset{(1)}{=} 2-\ln k$,

f) $\ln(2\cdot e^3) \underset{(3)}{=} \ln 2 + \ln e^3 \underset{(1)}{=} 3+\ln 2$,

g) $\ln\sqrt{\frac{3}{e}} \underset{(6)}{=} \frac{1}{2}\ln\frac{3}{e} \underset{(3)}{=} \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln e) \underset{(1)}{=} \frac{1}{2}(\ln 3 - 1)$,

h) $\ln(e^{3k}) \underset{(1)}{=} 3k$,

i) $\ln\sqrt[n]{e} \underset{(6)}{=} \frac{1}{n}\ln e \underset{(1)}{=} \frac{1}{n}$,

j) $e^{\ln 3} \underset{(2)}{=} 3$,

k) $e^{-\ln 2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} \underset{(2)}{=} \frac{1}{2}$,

l) $e^{\frac{1}{2}\ln 3} = (e^{\ln 3})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e^{\ln 3}} \underset{(2)}{=} \sqrt{3}$,

m) $e^{-\ln\sqrt{5}} = \frac{1}{e^{\ln\sqrt{5}}} \underset{(2)}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}$,

n) $2e^{-\ln 0{,}1} = \frac{2}{e^{\ln 0{,}1}} \underset{(2)}{=} \frac{2}{0{,}1} = 20$.

S. 86, Aufgabe 14:

a) $\ln(\frac{x+1}{x^2})$, b) $\ln(\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}) = \ln(\frac{x^2-1}{x^2})$,

c) $\ln(\frac{x^3}{(x+2)(x-2)}) = \ln(\frac{x^3}{x^2-4})$, d) $-x^3-x^2$.

Lösungsweg (Anwendung der Logarithmengesetze, speziell (3) und (4)):
a) $\ln(x+1) - \ln x + \ln\frac{1}{x} = \ln(\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{x}) = \ln\frac{x+1}{x^2}$,

b) $\ln(x+1)+\ln(x-1)-2\ln x = \ln((x+1)(x-1)) - \ln x^2 = \ln\frac{x^2-1}{x^2}$,
c) $3\ln x - \ln(2+x) - \ln(x-2) = \ln x^3 - \ln(2+x) - \ln(x-2) = \ln\frac{x^3}{(x+2)(x-2)} = \ln\frac{x^3}{x^2-4}$,
d) $\ln(e^{x+1})\cdot\ln(e^{-x^2}) = (x+1)(-x^2) = -x^3 - x^2$.

S. 86, Aufgabe 15:

a) $\mathbb{L}=\{e^3\}$, b) $\mathbb{L}=\{\frac{1}{e}\}$, c) $\mathbb{L}=\{e^2-1\}$,

d) $\mathbb{L}=\{\sqrt{e},-\sqrt{e}\}$, e) $\mathbb{L}=\{2\}$, f) $\mathbb{L}=\{\ln(2)\}$,

g) $\mathbb{L}=\{2\ln(3)\}$, h) $\mathbb{L}=\{\frac{-\ln(2)-1}{2}\}$, i) $\mathbb{L}=\{(\ln(2))^2\}$,

j) $\mathbb{L}=\{\pm\sqrt{\frac{\ln(7)}{3}}\}$.

Lösungsweg (Logarithmengleichungen löst man durch Anwendung der Exponentialfunktion und Exponentialgleichungen durch Anwendung der Logarithmusfunktion; beides sind Äquivalenzumformungen, ändern also die Lösungsmenge nicht!):
a) $\ln x = 3 \iff e^{\ln x} = e^3 \iff x = e^3$,
b) $\ln x = -1 \iff e^{\ln x} = e^{-1} \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}$,
c) $\ln(x+1) = 2 \iff x+1 = e^2 \iff x = e^2 - 1$,
d) $\ln x^2 = 1 \iff e^{\ln x^2} = e^1 \iff x^2 = e \iff x = \pm\sqrt{e}$,
e) $\ln(3x-5) = 0 \iff 3x-5 = e^0 = 1 \iff x = 2$,
f) $e^x = 2 \iff \ln(e^x) = \ln 2 \iff x = \ln 2$,
g) $e^{\frac{1}{2}x} = 3 \iff \frac{1}{2}x = \ln 3 \iff x = 2\ln 3$,
h) $e^{2x+1} = \frac{1}{2} \iff 2x+1 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \iff x = \frac{-1-\ln 2}{2}$,
i) $e^{\sqrt{x}} = 2 \iff \sqrt{x} = \ln 2 \underbrace{\iff}_{\text{wegen } \ln 2>0} x = (\ln 2)^2$.
j) $e^{3x^2} = 7 \iff 3x^2 = \ln 7 \iff x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}\ln 7}$.

2) **S. 86, Aufgabe 5:**

a) $f'(x) = 2e^{2x}$, b) $f'(t) = 7e^{2t+1}$, c) $f'(t) = -e^{-t}$,

d) $f'(x) = -e^{-\frac{x}{2}}$, e) $f'(x) = 2e^x + 1$, f) $f'(x) = ke^{kx}$,

g) $f'(x) = au\,e^{ux+v}$, h) $h'(x) = -\frac{1}{d}\cdot e^{-\frac{x+1}{d}}$.

S. 86, Aufgabe 6:

a) $f^{(n)}(x) = (-1)^n\cdot e^{-x}$, b) $f^{(n)}(x) = 5^n e^{5x}$,

c) $f^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t+1}$, d) $f^{(n)}(t) = (-k)^n e^{-kt}$.

S. 93, Aufgabe 4:

a) $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$, b) $f'(x) = \frac{1}{\ln(2)x} + 1$, $f''(x) = -\frac{1}{\ln(2)x^2}$,

c) $f'(x) = \frac{1}{\ln(3)x} + \ln(3)\cdot 3^x$, $f''(x) = -\frac{1}{\ln(3)x^2} + \ln(3)^2\cdot 3^x$,

d) $f'(x) = \frac{2}{x}$, $f''(x) = -\frac{2}{x^2}$, e) $f'(t) = \frac{k}{1+kt}$, $f''(x) = -\frac{k^2}{(1+kt)^2}$,

f) $h'(t) = \frac{1}{2\cdot(t-b)}$, $h''(t) = -\frac{1}{2\cdot(t-b)^2}$, g) $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$,

h) $f'(x) = 2x + 2$, $f''(x) = 2$.

3) Wir wiederholen die allgemeine Tangentengleichung: Ist f an der Stelle a differenzierbar, dann ist die

$$\boxed{\text{Tangentengleichung:} \quad y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).}$$

Hierbei ist a die Berührstelle, $(a, f(a))$ der Berührpunkt der Tangente mit dem Graphen.
S. 86, Aufgabe 7: Ergebnisse:

$f(x)$	$a=-1$	$a=0$	$a=1$	$a=2$
e^x	$y = \frac{1}{e} \cdot (x+2)$	$y = x+1$	$y = ex$	$y = e^2(x-1)$
$e^{\frac{x}{2}}$	$y = \frac{1}{2\sqrt{e}}(x+3)$	$y = \frac{1}{2}(x+2)$	$y = \sqrt{e} \cdot (x+1)$	$y = \frac{e}{2} \cdot x$
$3e^{\frac{x}{10}}$	$y = \frac{3}{10\sqrt[10]{e}} \cdot (x+11)$	$y = \frac{3}{10}(x+10)$	$y = \frac{3\sqrt[10]{e}}{10} \cdot (x+9)$	$y = \frac{e\sqrt[5]{e}}{10} \cdot (x+8)$

Die Tangentengleichungen sind in faktorisierter Form angegeben, so dass man die Schnittstelle der Tangente mit der x-Achse unmittelbar ablesen kann.
Schnittstellen der Tangenten mit der x-Achse:

$f(x)$	$a=-1$	$a=0$	$a=1$	$a=2$
e^x	-2	-1	0	1
$e^{\frac{x}{2}}$	-3	-2	-1	0
$3e^{\frac{x}{10}}$	-11	-10	-9	-8

Es zeigt sich: Bei $f(x) = e^x$ (1. Zeile) ist die Schnittstelle der Tangente mit der x-Achse immer gleich $a - 1$ (siehe nachfolgende Aufgabe 9), bei $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ ist sie immer gleich $a - 2$ und bei $f(x) = 3e^{\frac{x}{10}}$ liegt die Schnittstelle immer bei $a - 10$. Welche über Aufgabe 9 hinausgehende Vermutung entnehmen Sie daraus? Beweisen Sie sie wie Aufgabe 9.

S. 86, Aufgabe 8: Die Tangente an den Graphen von $f(x) = e^x$ an der Stelle $a = 0$ ist gegeben durch die Funktion $t_a(x) = e^a + e^a(x - a) = 1 + x$. Damit ist $f(x) = e^x$ in der Nähe von 0 (in „erster Näherung“) gegeben durch

$$\boxed{e^x \approx 1 + x \text{ für } x \text{ nahe bei } 0.}$$

Insbesondere $\sqrt[500]{e} = e^{0{,}002} \approx 1{,}002$, $e^{-0{,}001} = \frac{1}{\sqrt[1000]{e}} \approx 1 - 0{,}001 = 0{,}999$ und $e^{0{,}1} = \sqrt[10]{e} \approx 1{,}1$.

S. 86, Aufgabe 9: a) Die Tangentenfunktion zu $f(x) = e^x$ ist $t_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = e^a + e^a(x-a)$, wobei a die Berührstelle ist. Die Nullstelle von t_a ergibt sich zu:

$$t_a(x) = 0 \iff e^a + e^a(x-a) = \iff e^a(x-a+1) = 0 \iff x = a-1\,.$$

Damit ist die Nullstelle der Tangente gleich $a-1$, wenn a die Berührstelle ist. Dies ist genau die behauptete Aussage.
b) Geometrische Konstruktion der Tangenten an den Graphen der e-Funktion: Man fälle das Lot vom Berührpunkt (a, e^a) auf die x-Achse, gehe auf der x-Achse 1 Einheit nach links und zeichne die Gerade durch diesen Punkt $(a-1, 0)$ und den Berührpunkt $b = (a, f(a))$.
Zusatz: Ist $f(x) = c \cdot e^{\frac{x}{k}}$, so ist die Nullstelle der Tangentenfunktion t_a gerade $a-k$:

$$\begin{aligned} t_a(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) = c \cdot e^{\frac{a}{k}} + \frac{c}{k} \cdot e^{\frac{a}{k}} \cdot (x-a) = \frac{c}{k} \cdot e^{\frac{a}{k}} \cdot \big(k + x - a\big)\,, \\ t_a(x) &= 0 \iff k + x - a = 0 \iff x = a-k\,. \end{aligned}$$

Dies beweist die sich in Aufgabe 7 aufdrängende Vermutung.

S. 93, Aufgabe 5: Gesucht sind Tangenten, die parallel zu der gegebenen Geraden verlaufen, d. h. die dieselbe Steigung wie diese Gerade haben. Wir formen die Geradengleichung um:

$$2x - 3y + 7 = 0 \iff 3y = 2x + 7 \iff y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}\,.$$

Damit hat die Gerade die Steigung $m = \frac{2}{3}$ und gesucht sind die Stellen x mit $f'(x) = \frac{2}{3}$.
Für $f(x) = \ln x$ gilt: $f'(x) = \frac{1}{x}$. Also müssen wir die folgende Gleichung lösen:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \iff \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \iff x = \frac{3}{2}\,.$$

Nur an der Stelle $\frac{3}{2}$ hat der natürliche Logarithmus ln eine Tangente parallel zur gegebenen Geraden. Die Tangentengleichung lautet

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) = \ln\frac{3}{2} + \frac{2}{3}(x - \frac{3}{2}) = \frac{2}{3}x - 1 + \ln 3 - \ln 2\,.$$

S. 93, Aufgabe 7: Wir berechnen die Tangentenfunktion zur Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ an der Stelle $a = 0$: Nach der Kettenregel ist $f'(x) = \ln'(1+x) \cdot 1 = \frac{1}{1+x}$ und damit die Tangentenfunktion

$$t(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = \ln(1) + x = x\,.$$

Damit gilt für x nahe bei 0 (in „erster Näherung“)

$$\boxed{\ln(1+x) \approx x \text{ für } x \text{ nahe bei } 0.}$$

oder äquivalent:

$$\boxed{\ln(x) \approx x - 1 \text{ für } x \text{ nahe bei } 1.}$$

Also $\ln 1{,}05 \approx 0{,}05$, $\ln 0{,}99 \approx -0{,}01$ und $\ln(1 - \frac{p}{100}) \approx -\frac{p}{100}$.

4) **S. 94, Aufgabe 1):**

a) $f(x) = e^{x-4} + 3e^{-2x} + e^{1-x} - \dfrac{1}{2}e^{1-3x}$,

$f'(x) = e^{x-4} - 6e^{-2x} - e^{1-x} + \dfrac{3}{2}e^{1-3x}$,

$f''(x) = e^{x-4} + 12e^{-2x} + e^{1-x} - \dfrac{9}{2}e^{1-3x}$.

b) $f(x) = 5e^{-0{,}1x} + 0{,}25e^{4x+1} - 2e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x}$,

$f'(x) = -0{,}5e^{-0{,}1x} + e^{4x+1} + \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x}$,

$f''(x) = 0{,}05e^{-0{,}1x} + 4e^{4x+1} - \dfrac{1}{8}e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x}$.

c) $f(x) = (e^x - 1)^2 + (e^x + 1)^2 = 2e^{2x} + 2$, $\quad f'(x) = 4e^{2x}$, $\quad f''(x) = 8e^{2x}$.

d) $f(x) = (e^{-x} + 1)^2 + (e^{-x} - 1)^2 = 2e^{-2x} + 2$,
$f'(x) = -4e^{-2x}$, $\quad f''(x) = -8e^{-2x}$.

e) $f(x) = \left(\frac{e^{-x}+e^x}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{-2x}+2+e^{2x}}{4} + \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \frac{1}{2}\cdot(e^{2x} + e^{-2x})$,
$f'(x) = e^{2x} - e^{-2x}$, $\quad f''(x) = 2\cdot(e^{2x} + e^{-2x}) = 4\cdot f(x)$.

f) $f(x) = e^{x-4} - 4x$, $\quad f'(x) = e^{x-4} - 4$, $\quad f''(x) = e^{x-4}$.

g) $f(x) = e^{-x} + x - 1$, $\quad f'(x) = -e^{-x} + 1$, $\quad f''(x) = e^{-x}$.

h) $f(x) = e^{-x} - \dfrac{1}{3}x^2 + 0{,}3x$, $\quad f'(x) = -e^{-x} - \dfrac{2}{3}x + 0{,}3$, $\quad f''(x) = e^{-x} - \dfrac{2}{3}$.

i) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - 3e^{-x+1} + x^2$,

$f'(x) = \dfrac{3}{4}x^2 + 3e^{-x+1} + 2x$, $\quad f''(x) = \dfrac{3}{2}x - 3e^{-x+1} + 2$.

j) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{2x} + e^{-x} + 1}{e^x} = e^{2x} - e^x + e^{-2x} + e^{-x}$

$f'(x) = 2e^{2x} - e^x - 2e^{-2x} - e^{-x}$, $\quad f'(x) = 4e^{2x} - e^x + 4e^{-2x} + e^{-x}$.

S. 94, Aufgabe 2):

a) $f(x) = -4^x = -(e^{\ln 4})^x = -e^{x\ln 4}$,
$f'(x) = -\ln 4 \cdot e^{x\ln 4} = -\ln 4 \cdot 4^x$, $\quad f''(x) = -(\ln 4)^2 \cdot 4^x$.

b) $f(x) = 0{,}25^x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x = 4^{-x} = e^{-x\ln 4}$,

$f'(x) = -\ln 4 \cdot e^{-x\ln 4} = -\ln 4 \cdot 4^{-x}$, $\quad f''(x) = (\ln 4)^2 \cdot 4^{-x}$.

c) $f(x) = (\sqrt{2})^{2x} = (2^{\frac{1}{2}})^{2x} = 2^x$,
$f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$, $\quad f'(x) = (\ln 2)^2 \cdot 2^x$.

d) $f(x) = 2^{x+1} - 3^{2x-1} + \dfrac{1}{2}x^3 - 3$,

$$f'(x) = \ln 2 \cdot 2^{x+1} - 2\ln 3 \cdot 3^{2x-1} + \frac{3}{2}x^2,$$
$$f''(x) = (\ln 2)^2 \cdot 2^{x+1} - 4\ln 3 \cdot 3^{2x-1} + 3x.$$

S. 94, Aufgabe 3):

a) $f(x) = x \cdot e^x,$
$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x,$$
$$f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2) \cdot e^x.$$

b) $f(x) = x \cdot e^{-x},$
$$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (-x+1)e^{-x},$$
$$f''(x) = -e^{-x} + (-x+1)(-e^{-x}) = (x-2) \cdot e^{-x}.$$

c) $f(x) = (2-x) \cdot e^x,$
$$f'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x,$$
$$f''(x) = -e^x + (-x+1)e^x = -xe^x.$$

d) $f(x) = (x-3) \cdot e^{-x},$
$$f'(x) = e^{-x} + (x-3) \cdot (-e^{-x}) = (-x+4) \cdot e^{-x},$$
$$f''(x) = -e^{-x} + (-x+4)(-e^{-x}) = (x-5) \cdot e^{-x}.$$

e) $f(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot e^{-x},$
$$f'(x) = (2x-2)e^{-x} + (x^2 - 2x + 3) \cdot (-e^{-x}) = (-x^2 + 4x - 5) \cdot e^{-x},$$
$$f''(x) = (-2x+4)e^{-x} + (-x^2+4x-5)(-e^{-x}) = (x^2-6x+9)e^{-x} = (x-3)^2 e^{-x}.$$

f) $f(x) = (4-x^2)e^x + (x^2-4)e^{-x},$
$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x)e^x + (4-x^2)e^x + 2xe^{-x} + (x^2-4)(-e^{-x}) \\ &= (-x^2 - 2x + 4)e^x + (-x^2 + 2x + 4)e^{-x}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2x-2)e^x + (-x^2-2x+4)e^x + (-2x+2)e^{-x} + (-x^2+2x+4)(-e^{-x}) \\ &= (-x^2 - 4x + 2)e^x + (x^2 - 4x - 2)e^{-x}. \end{aligned}$$

S. 94, Aufgabe 6):

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x},$
$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(e^x(x-1) + e^x) \cdot x^2 - e^x(x-1) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{(e^x \cdot x) \cdot x - 2e^x(x-1)}{x^3} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}. \end{aligned}$$

Alternativ mit Produkt- statt Quotientenregel:

$f(x) = x^{-1}e^x,$
$$f'(x) = -x^{-2}e^x + x^{-1}e^x = x^{-2}e^x(-1+x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$
$$\begin{aligned} f''(x) &= +2x^{-3}e^x - x^{-2}e^x - x^{-2}e^x + x^{-1}e^x \\ &= x^{-3}e^x \cdot (2 - 2x + x^2) = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x}{x^3}. \end{aligned}$$

b) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1},$
$$f'(x) = \frac{(-e^{-x})(x+1) - e^{-x} \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{e^{-x}(-x-2)}{(x+1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{(-e^{-x}(-x-2) + e^{-x}\cdot(-1))(x+1)^2 - e^{-x}(-x-2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{e^{-x}(x+1)\cdot(x+1) - e^{-x}(-2x-4)}{(x+1)^3} = \frac{e^{-x}(x^2+4x+5)}{(x+1)^3}.$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1} = (e^x+1)^{-1}$,

$f'(x) = -(e^x+1)^{-2}\cdot e^x = \dfrac{-e^x}{(e^x+1)^2}$,

$f''(x) = 2(e^x+1)^{-3}e^x\cdot e^x - (e^x+1)^{-2}\cdot e^x$

$= e^x(e^x+1)^{-3}\cdot(2e^x-(e^x+1)) = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$.

d) $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$,

$f'(x) = \dfrac{e^x(e^x-1)-(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$,

$f''(x) = \dfrac{-2e^x(e^x-1)^2 + 2e^x\cdot 2(e^x-1)\cdot e^x}{(e^x-1)^4}$

$= \dfrac{-2e^x(e^x-1)+4e^{2x}}{(e^x-1)^3} = \dfrac{2e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3}$.

e) Erweitert man den gegebenen Funktionsterm mit e^x so erhält man

$f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \dfrac{1}{1+e^x}$.

Dieser Aufgabenteil stimmt also mit c) überein.

S. 94, Aufgabe 7):

a) $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1)$, $\quad f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$.

b) $f(x) = \ln(x^2) + \ln(\dfrac{1}{x}) - \ln(2x) = 2\ln x - \ln x - (\ln 2 + \ln x) = -\ln 2$,

$f'(x) = 0$.

c) $\ln(\sqrt{x}) - \ln\big(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\big) = \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{3}\ln x = \dfrac{5}{6}\ln x$, $\quad f'(x) = \dfrac{5}{6x}$.

d) $f(x) = x^2 - \ln x + 1$, $\quad f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$.

e) $f(x) = \ln(2x+1) - \ln(2x-1)$, $\quad f'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{2x-1} = \frac{-4}{(2x+1)(2x-1)}$.

f) $f(x) = x\ln x$, $\quad f'(x) = \ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = 1 + \ln x$.

g) $f(x) = x^2\ln x$, $\quad f'(x) = 2x\ln x + x^2\cdot\dfrac{1}{x} = x(1+2\ln x)$.

h) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} = x^{-1}\cdot\ln x$,

$f'(x) = -x^{-2}\cdot\ln x + x^{-1}\cdot\dfrac{1}{x} = x^{-2}\cdot(-\ln x + 1) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

i) $f(x) = (\ln x)^2 = \ln^2 x$, $\quad f'(x) = 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$.

j) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, $\quad f'(x) = \dfrac{\ln x - x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{\ln^2 x}$.

k) $f(x) = (x^2-4)\ln x$, $\quad f'(x) = 2x\ln x + (x^2-4)\cdot\dfrac{1}{x}$.

l) $f(x) = \ln\dfrac{3x}{x-1} = \ln 3x - \ln(x-1), \quad f'(x) = \dfrac{1}{3x}\cdot 3 - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}.$

m) $f(x) = \ln\dfrac{1}{x^2-4} = -\ln(x^2-4), \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2-4}\cdot 2x = \dfrac{-2x}{x^2-4}.$

n) $f(x) = \ln(x^2+1), \quad f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+1}.$

5) **S. 90, Aufgabe 4 d):** $f(x) = (x^2-1)e^x$.
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Wegen $e^x > 0$ sind die Nullstellen von f genau die Nullstellen von x^2-1, also ± 1, und es liegt in beiden Fällen ein Vorzeichenwechsel vor.
Grenzwerte: Der Grenzwert für $x \to \infty$ ist offenbar ∞, während zur Bestimmung des Grenzwertes für $x \to -\infty$ die aus der Regel von de l'Hospital gefolgerte Tatsache $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$ benötigt wird. Man erhält damit

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-1)e^x = \lim_{x\to\infty}((-x)^2-1)e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0\,.$$

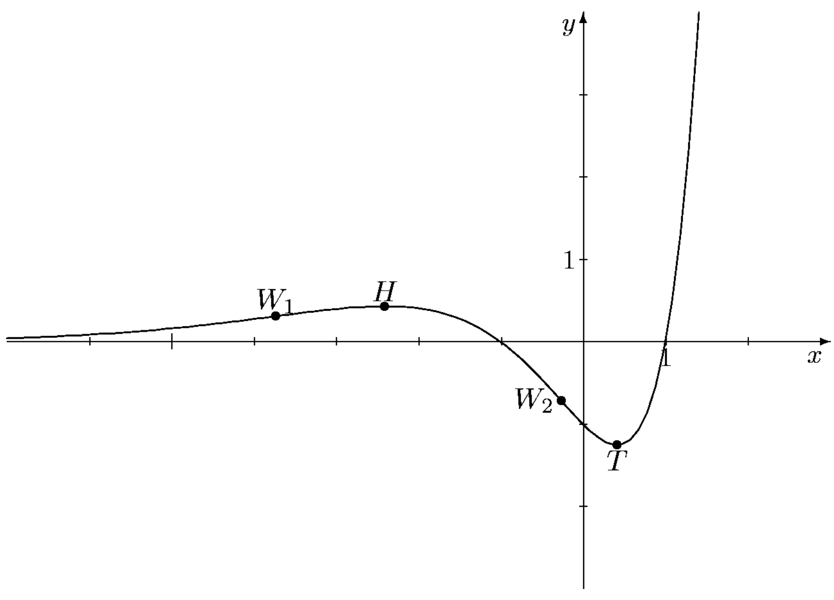
Ableitungen: Mit der Produktregel erhält man

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^x + (x^2-1)e^x = (x^2+2x-1)\cdot e^x\,, \\ f''(x) &= (2x+2)e^x + (x^2+2x-1)e^x = (x^2+4x+1)e^x\,. \end{aligned}$$

Extrem- und Wendestellen: Da $e^x > 0$ ist, sind die Nullstellen und Vorzeichenverteilung von f' und f'' durch die beiden quadratischen Terme gegeben:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff x^2+2x-1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}\,, \\ f''(x) = 0 &\iff x^2+4x+1 = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

In allen Fällen liegen Vorzeichenwechsel vor (quadratische Terme mit 2 verschiedenen Nullstellen!), so dass die Funktion f an den Stellen $-1 \pm \sqrt{2}$ Extrem- und an den Stellen $-2 \pm \sqrt{3}$ Wendestellen hat.
Wegen $f'(x) > 0 \iff x^2+2x-1 > 0$ ist f' schließlich monoton steigend, also hat f an der letzten Extremstelle $-1+\sqrt{2} \approx 0{,}41$ ein Minimum und bei $-1-\sqrt{2} \approx -2{,}41$ ein Maximum.



S. 90, Aufgabe 4 e): $f(x) = x^2 e^{-x}$.
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Es ist $f(x) = x^2 e^{-x} \geq 0$ und $f(x) = 0 \iff x = 0$. Damit ist 0 einzige Nullstelle von f, und zwar ohne Vorzeichenwechsel. Zugleich erkennt man, dass 0 Minimumstelle von f ist (s. u.).
Grenzwerte: Es ist

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} x^2 e^x = \infty\,.$$

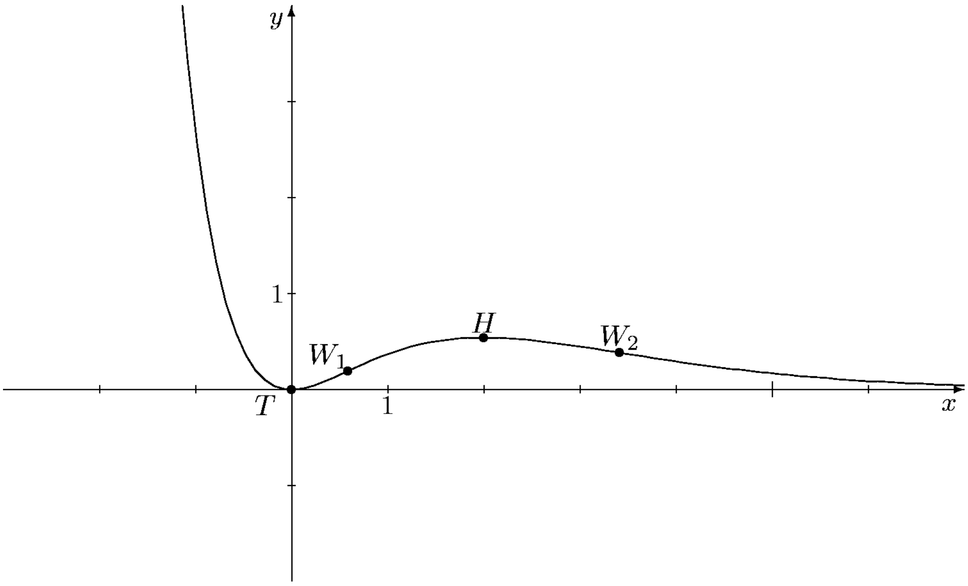
Ableitungen: Mit der Produktregel erhält man

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 e^{-x} \cdot (-1) = -(x^2 - 2x) \cdot e^{-x}\,,$$
$$f''(x) = -(2x-2)e^{-x} + (x^2 - 2x)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}\,.$$

Extrem- und Wendestellen: Wieder sind wegen $e^{-x} > 0$ die Nullstellen und Vorzeichenverteilung von f' und f'' durch die quadratischen Faktoren gegeben:

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = 2\,,$$
$$f''(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 2 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{2}\,.$$

In allen Fällen liegen Vorzeichenwechsel vor (quadratische Terme mit 2 verschiedenen Nullstellen), so dass 0 und 2 Extrem- und $2 \pm \sqrt{2}$ Wendestellen von f sind. Da 0 Minimumstelle von f ist, ist $+2$ Maximumstelle.



S. 90, Aufgabe 4 f): $f(x) = x(x-1)e^{-x}$.
Der Definitionsbereich ist wieder $\mathbb{R}$. Nullstellen sind 0 und 1, beide mit Vorzeichenwechsel. Das Vorzeichen von $f(x)$ ist gleich dem Vorzeichen von $x(x-1)$ (da e^{-x} immer positiv ist), also ist $f(x)$ schließlich positiv.
Die Grenzwerte im Unendlichen sind

$$\lim_{x\to\infty} x(x-1)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)}{e^x} = 0\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} x(x-1)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} (-x)(-x-1)e^x = \lim_{x\to\infty} x(x+1)e^x = \infty\,.$$

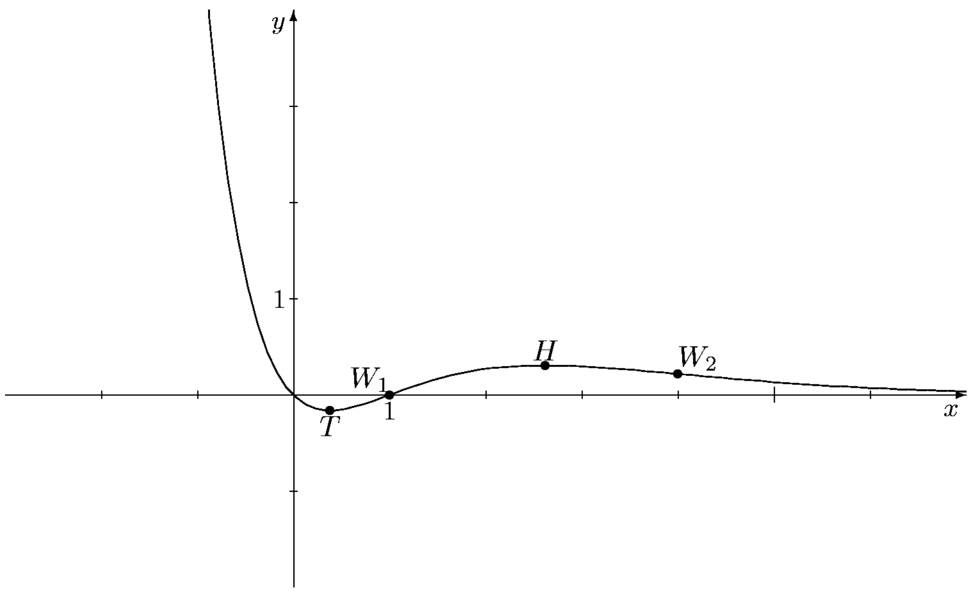
Die Ableitungen von $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$ sind:

$$f'(x) = (2x-1)e^{-x} + (x^2 - x)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = (-x^2+3x-1)e^{-x}\,,$$
$$f''(x) = (-2x+3)e^{-x} + (-x^2+3x-1)e^{-x}\cdot(-1) = (x^2-5x+4)e^{-x}\,.$$

Zur Bestimmung der Nullstellen von f' und f'' braucht man nur die quadratischen Faktoren zu untersuchen:

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 3x + 1 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}\,,$$
$$f''(x) = 0 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff (x-4)(x-1) = 0 \iff x = 1 \;\vee\; x = 4\,.$$

In allen Fällen liegen Vorzeichenwechsel vor, also sind $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ Extrem- und 1 sowie 4 Wendestellen von f.
Das Vorzeichen von $f'(x) = (-x^2+3x-1)e^{-x}$ ist gleich dem Vorzeichen des quadratischen Terms $-x^2+3x-1$, also schließlich negativ. Daher ist die letzte Extremstelle ein Maximum, die andere hingegen ein Minimum.



S. 90, Aufgabe 4 a): $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{1 + e^x}$.
Definitionsbereich: Wegen $e^x > 0$, also $1 + e^x > 1$ wird der Nenner niemals 0, so dass die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist: $\mathbb{D}(f) = \mathbb{R}$.
Nullstellen: Die Nullstellen der Funktion sind die Nullstellen des Zählers, also

$$f(x) = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2\,.$$

$\ln 2$ ist die einzige Nullstelle von f. Es liegt ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ vor, da e^x und folglich auch $e^x - 2$ monoton wachsen.
Grenzwerte: Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ folgt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 2}{1 + e^x} = \frac{0-2}{1+0} = -2\,.$$

Für $x \to \infty$ gilt $e^x \to \infty$. Um das Verhalten des Bruches zu studieren, klammern wir in Zähler und Nenner (den dominierenden Term) e^x aus:

$$f(x) = \frac{e^x(1 - \frac{2}{e^x})}{e^x(\frac{1}{e^x} + 1)} = \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ folgt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1-0}{0+1} = 1\,.$$

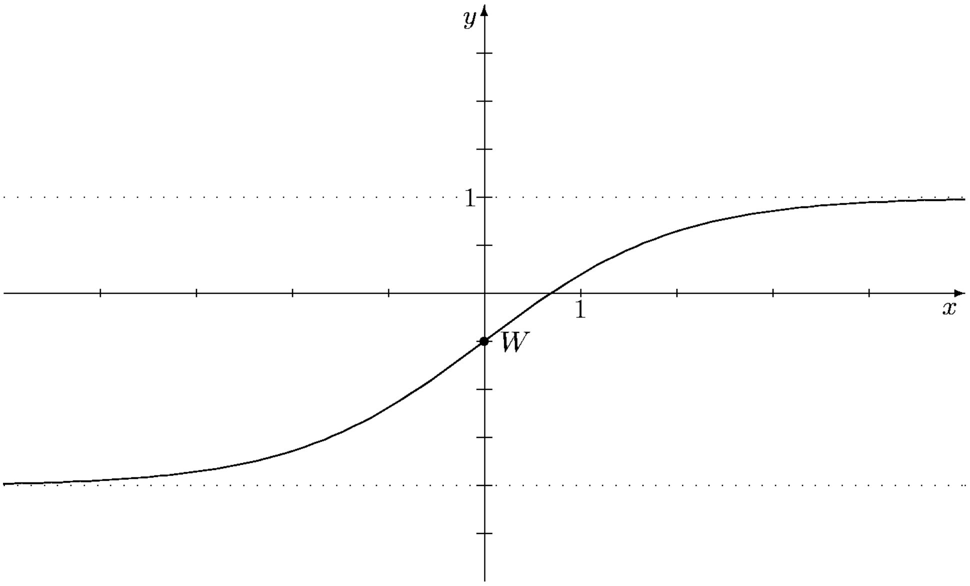
Ableitungen: Mit der Quotientenregel berechnen wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(1+e^x) - (e^x - 2)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{3e^x}{(1+e^x)^2} \\ f''(x) &= \frac{3e^x(1+e^x)^2 - 3e^x \cdot 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{3e^x(1+e^x) - 6e^{2x}}{(1+e^x)^3} \\ &= \frac{3e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} \end{aligned}$$

Extremstellen: Da e^x keine Nullstellen hat, hat auch f' keine Nullstellen, f also keine Extremstellen.
Wendestellen: Wegen $e^x \neq 0$ gilt:

$$f''(x) = 0 \iff 3e^x(1-e^x) = 0 \iff 1 - e^x = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0\,.$$

Bei $x = 0$ hat f eine Wendestelle, denn f'' ändert dort sein Vorzeichen: Da $e^x > 0$ ist, ist das Vorzeichen von f'' bestimmt durch $1-e^x$, und $1-e^x$ ist monoton fallend, ändert also an seiner Nullstelle das Vorzeichen (von $+$ zu $-$). f wechselt an der Stelle 0 also seine Krümmung von links- zu rechtsgekrümmt.



S. 90, Aufgabe 4 b): $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
Definitionsbereich: Es ist $e^x + e^{-x} > 0$, also hat der Nenner von f keine Nullstelle: f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
Symmetrie: Der Graph von f ist punktsymmetrisch, denn

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -f(x)\,.$$

Nullstellen: Es gilt

$$f(x) = 0 \iff e^x - e^{-x} = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff x = 0\,.$$

Einzige Nullstelle ist $x = 0$.
Grenzwerte: Wegen der Punktsymmetrie brauchen wir nur die Grenzwerte für $x \to \infty$ zu bestimmen. Aus den bekannten Grenzwerten $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} (e^x \pm e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty\,.$$

Zähler und Nenner von $f(x)$ konvergieren also gegen ∞. Um den Grenzwert des Quotienten berechnen zu können, klammern wir wieder (den dominierenden Term) e^x aus:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

und erhalten so

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

und wegen der Punktsymmetrie $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.
Ableitungen: Mit der Quotientenregel erhalten wir

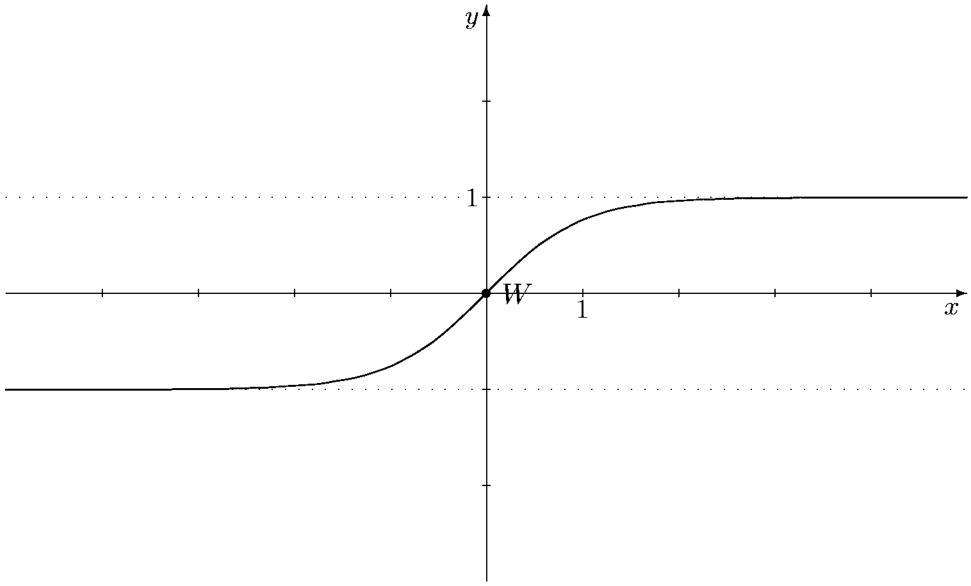
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - e^{-x}\cdot(-1))(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}\cdot(-1))}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}\,, \end{aligned}$$

und ausgehend von $f'(x) = 4\cdot(e^x + e^{-x})^{-2}$ mit der Produkt- und Kettenregel dann

$$f''(x) = -8(e^x + e^{-x})^{-3}\cdot(e^x - e^{-x}) = -\frac{8(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^{-3}}\,.$$

Extremstellen: f' hat keine Nullstellen, f also keine Extremstellen; genauer: f' ist immer positiv, f also monoton steigend. Dies zeigt zugleich, dass f an seiner Nullstelle $x = 0$ das Vorzeichen von $-$ zu $+$ wechselt.

Wendestellen: Da f und f'' bis auf den Faktor -8 denselben Zähler haben, hat auch f'' bei 0 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, 0 ist Wendestelle von f.



S. 90, Aufgabe 4c): $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^x}$.
Definitionsbereich: Wegen $1 + e^x > 0$ hat der Nenner keine Nullstellen, f ist also auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
Nullstellen: f hat keine Nullstellen, da der Zähler e^{-x} stets positiv ist.
Grenzwerte: Für $x \to \infty$ strebt der Zähler von f gegen 0 und der Nenner gegen ∞, der Bruch also gegen 0: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
Für $x \to -\infty$ strebt der Zähler gegen ∞ und der Nenner gegen 1, der Bruch also gegen ∞: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.
Hinweis: Indem man den Bruchterm für $f(x)$ mit e^x erweitert, erhält man die folgende etwas übersichtlichere Darstellung

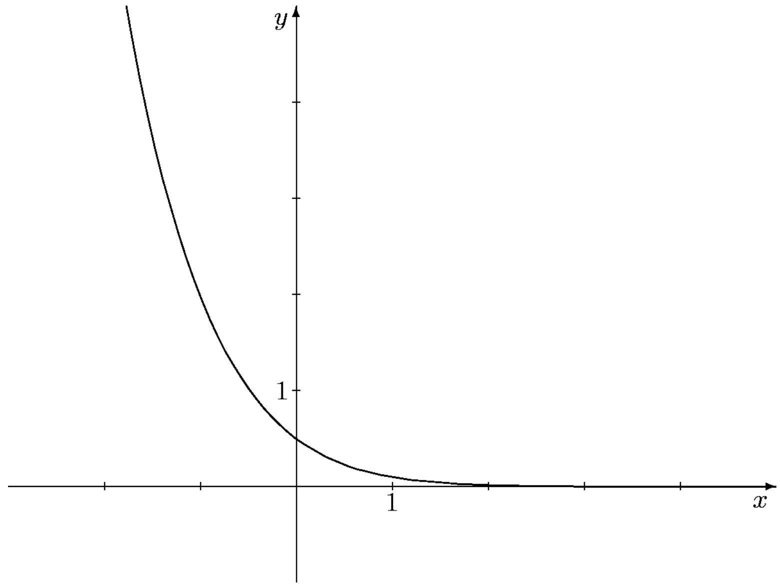
$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x} = \frac{1}{e^x(1+e^x)}\,.$$

Aus ihr entnimmt man unmittelbar, dass f keine Nullstellen hat und die Grenzwerte von f $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ sind.
Ableitungen: Mit der Quotientenregel berechnen wir (unbedingt kürzen!)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-e^{-x}(1+e^x) - e^{-x}e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^{-x}-2}{(1+e^x)^2}\,, \\ f''(x) &= \frac{e^{-x}(1+e^x)^2 + (e^{-x}+2)\cdot 2(1+e^x)\cdot e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^{-x}(1+e^x) + 2e^x(e^{-x}+2)}{(1+e^x)^3} \\ &= \frac{e^{-x}+3+4e^x}{(1+e^x)^3}\,. \end{aligned}$$

Extremstellen: Der Term für $f'(x)$ zeigt, dass f' nur negative Werte hat, f also monoton fällt. Insbesondere gibt es keine Extremstellen.

Wendestellen: Genauso erkennt man, dass f'' nur positive Werte hat, f also stets linksgekrümmt ist und insbesondere keine Wendestelle hat.

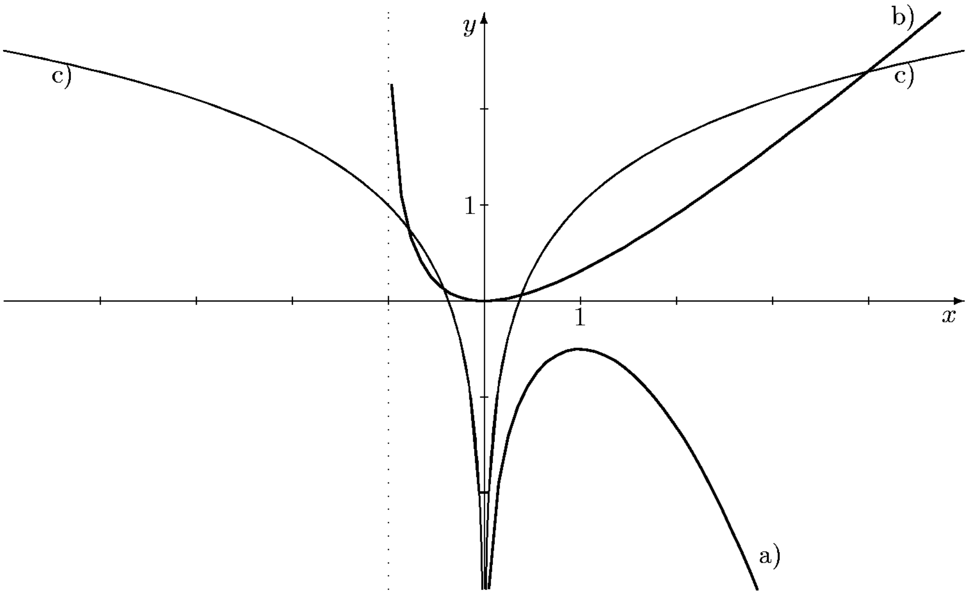


S. 93, Aufgabe 6: a) Da Logarithmen nur für positive Zahlen definiert sind, ist der Definitionsbereich $\mathbb{D}(f) =]0, \infty[$.
$f'(x) = \dfrac{1}{x} - x$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} - 1$.
Nullstellen von f':

$$\frac{1}{x} - x = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x = \pm 1\,.$$

Aber Achtung: Mit f ist auch f' nur auf $]0, \infty[$ definiert, -1 gehört also nicht zum Definitionsbereich von f'. Daher ist nur $+1$ Nullstelle von f'. Wegen $f''(1) = -2 < 0$ liegt ein Maximum vor. Der Wert des Maximums beträgt $f(1) = -\frac{1}{2}$.
Nullstellen von f'' gibt es nicht, also auch keine Wendestellen.
b) Definitionsbereich $\mathbb{D}(f) =]-1, \infty[$.
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$, $f''(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
f' hat einzige Nullstelle bei $x = 0$. $f''(0) = 1 > 0$, also liegt ein Minimum vor; der Wert des Minimums ist $f(0) = 0$.
f'' hat keine Nullstellen, f also keine Wendestellen.
c) Der Definitionsbereich $\mathbb{D}(f) = \{x \mid |x| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ zerfällt in zwei Teilintervalle $]-\infty, 0[$ und $]0, \infty[$. Man untersucht dann die Funktion auf den beiden Teilstücken getrennt. Wegen des Betrages in der Definitionsformel für $f(x)$ gilt $f(-x) = f(x)$, also ist der Graph von f symmetrisch zur y-Achse. Daher braucht man nur den Verlauf von f über $]0, \infty[$ zu studieren. Dort gilt $f(x) = 1 + \ln(x)$. Der Graph von f entsteht in diesem Bereich durch Verschiebung des bekannten Graphen von $\ln(x)$ um 1 nach oben.

Skizzen:



6) **S. 95, Aufgabe 12 a):** Funktionsuntersuchung $f(x) = e^{2x-1} - e^{x+1}$.
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen:

$$f(x) = 0 \iff e^{2x-1} = e^{x+1} \iff 2x - 1 = x + 1 \iff x = 2\,.$$

Um gleichzeitig auch einen evtl. Vorzeichenwechsel erkennen zu können, benutzt man am besten die folgende faktorisierte Form von $f(x)$:

$$f(x) = e^{x+1}(e^{x-2} - 1) = 0 \iff e^{x-2} = 1 \iff x - 2 = 0\,.$$

Da der Faktor e^{x+1} stets positiv ist und $e^{x-2} - 1$ monoton steigt, muss f an seiner Nullstelle das Vorzeichen wechseln, und zwar von $-$ zu $+$. (Diese Faktorisierung wird auch im Folgenden nützlich sein.)
Grenzwerte: Für $x \to \infty$ streben e^{2x-1} und e^{x+1} gegen ∞, es ist dann aber nicht klar, wohin die Differenz $e^{2x-1} - e^{x+1}$ konvergiert. Um das zu erkennen, benutzen wir wieder die obige Faktorisierung und erhalten für $x \to \infty$:

$$f(x) = \underbrace{e^{x+1}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{(\underbrace{e^{x-2}}_{\to\infty} - 1)}_{\to\infty} \to \infty\,.$$

Der Grenzwert für $x \to -\infty$ ergibt sich einfacher:

$$f(x) = \underbrace{e^{2x-1}}_{\to 0} - \underbrace{e^{x+1}}_{\to 0} \to 0 \quad \text{für } x \to -\infty\,.$$

Ableitungen:
$f'(x) = 2e^{2x-1} - e^{x+1} = e^{x+1} \cdot (2e^{x-2} - 1)$,
$f''(x) = 4e^{2x-1} - e^{x+1} = e^{x+1} \cdot (4e^{x-2} - 1)$.

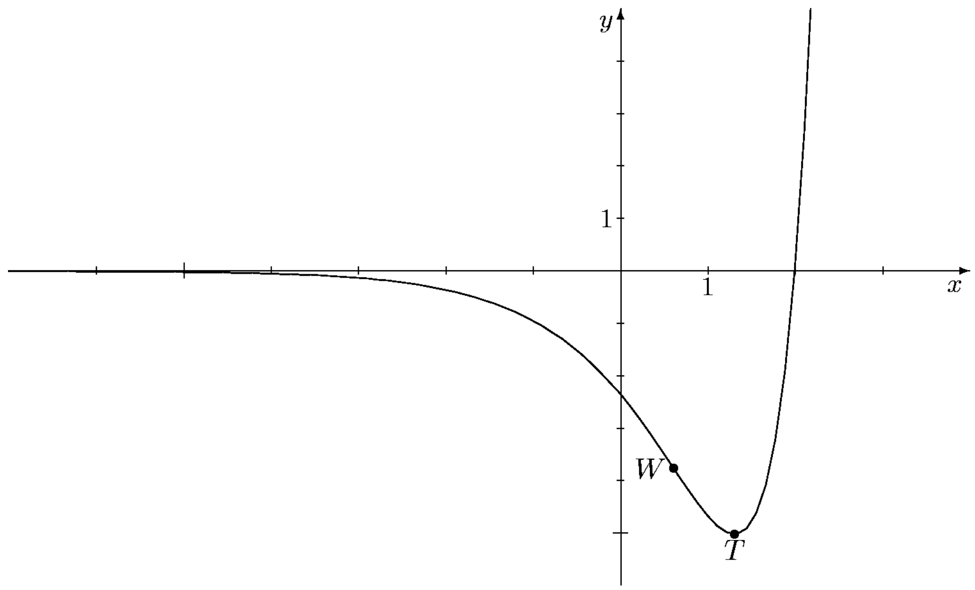
Als Nullstellen der Ableitungen findet man

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 2e^{x-2} = 1 \iff e^{x-2} = \frac{1}{2} \\ &\iff x - 2 = -\ln 2 \iff x = 2 - \ln 2 \approx 1{,}31\,, \\ f''(x) = 0 &\iff 4e^{x-2} = 1 \iff x - 2 = -\ln 4 \iff x = 2 - \ln 4 \approx 0{,}61 \end{aligned}$$

In beiden Fällen liegt ein Vorzeichenwechsel vor, denn der Faktor $2e^{x-2} - 1$ bzw. $4e^{x-2} - 1$ ist monoton wachsend; es findet also jeweils ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ statt. Die Extremstelle $2 - \ln 2$ ist somit eine Minimumstelle. Der Berechnung der y-Koordinaten von Tief- und Wendepunkt sind gute Übungen zum Rechnen mit Logarithmen und Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} f(2 - \ln 2) &= e^{3-2\ln 2} - e^{3-\ln 2} = \frac{e^3}{(e^{\ln 2})^2} - \frac{e^3}{e^{\ln 2}} = e^3 \cdot (\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}) = -\frac{e^3}{4}\,, \\ f(2 - \ln 4) &= e^{3-2\ln 4} - e^{3-\ln 4} = \frac{e^3}{(e^{\ln 4})^2} - \frac{e^3}{e^{\ln 4}} = e^3 \cdot (\frac{1}{4^2} - \frac{1}{4}) = -\frac{3e^3}{16}\,, \end{aligned}$$

Damit ist $T = (2-\ln 2\,,\, -\frac{e^3}{4}) \approx (1{,}31\,;\, -5{,}02)$ der Tief- und $W = (2-\ln 4\,,\, -\frac{3e^3}{16}) \approx (0{,}61\,;\, -3{,}77)$ der Wendepunkt von f.



S. 95, Aufgabe 12 b): Funktionsuntersuchung $f(x) = e^x - x - 1$.
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Bei der Aufstellung einer Wertetafel oder genauem Hinsehen erkennt man, dass $x = 0$ eine Nullstelle von f ist: $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. Die weitere Funktionsuntersuchung wird zeigen, dass 0 die einzige Nullstelle ist und dort kein Vorzeichenwechsel vorliegt. [Eine algebraische Lösung der Nullstellengleichung $e^x = x + 1$ etwa durch Logarithmieren ist nicht möglich, da die Unbekannte nicht nur im Exponenten, sondern auch als Basis auftritt. Solche Gleichungen sind nur bei Vorliegen zusätzlicher Besonderheiten exakt lösbar, ansonsten müssen Näherungsverfahren wie etwa das Newton-Verfahren angewandt werden.]

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty}(e^x - x - 1) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{e^x}_{\to\infty} \cdot \Big(1 - \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\to 0}\Big) = \infty\,,$$

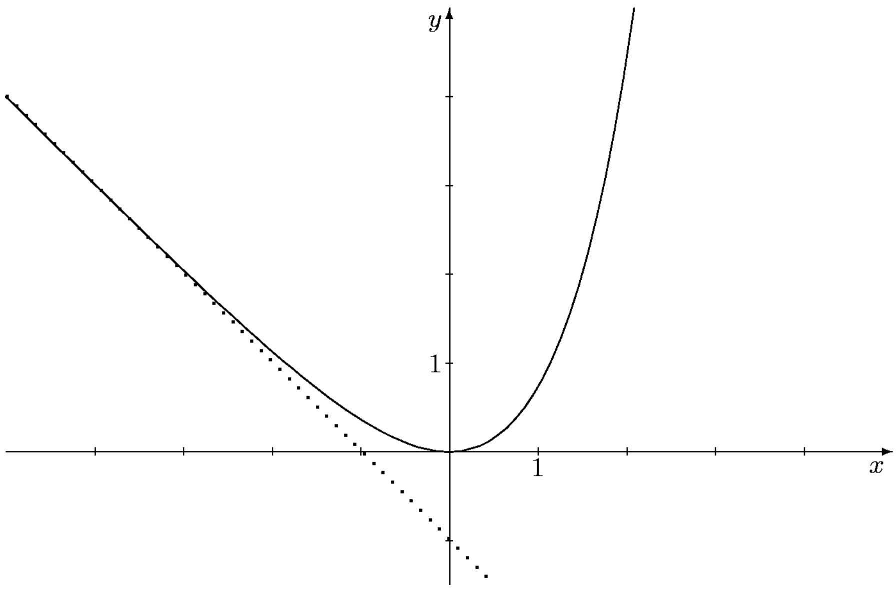
$$\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{e^x}_{\to 0} - x - 1) = +\infty\,.$$

Die letzte Berechnung zeigt zugleich, dass sich $f(x)$ beim Grenzübergang $x \to -\infty$ immer weniger von $a(x) = -x - 1$ unterscheidet:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - a(x)) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\,.$$

Der Graph von a ist eine Asymptote für f beim Grenzübergang $x \to -\infty$.

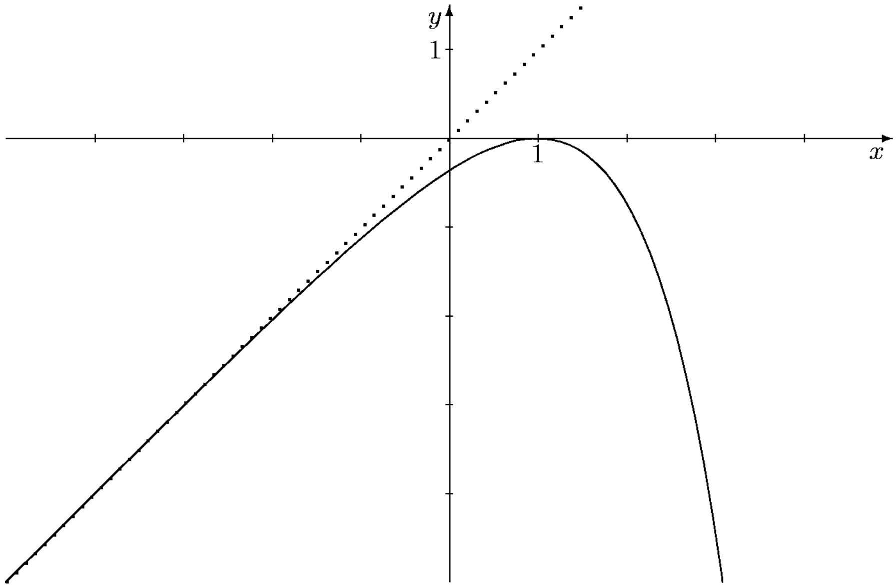
Ableitungen: $f'(x) = e^x - 1$, $\quad f''(x) = e^x$. Damit ist f'' stets positiv, der Graph von f also linksgekrümmt. Die einzige Nullstelle von f' ist $x = 0$: $f(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$. Wegen der Linkskrümmung hat f bei 0 ein Minimum. Dies zeigt zugleich die obigen Behauptungen über die Nullstellen von f.



S. 95, Aufgabe 12 c): Funktionsuntersuchung $f(x) = x - e^{x-1}$.

Diese Aufgabe lässt sich auf Teil b) zurückführen, denn ersetzt man in der hier gegebenen Funktion x durch $x+1$, so erhält man $f(x+1) = x + 1 - e^{x+1-1} = -(e^x - x - 1)$, und dies ist genau das Negative der in b) gegebenen Funktion. Dies bedeutet, dass der hier gesuchte Graph von f aus dem in b) bestimmten Graphen durch Verschiebung um 1 nach rechts und Spiegelung an der x-Achse entsteht. Alle Ergebnisse von b) lassen sich dann unmittelbar hierauf übertragen.

Skizze:



Hier nun eine Funktionsuntersuchung nach üblichem Muster, z. B. weil man diesen Zusammenhang nicht gesehen hat oder weil man nicht zuvor b) behandelt hat oder auch nur zur Übung:
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Eine Nullstelle von f ist bei $x = 1$ zu finden. Ob es weitere gibt, entscheiden wir aufgrund der nachfolgenden Funktionsuntersuchung, insbesondere der Monotonie.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{x}_{\to-\infty} - \underbrace{e^{x-1}}_{\to 0}) = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to\infty}(x - e^{x-1}) = \lim_{x\to\infty}\underbrace{e^{x-1}}_{\to\infty}\cdot\underbrace{(\underbrace{\frac{x}{e^{x-1}}}_{\to 0} -1)}_{\to -1} = -\infty\,.$$

Die erste Grenzwertberechnung zeigt, das durch $a(x) = x$ eine Asymptote von f für $x \to -\infty$ gegeben ist: $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - a(x)) = \lim_{x\to-\infty}(-e^{x-1}) = 0$. Der Graph von f schmiegt sich für $x \to -\infty$ dem Graphen von a an.
Ableitungen:
$f(x) = x - e^{x-1}$, $f'(x) = 1 - e^{x-1}$, $f''(x) = -e^{x-1}$.
Man erkennt, dass f'' nur negative Werte hat, f also rechtsgekrümmt ist. f' hat nur eine Nullstelle:

$$f'(x) = 0 \iff e^{x-1} = 1 \iff x - 1 = \ln 1 = 0 \iff x = 1\,.$$

Da f rechtsgekrümmt ist, hat f bei 1 ein Maximum. Dies ist zugleich die Nullstelle von f. Also kann f keine weiteren Nullstellen haben; alle anderen Werte von f sind negativ. (Skizze siehe oben.)
S. 95, Aufgabe 12 d): Funktionsuntersuchung $f(x) = 2 + 3x - 2^{x+1}$.
Definitionsbereich ist wieder ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Die Nullstellengleichung $2 + 3x = 2^{x+1}$ ist algebraisch nicht angreifbar,

da die Unbekannte x zugleich im Exponenten und in der Basis auftritt. Man findet in einer einfachen Wertetabelle aber, dass $x = 0$ und $x = 2$ Nullstellen von f sind. Dass es keine weiteren Nullstellen geben kann, zeigt die nachfolgende Funktionsuntersuchung.

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{2+3x}_{\to-\infty}-\underbrace{2^{x+1}}_{\to 0}) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to\infty}\underbrace{2^{x+1}}_{\to\infty}\cdot(\underbrace{\frac{2+3x}{2^{x+1}}}_{\to 0}-1) = -\infty\,.$$

Die Berechnung des ersten Grenzwertes zeigt zugleich, dass durch $a(x) = 2 + 3x$ eine Asymptote von f für $x \to -\infty$ gegeben ist.

Ableitungen: Wir stellen f durch die e-Funktion dar:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2+3x-2^{x+1} = 2+3x-(e^{\ln 2})^{x+1} = 2+3x-e^{\ln 2\cdot(x+1)}\,,\\ f'(x) &= 3-e^{\ln 2\cdot(x+1)}\cdot\ln 2 = 3-2^{x+1}\cdot\ln 2\,,\\ f''(x) &= -2^{x+1}\cdot\ln^2 2\,. \end{aligned}$$

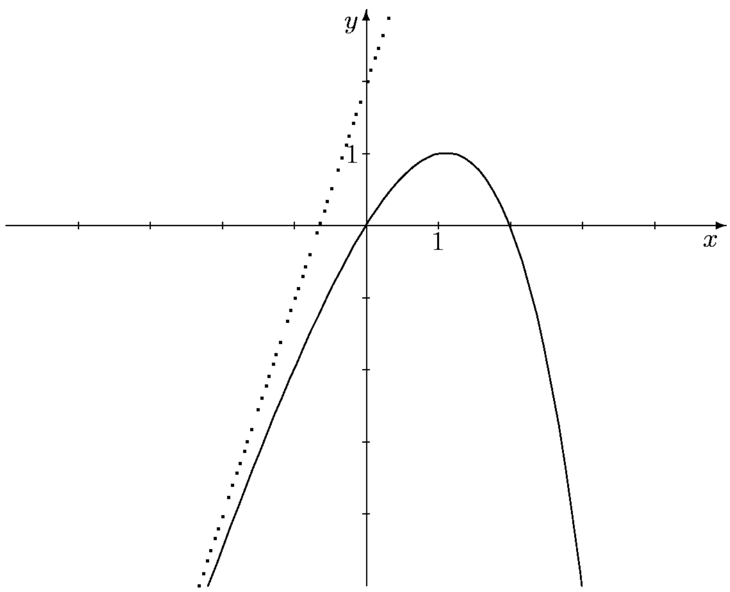
f'' hat nur negative Werte, also ist f stets rechtsgekrümmt. Wir bestimmen die Nullstellen von f':

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \iff \frac{3}{\ln 2} = e^{\ln 2\cdot(x+1)} &\iff \ln 3-\ln(\ln 2) = \ln 2\cdot(x+1)\\ &\iff x = \frac{\ln 3-\ln(\ln 2)}{\ln 2}-1 \approx 1{,}11\,. \end{aligned}$$

Wegen der Rechtskrümmung hat f an dieser Stelle ein Maximum. Da dieses Maximum das einzige Extremum von f ist, ist f vor dem Maximum monoton wachsend und dahinter monoton fallend, kann also nur 2 Nullstellen besitzen: Außer den beiden bereits angegebenen Nullstellen gibt es somit keine weiteren. Zur Kontrolle: Der maximale Funktionswert von f ist positiv:

$$f(\frac{\ln 3-\ln(\ln 2)}{\ln 2}-1) \approx 1{,}01\,.$$

Skizze:



S. 95, Aufgabe 12 e): Funktionsuntersuchung $f(x) = \dfrac{e^{3x}-1}{10e^x}$.

Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$, da der Nenner nie 0 wird.

Nullstellen: $f(x) = 0 \iff e^{3x} = 1 \iff x = 0$. Es liegt ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ vor, da e^{3x} und also auch $e^{3x}-1$ monoton wächst.

Grenzwerte: $f(x) = \dfrac{1}{10} \cdot (e^{2x} - e^{-x})$. Also

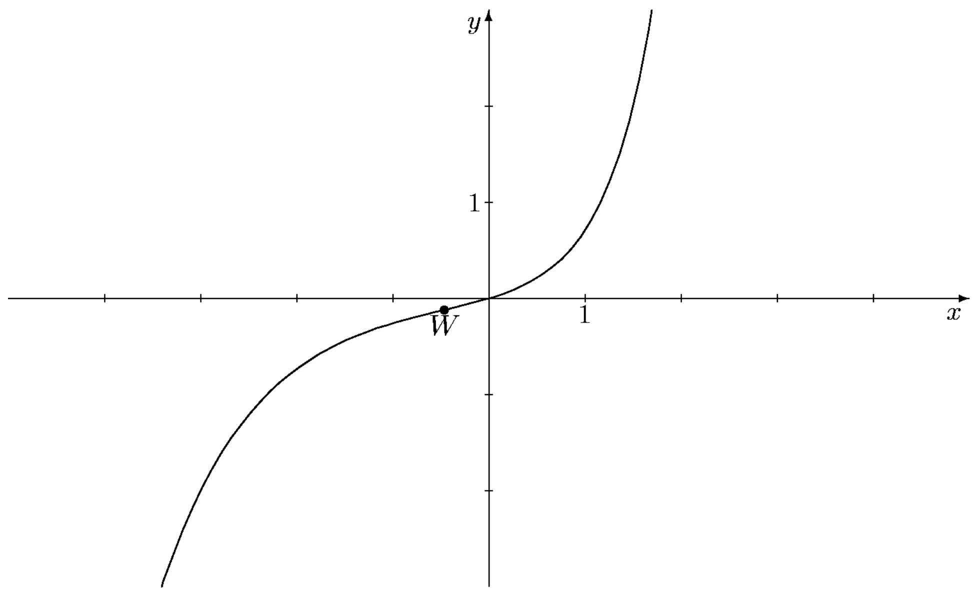
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{10} \cdot (\underbrace{e^{2x}}_{\to\infty} - \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}) = \infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{10} \cdot (\underbrace{e^{2x}}_{\to 0} - \underbrace{e^{-x}}_{\to\infty}) = -\infty\,.$$

Ableitungen: $f'(x) = \dfrac{1}{10} \cdot (2e^{2x} + e^{-x})$, $f''(x) = \dfrac{1}{10} \cdot (4e^{2x} - e^{-x})$. Offenbar nimmt f' nur positive Werte an: f ist monoton steigend.

$$f''(x) = 0 \iff \frac{1}{10e^x} \cdot (4e^{3x} - 1) = 0 \iff e^{3x} = \frac{1}{4} \iff 3x = -\ln 4$$
$$\iff x = -\frac{1}{3} \cdot \ln 4 = -\frac{2}{3} \cdot \ln 2 \approx -0{,}46\,.$$

Damit hat f'' nur eine Nullstelle; es liegt ein Vorzeichenwechsel vor, da $4e^{3x}$ monoton wächst. Also hat f an dieser Stelle einen Wendepunkt.

Skizze:



S. 95, Aufgabe 12 f): Funktionsuntersuchung $f(x) = 2^x - 0{,}5x^2 - 2$.

Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.

Nullstellen: Eine algebraische Lösung der Nullstellengleichung ist nicht möglich, aber man findet $x = 2$ als eine erste Nullstelle. Ob es weitere gibt, entscheiden wir nach der Funktionsuntersuchung.

Grenzwerte: Es ist $f(x) = 2^x \cdot (1 - \dfrac{x^2}{2 \cdot 2^x} - \dfrac{2}{2^x}) = 2^x \cdot (1 - \dfrac{x^2}{2^{x+1}} - \dfrac{1}{2^{x-1}})$, also:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{2^x}_{\to\infty} \cdot (1 - \underbrace{\frac{x^2}{2^{x+1}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{2^{x-1}}}_{\to 0}) = \infty\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\underbrace{2^x}_{\to 0} - \underbrace{0{,}5 \cdot x^2}_{\to\infty} - 2) = -\infty\,.$$

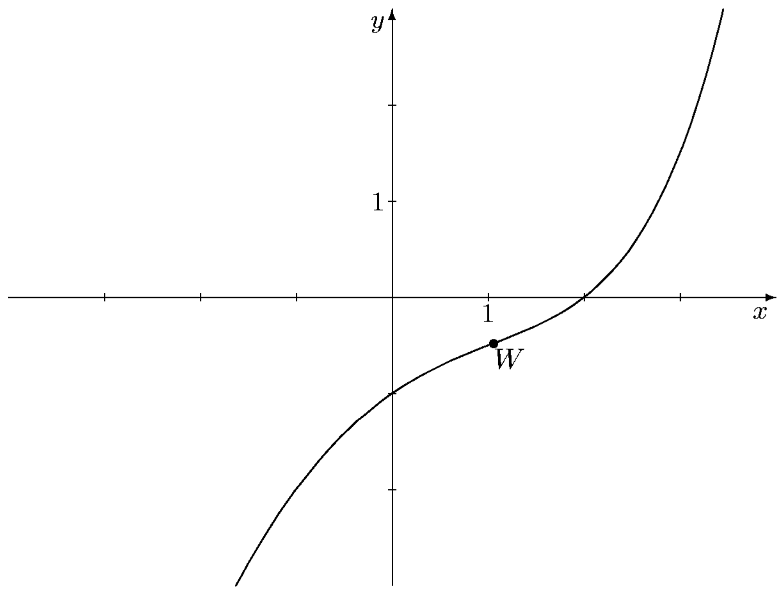
Ableitungen: $f(x) = 2^x - \frac{x^2}{2} - 2 = e^{x\ln 2} - \frac{x^2}{2} - 2$, $f'(x) = e^{x\ln 2} \cdot \ln 2 - x = 2^x \cdot \ln 2 - x$, $f''(x) = 2^x \cdot \ln^2 2 - 1$. Wir untersuchen auf Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
f''(x) = 0 \iff 2^x = \frac{1}{\ln^2 2} &\iff x\ln 2 = -\ln(\ln^2 2) = -2\ln(\ln 2)) \\
&\iff x = -\frac{2\ln(\ln 2)}{\ln 2} \approx 1{,}06\,.
\end{aligned}
$$

f'' wechselt an dieser Stelle sein Vorzeichen von $-$ zu $+$ ($2^x \cdot \ln^2 2$ wächst monoton), also liegt hier eine Wendestelle von f. Diese ist zugleich eine Extremstelle von f' (!), und zwar eine Minimalstelle (da f' vorher fällt und hinterher steigt). Also sind alle Werte von f' größer oder gleich dem Wert von f' an dieser Minimalstelle

$$
\begin{aligned}
f'\left(-\frac{2\ln(\ln(2)}{\ln 2}\right) &= \ln 2 \cdot e^{-2\ln(\ln 2)} + \frac{2\ln(\ln 2)}{\ln 2} = \frac{\ln 2}{\ln^2 2} + \frac{2\ln(\ln 2)}{\ln 2} \\
&= \frac{1}{\ln 2} + \frac{2\ln(\ln 2)}{\ln 2} \approx 0{,}39 > 0\,.
\end{aligned}
$$

Alle Werte von f' sind folglich positiv und f ist monoton wachsend. Damit kann f nur die bereits oben gefundene Nullstelle $x = 2$ haben.
Skizze:



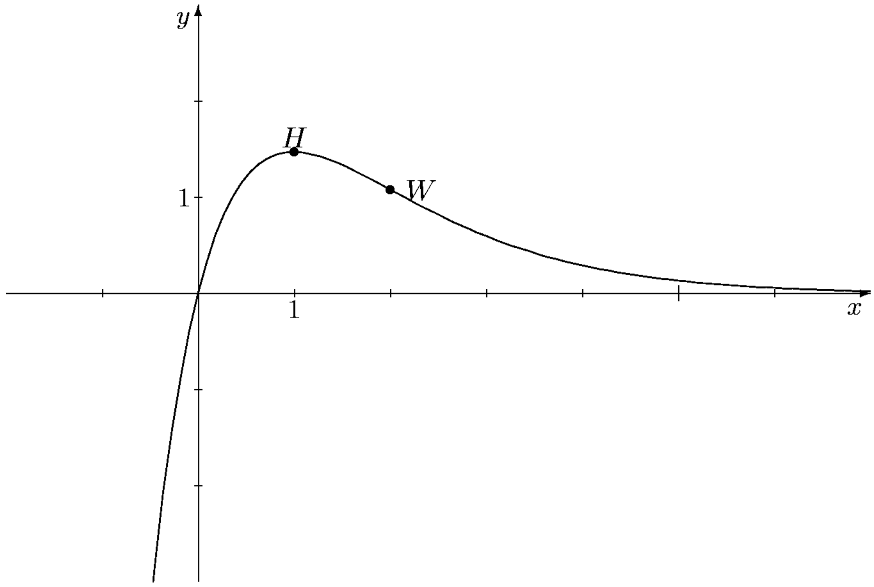
S. 95, Aufgabe 13 a): Funktionsuntersuchung $f(x) = 4xe^{-x}$.
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Die einzige Nullstelle ist 0, mit Vorzeichenwechsel.
Grenzwerte:

$$
\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{e^x} = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} 4xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} (-\underbrace{4x}_{\to\infty}\underbrace{e^x}_{\to\infty}) = -\infty\,.
$$

Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4 \cdot e^{-x} + 4x \cdot (-e^{-x}) = 4(1-x)e^{-x}\,, \\
f''(x) &= 4 \cdot \big((-1) \cdot e^{-x} + (1-x) \cdot (-e^{-x})\big) = 4(x-2)e^{-x}\,.
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen sind unmittelbar ablesbar: f' hat nur die Nullstelle 1, mit Vorzeichenwechsel von + zu −, also ist 1 eine Maximalstelle von f. f'' hat nur die Nullstelle 2, mit Vorzeichenwechsel, also eine Wendestelle von f. Der Hochpunkt ist $H = (1, f(1)) = (1, \frac{4}{e}) \approx (1; 1{,}47)$, der Wendepunkt ist $W = (2, f(2)) = (2, \frac{8}{e^2}) \approx (2; 1{,}08)$.



S. 95, Aufgabe 13 b): Funktionsuntersuchung $f(x) = x^2 e^x$.
Siehe S. 90, Aufgabe 4 e): Dort wurde die Funktion $x^2 e^{-x}$ untersucht. Die Graphen sind spiegelbildlich zueinander bzgl. der y-Achse.

S. 95, Aufgabe 13 c): Funktionsuntersuchung $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.
Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen sind −1 und −2, denn $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ (Vieta!). An beiden Stellen wechselt f sein Vorzeichen.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 + 3x + 2)e^{-x} = 0 \text{ (l'Hospital)}, \qquad \lim_{x\to-\infty}(x^2 + 3x + 2)e^{-x} = \infty\,.$$

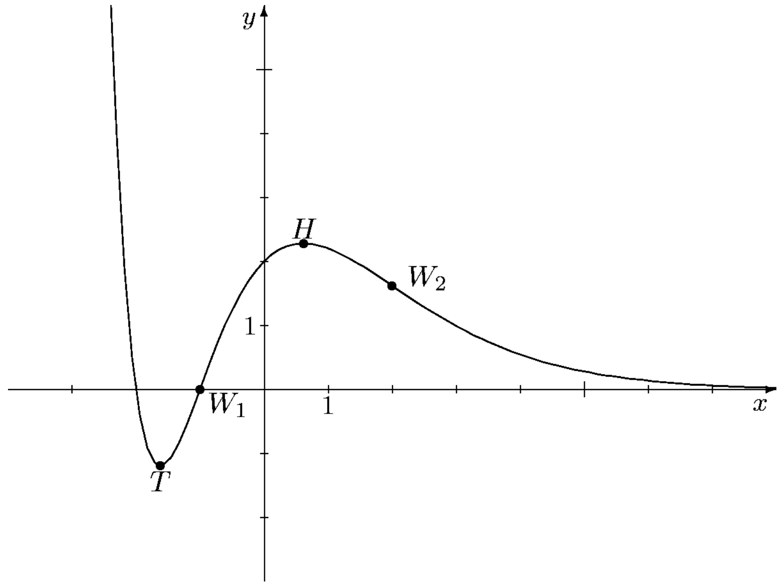
Ableitungen und deren Nullstellen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x + 2)(-e^{-x}) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}\,, \\ f''(x) &= (-2x - 1)e^{-x} + (-x^2 - x + 1)(-e^{-x}) = (x^2 - x - 2)e^{-x}\,, \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\,,$$

$$f''(x) = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x + 1)(x - 2) = 0 \iff x = -1 \ \vee \ x = 2\,.$$

An allen Nullstellen liegt ein Vorzeichenwechsel der jeweiligen Funktion vor, also sind −1 und 2 Wendestellen von f und $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ Extremstellen von f. Das Vorzeichen von f' ist das Vorzeichen von $-x^2 - x + 1$ ($e^{-x} > 0$!), also ist f' schließlich negativ, f schließlich fallend und die größte Extremstelle eine Maximalstelle, die andere eine Minimalstelle. Damit liegt ein Hochpunkt bei $H \approx (0{,}62; 2{,}28)$ und ein Tiefpunkt bei $T = (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, f(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})) \approx (-1{,}62; -1{,}19)$. Schließlich sind die Wendepunkte $W_1 = (-1; 0)$ und $W_2 = (2, \frac{12}{e^2}) \approx (2; 1{,}62)$.



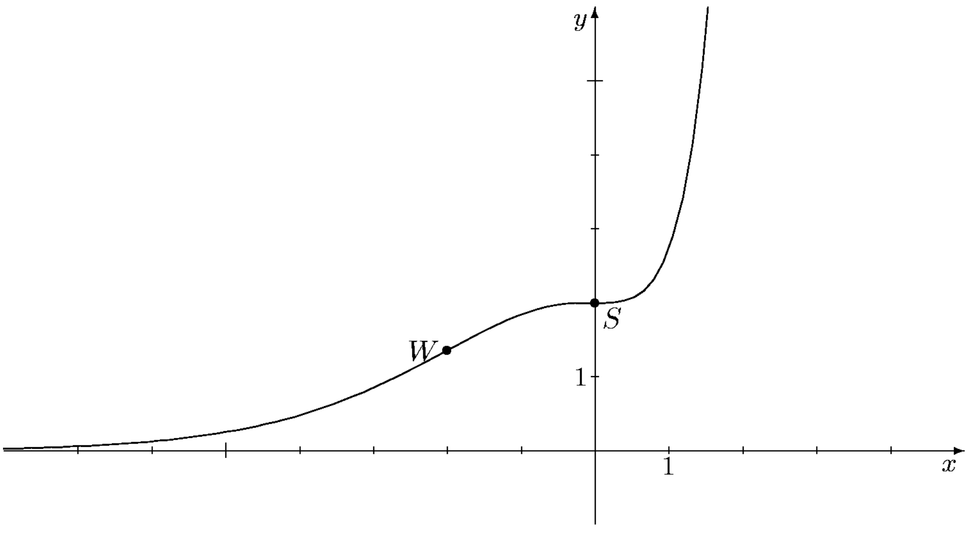
S. 95, Aufgabe 13 d): Funktionsuntersuchung $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$.
Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen existieren nicht, da die quadratische Gleichung $x^2 - 2x + 2 = 0$ keine Lösungen hat.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - 2x + 2)e^x = \infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty}(x^2 - 2x + 2)e^x = 0 \text{ (l'Hospital)}\,.$$

Ableitungen:

$$f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = x^2e^x\,,$$
$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x\,.$$

f' hat nur eine Nullstelle, bei 0, ohne Vorzeichenwechsel; f hat also keine Extremstellen, aber eine Sattelstelle bei 0.
f'' hat die beiden Nullstellen 0 und -2, beide mit Vorzeichenwechsel, also neben der Sattelstelle 0 eine weitere Wendestelle bei -2.



S. 95, Aufgabe 13 e): Funktionsuntersuchung $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{e^x}$.

Siehe S. 90, Aufgabe 4 d): Dort wurde die Funktion $(x^2 - 1)e^x$ untersucht. Die Graphen sind spiegelbildlich zueinander bzgl. der y-Achse.

S. 95, Aufgabe 13 f): Funktionsuntersuchung $f(x) = (x^3 - 4)e^x$.

Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.

Nullstellen: f hat nur eine Nullstelle: $\sqrt[3]{4}$, mit Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$.

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - 4)e^x = \infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty}(x^3 - 4)e^x = 0 \quad \text{(l'Hospital)}.$$

Ableitungen:

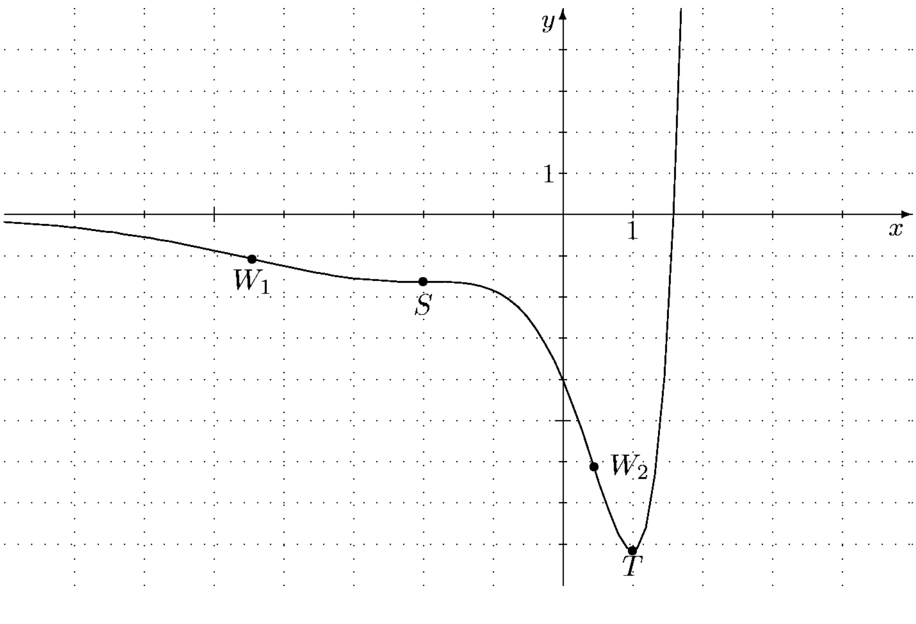
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2e^x + (x^3 - 4)e^x = (x^3 + 3x^2 - 4)e^x\,, \\ f''(x) &= (3x^2 + 6x)e^x + (x^3 + 3x^2 - 4)e^x = (x^3 + 6x^2 + 6x - 4)e^x\,. \end{aligned}$$

Zur Nullstellenberechnung von f' und f'' muss man kubische Gleichungen lösen.

Nullstellen von f': $+1$ ist Lösung von $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$. Polynomdivision ergibt: $x^3+3x^2-4 = (x-1)(x^2+4x+4) = (x-1)(x+2)^2$. Damit hat f' die Nullstellen $+1$ mit Vorzeichenwechsel, und -2 ohne Vorzeichenwechsel. Damit ist $+1$ eine Extrem- und -2 eine Sattelstelle von f.

Nullstellen von f'': Als Sattelstelle ist -2 auch Wendestelle, also Nullstelle von f'', d. h. von x^3+6x^2+6x-4. Polynomdivision durch $x+2$ ergibt: $x^3+6x^2+6x-4 = (x+2)(x^2+4x-2)$. Nullstellen von x^2+4x-2 sind $x = -2 \pm \sqrt{6}$. Damit hat f'' neben -2 noch zwei weitere Nullstellen $-2 \pm \sqrt{6}$, beide mit Vorzeichenwechsel, also Wendestellen von f.

Wir erhalten den Tiefpunkt $T = (1, f(1)) = (1, -3e) \approx (1; -8{,}15)$, den Sattelpunkt $S = (-2, f(-2)) = (-2, -\frac{12}{e^2}) \approx (-2; -1{,}62)$ und die beiden weiteren Wendepunkte $W_1 = (-2-\sqrt{6}, f(-2-\sqrt{6})) \approx (-4{,}45; -1{,}08)$, $W_2 = (-2+\sqrt{6}, f(-2+\sqrt{6})) \approx (0{,}45; -6{,}13)$.



S. 95, Aufgabe 14 a): Funktionsuntersuchung $f(x) = \ln x - x$.
Definitionsbereich ist der Bereich der positiven reellen Zahlen: $\mathbb{D}(f) =]0, \infty[$, da ln nur für positive Zahlen definiert ist.
Nullstellen sind algebraisch nicht bestimmbar, da die Unbekannte x sowohl unter dem Logarithmus wie außerhalb auftritt. Wir untersuchen zunächst den Verlauf des Graphen und kommen dann auf die Nullstellen zurück.
Grenzwerte:

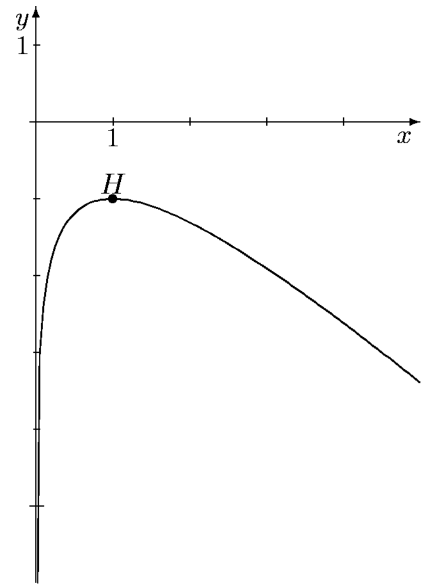
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \cdot (\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} - 1) = -\infty \quad \text{(l'Hospital)},$$

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} (\underbrace{\ln x}_{\to -\infty} - x) = -\infty .$$

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 , \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} .$$

Damit hat f'' nur negative Werte, f ist also stets rechtsgekrümmt.
Einzige Nullstelle von f' ist 1. Wegen der Rechtskrümmung von f ist 1 eine Maximalstelle von f: $T = (1, f(1)) = (1, -1)$. Da dies die einzige Extremstelle von f ist, ist -1 der größte Wert, den f annimmt: f hat nur negative Werte, insbesondere keine Nullstellen!



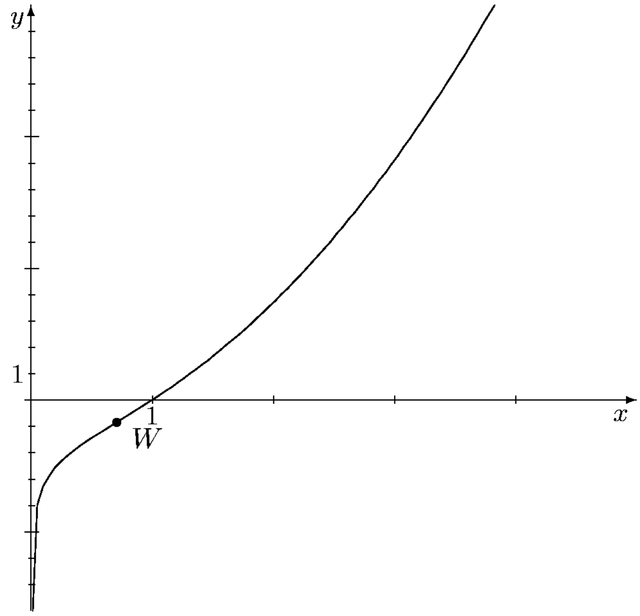
S. 95, Aufgabe 14 b): Funktionsuntersuchung $f(x) = \ln x + x^2 - 1$.
Definitionsbereich ist $]0, \infty[$.
Nullstellen sind wieder nicht algebraisch bestimmbar. Man kann aber $x = 1$ als Nullstelle erkennen. Ob es weitere Nullstellen gibt, untersuchen wir später.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot (\underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\to 0} + 1 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}) = \infty , \qquad \lim_{x\to 0} (\ln x + x^2 - 1) = -\infty .$$

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x\,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 2\,.$$

$f'(x)$ ist über dem Definitionsbereich $]0,\infty[$ immer positiv, also ist f monoton wachsend, hat insbesondere keine Extremstellen.
$f''(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$ hat die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, beide mit Vorzeichenwechsel. Aber nur $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ liegt im Definitionsbereich, ist also Wendestelle von f. Der Wendepunkt ist $W = (\frac{1}{\sqrt{2}}, f(\frac{1}{\sqrt{2}})) \approx (0{,}71;\, -0{,}85)$.



S. 95, Aufgabe 14 c): Funktionsuntersuchung $f(x) = \ln\big(\frac{x-1}{7-x}\big)$.
Definitionsbereich:

$$\begin{aligned} f(x) \text{ definiert } &\iff \frac{x-1}{7-x} > 0 \\ &\iff (x-1>0 \;\wedge\; 7-x>0) \;\vee\; (x-1<0 \;\wedge\; 7-x<0) \\ &\iff (x>1 \;\wedge\; 7>x) \;\vee\; \underbrace{(x<1 \;\wedge\; 7<x)}_{\text{Widerspruch}} \iff 1<x<7\,. \end{aligned}$$

Damit ist der Definitionsbereich des offene Intervall $]1,7[$.
Nullstellen:

$$f(x) = 0 \iff \frac{x-1}{7-x} = 1 \iff x-1 = 7-x \iff x = 4\,.$$

Grenzwerte: Wir bestimmen zunächst die Grenzwerte der inneren Funktion $\frac{x-1}{7-x}$ an den Rändern 1 und 7 des Definitionsbereiches:

$$\lim_{x\nearrow 7} \frac{x-1}{7-x} = \infty\,, \qquad \lim_{x\searrow 1} \frac{x-1}{7-x} = 0\,.$$

Daher folgt

$$\lim_{x\nearrow 7} \ln(\frac{x-1}{7-x}) = \lim_{z\to\infty} \ln z = \infty\,, \qquad \lim_{x\searrow 7} \ln(\frac{x-1}{7-x}) = \lim_{z\searrow 0} \ln z = -\infty\,.$$

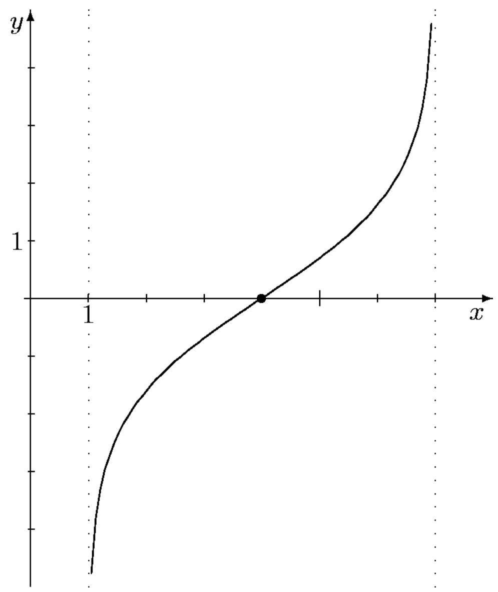
Ableitungen: Im Definitionsbereich $]1,7[$ von f sind $x-1$ und $7-x$ positiv, also ist $f(x) = \ln(x-1) - \ln(7-x)$, also

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{7-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{7-x}\,, \\ f''(x) &= -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(7-x)^2} \cdot (-1) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(7-x)^2}\,. \end{aligned}$$

Wegen $1 < x < 7$ hat f' nur positive Werte: f ist monoton wachsend und hat keine Extremstellen.

$$f''(x) = 0 \iff 0 = \frac{(x-1)^2 - (7-x)^2}{(x-1)^2(7-x)^2} = \frac{12x-48}{(x-1)^2(7-x)^2} \iff x = 4\,.$$

Damit hat f'' bei 4 eine Nullstelle. Wegen des linearen Zählers $12x-48$ liegt offenbar ein Vorzeichenwechsel vor: 4 ist Wendestelle von f.



S. 95, Aufgabe 15 a): Funktionsuntersuchung $f(x) = x^2(\ln x - 2)$.
Definitionsbereich ist $]0,\infty[$.
Nullstellen: Über dem angegebenen Definitionsbereich hat x^2 *keine* Nullstellen. Der Faktor $\ln x - 2$ hat nur eine Nullstelle:

$$\ln x - 2 = 0 \iff \ln x = 2 \iff x = e^2\,.$$

Es liegt ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ vor, da $\ln x$ monoton wächst.
Grenzwerte: Ein Grenzwert ist klar:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot (\ln x - 2) = \infty\,.$$

Für den Grenzwert bei 0 wollen wir die Regel von de l'Hospital anwenden und formen zunächst folgendermaßen um:

$$\lim_{x\to 0} x^2(\ln x - 2) = \lim_{x\to 0}(x^2 \ln x - \underbrace{2x^2}_{\to 0}) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\,.$$

Bei dem letzten Limes ist die Voraussetzung der zweiten l'Hospitalschen Regel erfüllt: Der Nenner konvergiert gegen ∞. Also

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0}(-\frac{x^2}{2}) = 0\,.$$

Anmerkung: Auf diese Weise kann man auch zeigen:

$$\lim_{x\to 0}(x^r \ln x) = 0 \text{ für } r > 0\,.$$

Auch an der Stelle 0 wird der Logarithmus von beliebigen Potenzen x^r $(r > 0)$ dominiert. (Diese Aussage ist um so schärfer, je *kleiner* r ist!)

Ableitungen:

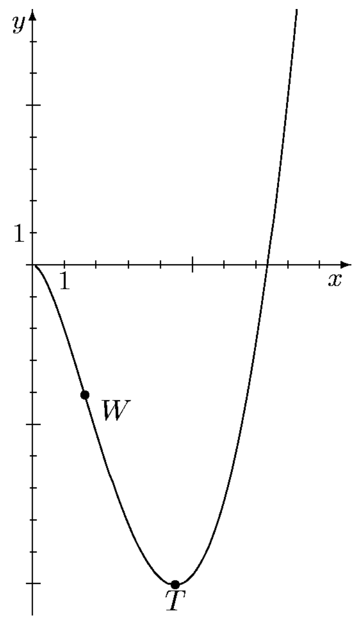
$$f'(x) = 2x(\ln x - 2) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x \cdot (2\ln x - 3)\,,$$
$$f''(x) = (2\ln x - 3) + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x - 1\,.$$

Einzige Nullstelle von f' (im Definitionsbereich von f) ist $x = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3} \approx 4{,}48$. Es liegt ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ vor, da $\ln x$ monoton wächst: Also hat f hier ein Minimum. Der Tiefpunkt ist

$$T = (e^{\frac{3}{2}}, f(e^{\frac{3}{2}})) = (e^{\frac{3}{2}}, e^3 \cdot (\frac{3}{2} - 2)) = (\sqrt{e^3}, -\frac{e^3}{2}) \approx (4{,}48;\ -10{,}04)\,.$$

Einzige Nullstelle von $f''(x) = 2\ln x - 1$ ist $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$; es liegt ein Vorzeichenwechsel vor, da $2\ln x$ monoton ist, also hat f an dieser Stelle einen Wendepunkt:

$$W = (e^{\frac{1}{2}}, f(e^{\frac{1}{2}})) = (e^{\frac{1}{2}}, e \cdot (\frac{1}{2} - 2)) = (\sqrt{e}, -\frac{3e}{2}) \approx (1{,}65;\ -4{,}08)\,.$$



S. 95, Aufgabe 15 b): Funktionsuntersuchung $f(x) = 3x - 2x \ln x$.
Definitionsbereich ist wieder $\mathbb{D}(f) =]0, \infty[$.
Nullstellen: Über diesem Definitionsbereich gilt $x > 0$ und daher

$$f(x) = 0 \iff x(3 - 2\ln x) = 0 \iff 3 = 2\ln x \iff x = e^{\frac{3}{2}}.$$

Da $3 - 2\ln x$ monoton fällt (und der Faktor x über $\mathbb{D}(f)$ immer positiv ist), liegt ein Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$ vor.
Grenzwerte:

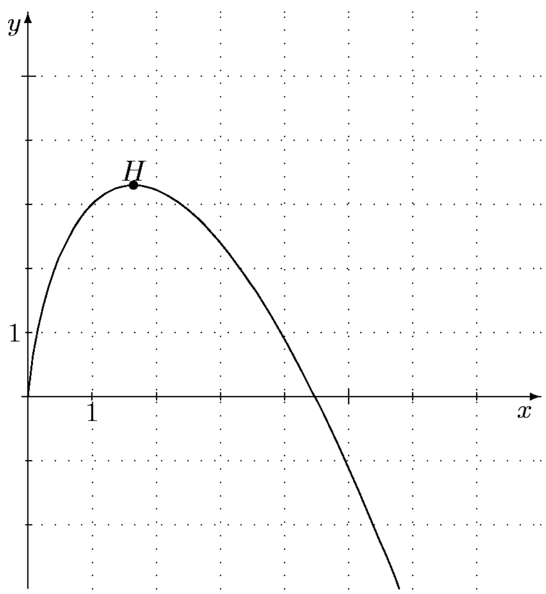
$$\lim_{x\to\infty}(3x - 2x\ln x) = \lim_{x\to\infty} x \cdot (3 - \underbrace{2\ln x}_{\to\infty}) = -\infty\,,$$
$$\lim_{x\to 0}(3x - \underbrace{2x\ln x}_{\to 0}) = 0 \quad \text{(l'Hospital)}\,.$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 3 - (2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}) = 1 - 2\ln x\,, \quad f''(x) = -\frac{2}{x}\,.$$

Damit hat f'' nur negative Werte (im Definitionsbereich von f) und f ist rechtsgekrümmt; Wendestellen existieren nicht.
Einzige Nullstelle von f' ist $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Wegen der Rechtskrümmung hat f hier einen Hochpunkt:

$$H = (e^{\frac{1}{2}}, f(e^{\frac{1}{2}})) = (e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{2}}(3 - 2\ln e^{\frac{1}{2}})) = (\sqrt{e}, 2\sqrt{e}) \approx (1{,}65; 3{,}3)\,.$$



S. 95, Aufgabe 15 c): Funktionsuntersuchung $f(x) = x \ln x - \dfrac{x^2}{2}$.

Definitionsbereich ist $\mathbb{D}(f) =]0, \infty[$.

Nullstellen: Man wird auf die algebraisch nicht angreifbare Gleichung $\ln x = \frac{x}{2}$ geführt. Wir kommen auf die Nullstellen später zurück.

Grenzwerte:

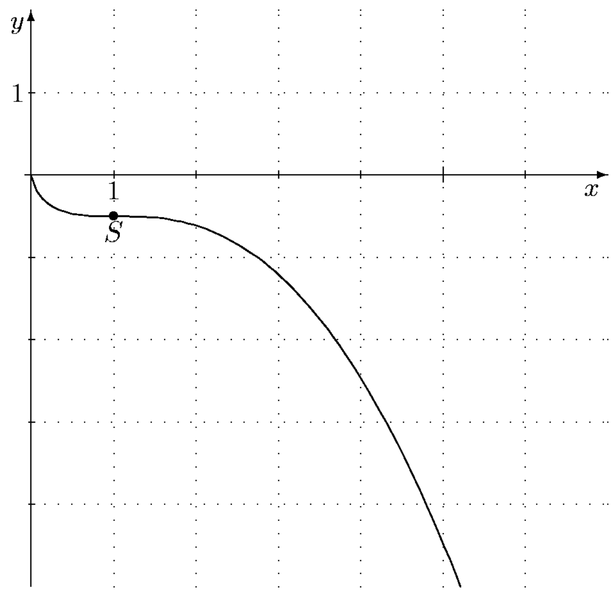
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot (\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} - \frac{1}{2}) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(\underbrace{x \ln x}_{\to 0} - \frac{x^2}{2}) = 0\,.$$

Ableitungen:

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - x = \ln x - x + 1\,, \quad f''(x) = \frac{1}{x} - 1\,.$$

f'' hat nur eine einzige Nullstelle, und zwar bei 1; es liegt ein Vorzeichenwechsel von + zu − vor, da $\frac{1}{x}$ monoton fällt. Also hat f' (!) an dieser Stelle ein Maximum und f eine Wendestelle.

Da diese Maximalstelle die einzige Extremstelle von f' (!) ist, nimmt f' hier seinen größten Wert an; dieser ist $f'(1) = 0$. Also sind alle anderen Werte $f'(x) < 0$ und f ist streng monoton fallend. Wegen des oben bestimmten Randgrenzwertes $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ folgt, dass alle Werte von f negativ sind: f hat keine Nullstellen! Da f streng monoton ist, hat f keine Extremstellen. Die Wendestelle 1 ist wegen $f'(1) = 0$ eine Sattelstelle von f. Der Sattelpunkt ist $S = (1, f(1)) = (1, -\frac{1}{2})$.

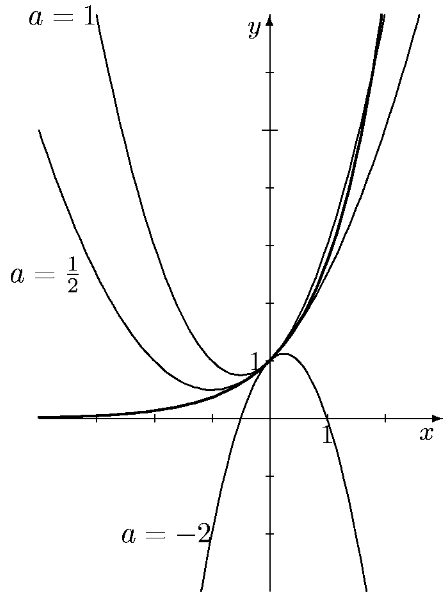


7) **S. 97, Aufgabe 24:**
Da g ganzrational vom Grade 2 sein soll, hat der Funktionsterm von g die Form $g(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Zwei Graphen berühren sich an einer Stelle, wenn sie dort im Funktions- und Ableitungswert übereinstimmen. Gesucht ist also g mit den Eigenschaften $g(0) = f(0)$ und $g'(0) = f'(0)$. Wegen $f(x) = e^x$ und $f'(x) = e^x$ gilt $f(0) = 1$ und $f'(0) = 1$.
Die gesuchten Funktionen g müssen also die Bedingungen $g(0) = 1$ und $g'(0) = 1$

erfüllen. Wegen $g(x) = ax^2 + bx + c$ ist $g(0) = c$ und $g'(x) = 2ax + b$, $g'(0) = b$. Also sind die gesuchten Funktionen gegeben durch

$$g(x) = ax^2 + x + 1 \ (a \neq 0) .$$

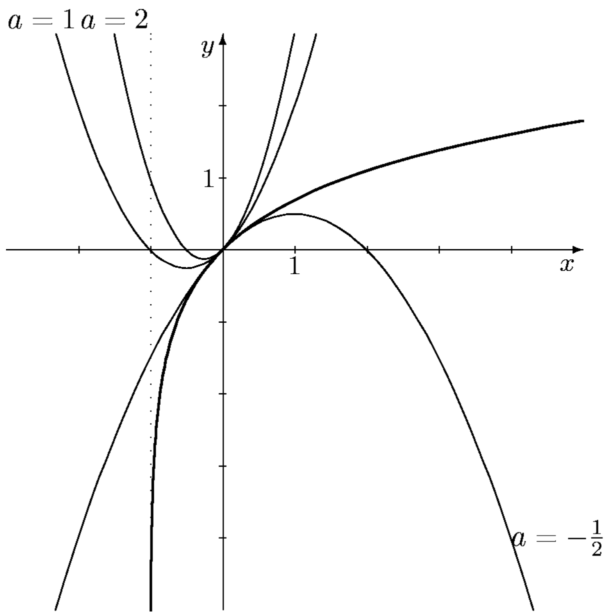
Für $f(x) = e^{-x}$ gilt $f'(x) = -e^{-x}$ und daher $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$. Die gleiche Rechnung ergibt nun als Lösungen $g(x) = ax^2 - x + 1$ $(a \neq 0)$.



S. 97, Aufgabe 25: Wie in der vorangehenden Aufgabe setzen wir an: $g(x) = ax^2 + bx + c$. Es ist $f(x) = \ln(x+1)$ und $f'(x) = \frac{1}{x+1}$. Die Bedingungen an g lauten daher $g(0) = f(0) = \ln 1 = 0$ und $g'(0) = f'(0) = \frac{1}{1} = 1$. Dies führt zu folgenden Bedingungen für die unbekannten Koeffizienten a, b, c:

$$0 = g(0) = c \,, \qquad 1 = g'(0) = b \,.$$

Also sind die gesuchten Funktionen gegeben durch $g(x) = ax^2 + x$,
Für $f(x) = \ln(\frac{1}{x+1}) = -\ln(x+1)$ erhält man $g(x) = ax^2 - x$.

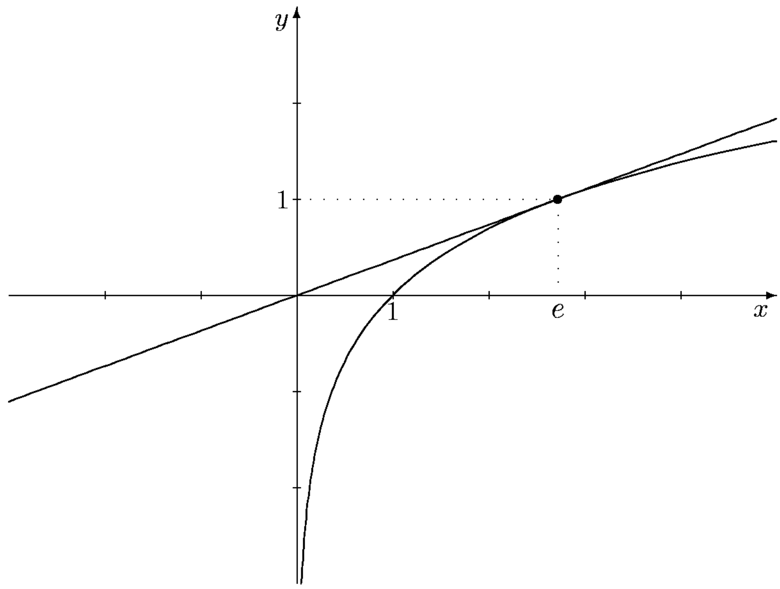


S. 97, Aufgabe 26: a) Die allgemeine Tangentengleichung (für eine Funktion f und die Berührstelle a) lautet $y = f(a) + f'(a)(x-a) = f'(a)\cdot x + f(a) - f'(a)\cdot a$. Diese verläuft durch den Ursprung, wenn der y-Achsenabschnitt $f(a) - f'(a)\cdot a = 0$ ist. Gesucht sind also die Berührstellen a mit

$$f(a) = f'(a)\cdot a \iff \ln a = \frac{1}{a}\cdot a = 1 \iff a = e\,.$$

Damit verläuft nur die Tangente mit Berührpunkt $a = e$ durch den Ursprung; sie hat die Gleichung

$$y = \ln a + \frac{1}{a}(x-a) \iff y = 1 + \frac{1}{e}(x-e) = \frac{x}{e}\,.$$

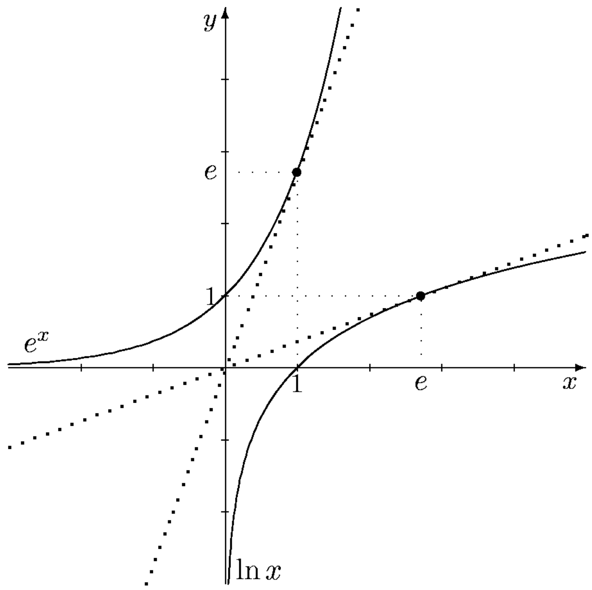


b) Hier ist $f(a) = \ln(a+1)$ und $f'(a) = \frac{1}{a+1}$. Also suchen wir solche a mit

$$\ln(a+1) = \frac{1}{a+1}\cdot a = \frac{a}{a+1} \iff (a+1)\ln(a+1) - a = 0\,.$$

Diese Gleichung enthält die Unbekannte a im Logarithmus und außerhalb, ist daher nicht einfach rein algebraisch auflösbar. Aber $a = 0$ ist als Lösung erkennbar (dies ergibt sich auch daraus, dass $f(0) = 0$ ist und der Graph von f selbst durch den Ursprung verläuft). Ob es aber weitere Lösungen dieser Gleichung gibt, erkennen wir erst nach einer geeigneten Monotonieüberlegung: An der Stelle $a = 0$ hat die Funktion $(a+1)\ln(a+1) - a$ eine Nullstelle, die zugleich einziges Extremum dieser Funktion ist. Es gibt also keine weiteren Nullstellen und damit keine weiteren Lösungen des gestellten Problems: Die einzige Tangente an den Graphen von f, die durch den Ursprung verläuft ist, die Tangente im Ursprung: $y = f(0) + f'(0)(x-0) = x$.

S. 97, Aufgabe 27: a) Diese Aufgabe lässt sich auf 26 a) zurückführen, da $f(x) = e^x$ die Umkehrfunktion zu der in Aufgabe 26 a) behandelten Funktion ln ist. Die Graphen sind also spiegelbildlich zueinander bzgl. der Winkelhalbierenden im I./III. Quadranten. Spiegelt man die in 26 a) gefundene Tangente $y = \frac{x}{e}$ an der Winkelhalbierenden, so erhält man $x = \frac{y}{e} \iff y = ex$ und der in 26 a) gefundene Berührpunkt $(e, 1)$ liefert durch Spiegelung den Berührpunkt $(1, e)$ in dieser Aufgabe.



Rechnerische Lösung: $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$. Gesucht ist also die Berührstelle a mit (siehe 26 a))

$$f(a) = f'(a)a \iff e^a = e^a a \iff a = 1\,.$$

Die gesuchte Tangente ist $y = e^a + e^a(x - a) = e + e(x - 1) = ex$.
b) $f(x) = e^{x-k}$, $f'(x) = e^{x-k}$. Also

$$f(a) = f'(a)a \iff e^{a-k} = e^{a-k}a \iff a = 1\,.$$

Die Berührstelle ist ebenfalls immer $a = 1$, der Berührpunkt $(1, e^{1-k})$ und die Tangentegleichugn $y = e^{1-k} \cdot x$.
Für $f(x) = e^{kx}$, $f'(x) = ke^{kx}$ ergibt sich:

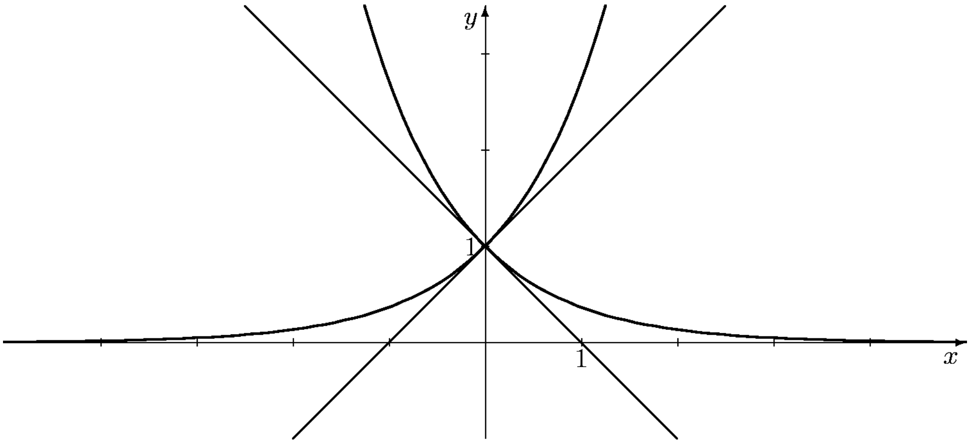
$$e^{ka} = ke^{ka} \cdot a \iff a = \frac{1}{k}\,.$$

Die Berührstelle ist $\frac{1}{k}$, der Berührpunkt $(\frac{1}{k}, e)$ und die Tangentengleichung $y = ex$.

8) **S. 97, Aufgabe 28:** Da die Graphen von f_k und g_k spiegelbildlich zueinander bzgl. der y-Achse sind und der Berührpunkt $P = (0, 1)$ auf der y-Achse liegt, bilden die beiden Tangenten ebenfalls ein zu y-Achse symmetrisches Dreieck, das deshalb insbesondere gleichschenklig ist.

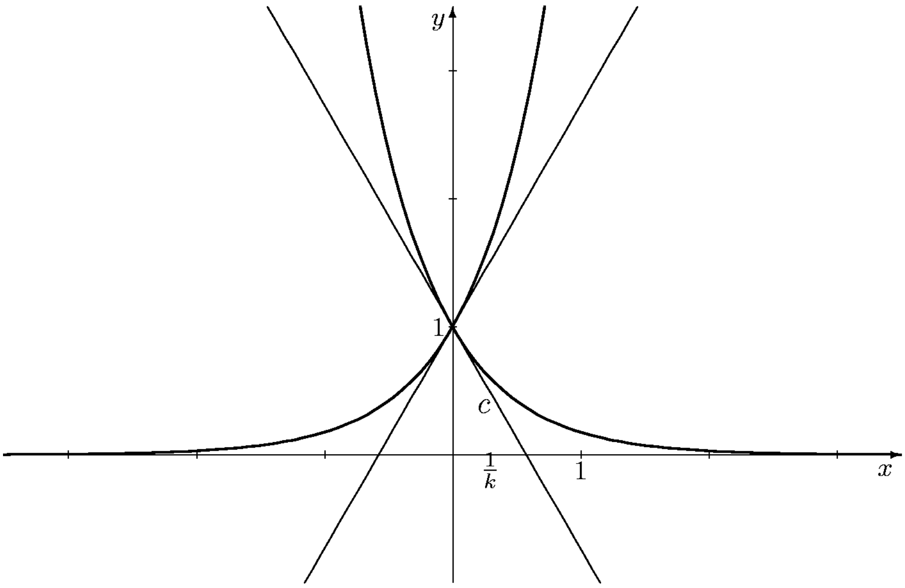
a) Hier muss man also nur die Rechtwinkligkeit überprüfen. Diese ist gegeben, wenn der Winkel zwischen Tangente und x-Achse 45^0 beträgt (siehe Skizze). Dies bedeutet, dass der Tangentenanstieg $+1$ oder -1 sein muss. Da der Anstieg $f_k'(0) =$

k ist, bedeutet dies $k = \pm 1$.



b) Das Dreieck wird durch die Nullstellen der Tangentenfunktionen und den Punkt $(0, 1)$ bestimmt. Die Tangentengleichungen lauten $kx + 1$ oder $-kx + 1$. Die auf der x-Achse liegende Seite hat die Länge $\frac{2}{|k|}$. Die Länge c der anderen Dreiecksseiten berechnet man nach dem Satz des Pythagoras: $c^2 = 1^2 + (\frac{1}{k})^2$. Also liegt ein gleichschenkliges Dreieck vor, wenn

$$(\frac{2}{k})^2 = c^2 = 1 + (\frac{1}{k})^2 \iff 4 = k^2 + 1 \iff k^2 = 3 \iff k = \pm\sqrt{3}\,.$$



S. 97, Aufgabe 29: a) Es ist $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$, $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$. Damit ist -2 die einzige Wendestelle von f und die Wendetangente von f hat die Gleichung

$$y = f(-2) + f'(-2)(x+2) = -\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2}(x+2) = -\frac{1}{e^2} \cdot (x+4)\,.$$

Wegen $g(x) = -f(-x)$ ist der Graph von g punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs zum Graphen von f, folglich auch Wendepunkt und Wendetangente. Damit ist die Gleichung der Wendetangente von g

$$-y = -\frac{1}{e^2}(-x+4) \iff y = -\frac{1}{e^2}(x-4)\,.$$

Rechnerisch: $g'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (-x+1)e^{-x}$, $g''(x) = -e^{-x} + (-x+1)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$, Wendestelle $+2$, Wendetangente $y = g(2) + g'(2)(x-2) = 2e^{-2} - e^{-2}(x-2) = -e^{-2}(x-4)$.
b) Wir berechnen sukzessive:

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= e^{kx} + x \cdot ke^{kx} = (kx+1)e^{kx}\,, \\ f_k''(x) &= ke^{kx} + (kx+1) \cdot ke^{kx} = (k^2x + 2k)e^{kx}\,, \\ \text{Wendestelle:}\quad x &= -\frac{2}{k}\,, \\ \text{Wendetangente:}\quad y &= -\frac{2}{k}e^{-2} - e^{-2}(x + \frac{2}{k}) = -\frac{1}{e^2} \cdot x - \frac{4}{ke^2}\,. \end{aligned}$$

Die Wendetangenten von f_k haben alle denselben Anstieg $-\frac{1}{e^2}$.
Die Funktionen g_k sind nichts anderes als die Funktionen f_{-k}; die Ergebnisse sind in den vorangehenden also voll enthalten (ersetze jeweils k durch $-k$).
c) Die Wendepunkte von f_k sind

$$W_k = (-\frac{2}{k}, f_k(-\frac{2}{k})) = (-\frac{2}{k}, -\frac{2}{k} \cdot e^{-2})\,.$$

Für die Koordinaten der Wendepunkte gilt also $x = -\frac{2}{k}$, $y = -\frac{2}{k}e^{-2} = x \cdot e^{-2}$. Also liegen alle Wendepunkte auf der Geraden mit der Gleichung $y = e^{-2}x$.
Wegen $g_k = f_{-k}$ gilt dies auch für die Wendepunkte der g_k.
Die Extremstellen von f_k sind $-\frac{1}{k}$, die Extrempunkte demzufolge

$$E_k = (-\frac{1}{k}\,, f(-\frac{1}{k})) = (-\frac{1}{k}\,, -\frac{1}{k}e^{-1})\,.$$

Die Extrempunkte liegen alle auf der Geraden mit der Gleichung $y = e^{-1}x$.

S. 97, Aufgabe 30: a) f_k hat genau dann eine Nullstelle, wenn die quadratische Gleichung $x^2 + 4x + k$ eine Nullstelle hat, also genau dann, wenn der Radikand in der p, q-Formel $4 - k \geq 0$, also $k \leq 4$ ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= (2x+4)e^{-x} + (x^2 + 4x + k)(-e^{-x}) = \\ &\quad (-x^2 - 2x + (4-k))e^{-x} = -(x^2 + 2x + k - 4)e^{-x}\,. \end{aligned}$$

f_k hat eine Extremstelle genau dann, wenn der quadratische Faktor in f_k' Nullstellen mit Vorzeichenwechsel hat, wenn er also zwei verschiedene Nullstellen hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Radikand $1 - (k-4) > 0$, also $k < 5$ ist. Da diese Bedingung für $k \leq 4$ selbstverständlich erfüllt ist, ist die Behauptung gezeigt.
b) Zunächst gilt generell: Ist eine Funktion zwischen zwei Nullstellen lückenlos definiert und stetig, so muss sie dazwischen auch eine Extremstelle haben. Es ist also hier nur etwas zu zeigen, wenn f_k nur eine Nullstelle hat. Aber auch dann muss es eine Extremstelle geben, weil nach l'Hospital

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 + 4x + k)e^{-x} = 0$$

ist: 'Rechts' von der Nullstelle muss noch eine Extremstelle liegen. [Im Unendlichen liegt sozusagen noch eine weitere Nullstelle.]

S. 98, Aufgabe 32:
a) Definitionsbereich ist $\mathbb{D}(f) = \mathbb{R}$.
Ableitungen:

$$f_k'(x) = 1 - ke^x\,, \qquad f_k''(x) = -ke^x\,.$$

f_k'' hat nur negative Werte, f ist also überall rechtsgekrümmt und hat keine Wendestellen. Einzige Nullstelle von f_k' ist $x = -\ln k$ ($k > 0$!); wegen der Rechtskrümmung hat f_k hier ein Maximum. Der Hochpunkt ist

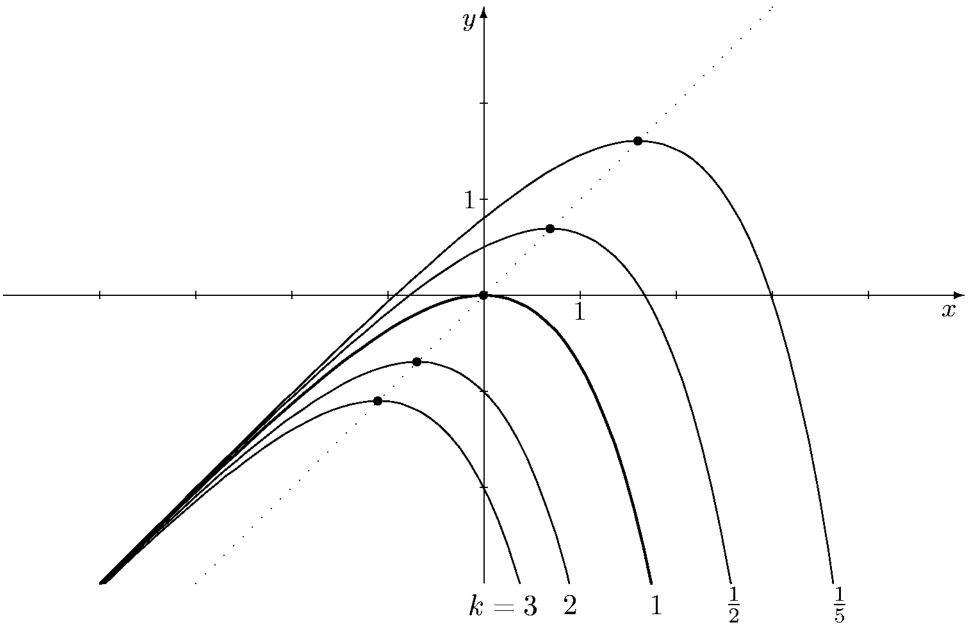
$$H_k = (-\ln k, f(-\ln k)) = (-\ln k, -\ln k + 1 - ke^{-\ln k}) = (-\ln k\,, -\ln k)\,.$$

b) Die beiden Koordinaten der Hochpunkte stimmen jeweils überein; die Hochpunkte liegen auf der Geraden mit der Gleichung $y = x$.
Für die Zeichnung des Graphen von f_1 benötigen wir weitere Informationen:
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{e^x}_{\to\infty} \cdot (\underbrace{\frac{x+1}{e^x}}_{\to 0} - 1) = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x+1}_{\to-\infty} - \underbrace{e^x}_{\to 0} = -\infty\,.$$

Nullstellen: f_1 hat bei 0 eine Nullstelle. Diese ist zugleich die einzige Extremstelle, so das f_1 keine weiteren Nullstellen besitzen kann. [Die nachfolgende Skizze enthält neben dem geforderten Graphen von f_1 in dickerer Strichstärke zur Veranschaulichung auch einige weitere Graphen f_k. Die Gerade, auf der die Hochpunkte liegen, ist gepunktet eingezeichnet.]



S. 98, Aufgabe 33: a) Es ist $f_k'(x) = -e^x + (k-x)e^x = (k-1-x)e^x = 0$. Da die lineare Funktion $k-1-x$ bei $x = k-1$ ihre einzige Nullstelle, und zwar mit Vorzeichenwechsel hat, hat f_k genau einen Extrempunkt $E_k = (k-1, f_k(k-1)) = (k-1, e^{k-1})$.
b) Für die Koordinaten von E_k gilt: $x = k-1$ und $y = e^{k-1} = e^x$, also liegen alle Extrempunkte der f_k auf dem Graphen von $y = e^x$.

S. 98, Aufgabe 34: Wir untersuchen zunächst die Randgrenzwerte und das Monotonieverhalten der Funktion $f_k(x) = e^x - x + k$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}(e^x - x + k) = \lim_{x\to\infty} e^x(1 - \frac{x-k}{e^x}) = \infty\,,\\
&\lim_{x\to-\infty}(e^x - x + k) = \lim_{x\to-\infty}(\underbrace{e^x}_{\to 0} - x + k) = \infty\,,\\
&f_k'(x) = e^x - 1\,.
\end{aligned}$$

Also hat f_k nur eine Extremstelle, und zwar bei 0. Wegen der Randgrenzwerte muss es ein Minimum sein; der Tiefpunkt ist $T_k = (0, f_k(0)) = (0, 1+k)$. Die Anzahl der Nullstellen hängt nun davon ab, ob der Tiefpunkt über, auf oder unter der x-Achse liegt. Damit gilt:

$$\text{Anzahl der Lösungen von } e^x - k + k = 0 \text{ ist } \begin{cases} 0 & \text{falls } k+1 > 0, \text{ d. h. } k > -1,\\ 1 & \text{falls } k+1 = 0, \text{ d. h. } k = 1,\\ 2 & \text{falls } k+1 < 0, \text{ d. h. } k < -1.\end{cases}$$

S. 98, Aufgabe 35: Wir berechnen die beiden Ableitungen

$$f'(x) = ae^x - be^{-x}\,, \qquad f''(x) = ae^x + be^{-x} = f(x)\,.$$

Nullstellenberechnung:

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\iff ae^x = be^{-x} \iff e^{2x} = \frac{b}{a}\,,\\
f''(x) = 0 &\iff ae^x = -be^{-x} \iff e^{2x} = -\frac{b}{a}\,.
\end{aligned}$$

<u>1. Fall: $\frac{b}{a} > 0$:</u> Dann hat die erste Gleichung genau eine Lösung $\ln(\frac{a}{b})$, während die zweite Gleichung unlösbar ist, da e^{2x} immer positiv ist. Also hat f keine Wendestelle, während die Nullstelle von f' eine Extremstelle sein muss, da $f''(x) \neq 0$ für alle x.
<u>2. Fall: $\frac{b}{a} < 0$:</u> Dann erhält man genau umgekehrt: Die erste Gleichung ist unlösbar, während f'' genau eine Nullstelle $\ln(-\frac{b}{a})$ hat, die eine Wendestelle von f ist, da $f''' = f'$ nie 0 wird.

S. 98, Aufgabe 36: a) Die allgemeine Tangentengleichung lautet $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Also bei $f_k(x) = \frac{1}{k} \cdot \ln x$ und $f_k'(x) = \frac{1}{kx}$:

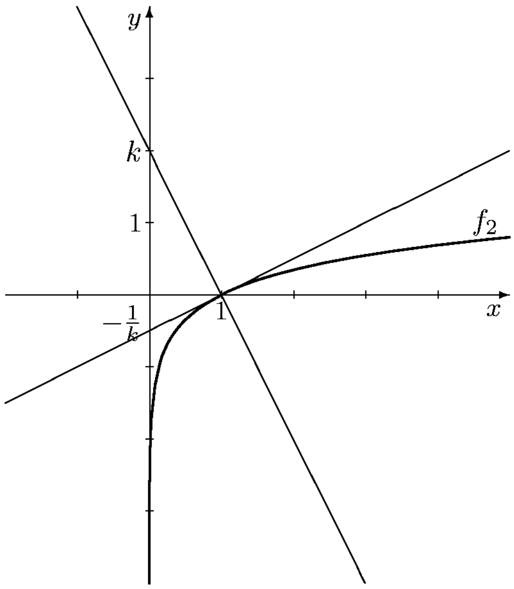
$$t_k(x) = \frac{1}{k}\ln 1 + \frac{1}{k}(x-1) = \frac{1}{k}(x-1)\,.$$

Der Tangentenanstieg ist $\frac{1}{k}$, der Normalenanstieg also $-k$ (2 Geraden sind senkrecht zueinander, wenn die Anstiege im Produkt -1 ergeben). Damit lautet die Normalengleichung

$$n_k(x) = -kx + b\,.$$

Da die Normale durch $(1,0)$ verlaufen soll, muss gelten $0 = -k + b \iff b = k$, und die Normalengleichung lautet vollständig

$$n_k(x) = -kx + k\,.$$



b) Wir betrachten die y-Achse als 'Grundseite' des Dreiecks. Da $P = (1,0)$ die Spitze des Dreiecks ist, beträgt die Höhe 1. Die Länge der Grundseite ergibt sich aus den y-Achsenabschnitten von Tangente und Normale; sie beträgt $k + \frac{1}{k}$. Damit ist die Dreiecksfläche

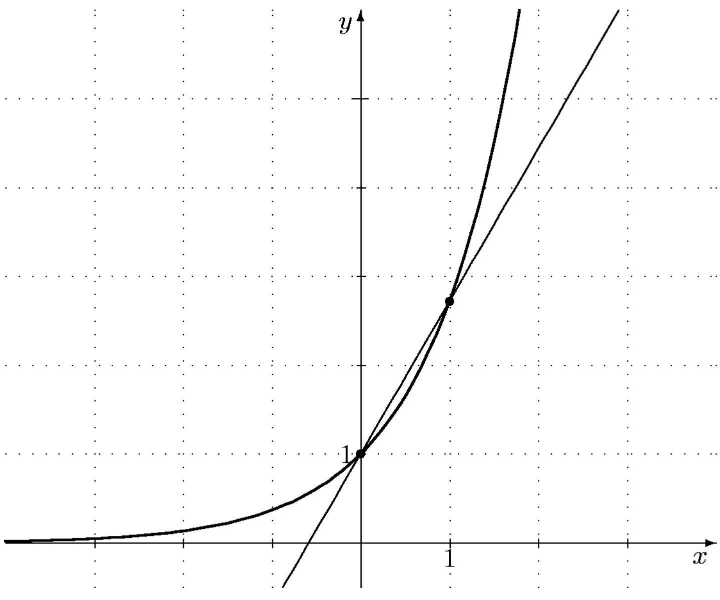
$$A(k) = \frac{1}{2} \cdot (k + \frac{1}{k}) \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot (k + \frac{1}{k})\,.$$

Gesucht ist der Wert von k, für den $A(k)$ maximal ist. Wir untersuchen also die Funktion A auf Monotonie:

$$A'(k) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{k^2 - 1}{2k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{2k^2} = 0 \iff k = \pm 1\,.$$

Da $k > 0$ ist, ist nur $k = 1$ eine Nullstelle von A'; A hat hier ein Minimum, da A' das Vorzeichen von $-$ zu $+$ ändert. Der minimale Flächeninhalt ist $A(1) = 1$.

9) **S. 96, Aufgabe 21:** a) Gesucht ist die lineare Funktion $g(x) = mx + n$, auf deren Graph die beiden Punkte liegen. $P_1 = (0,1)$ gibt den y-Achsenabschnitt $n = 1$. Der Anstieg ist $m = \frac{e-1}{1-0} = e - 1$ und die Funktionsgleichung also $g(x) = (e-1)x + 1$. Skizze:



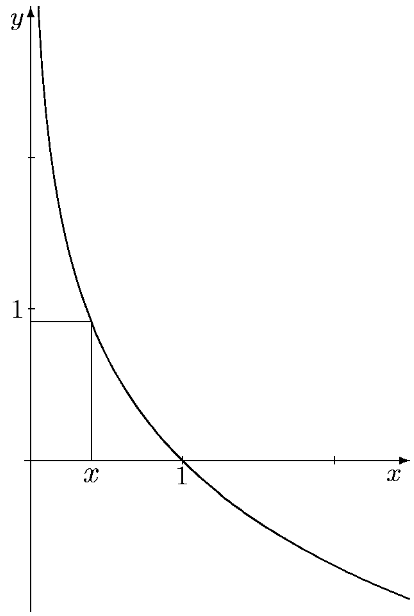
b) Wir untersuchen die Differenzfunktion $d(x) = g(x) - f(x) = (e-1)x + 1 - e^x$ auf Extremwerte im Intervall $[0, 1]$. Da 0 und 1 die Schnittstellen beider Graphen sind, hat d dort den Wert 0: $d(0) = d(1) = 0$.

$$d'(x) = e - 1 - e^x = 0 \iff e^x = e - 1 \iff x = \ln(e-1)\,.$$

$d'(x)$ ändert an dieser Nullstelle das Vorzeichen von $+$ zu $-$, da $-e^x$ monoton fällt. Also hat d hier ein Maximum; der Maximalwert ist

$$d(\ln(e-1)) = (e-1)\ln(e-1) + 1 - e^{\ln(e-1)} = (e-1)\ln(e-1) - e + 2 \approx 0{,}21\,.$$

S. 96, Aufgabe 22: a) $f(x) = \ln\frac{1}{x} = -\ln x$. Der Graph von f ensteht also aus dem bekannten Graphen von ln durch Spiegelung an der x-Achse:



In die Skizze ist bereits ein solches achsenparalleles Rechteck eingezeichnet. Sein Flächeninhalt beträgt (in Abhängigkeit von der eingezeichneten Größe x):

$$A(x) = x \cdot f(x) = -x \cdot \ln x \text{ für } 0 < x \leq 1\,.$$

Die Randwerte von A sind $\lim_{x\to 0} A(x) = -\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$ und $A(1) = 0$.

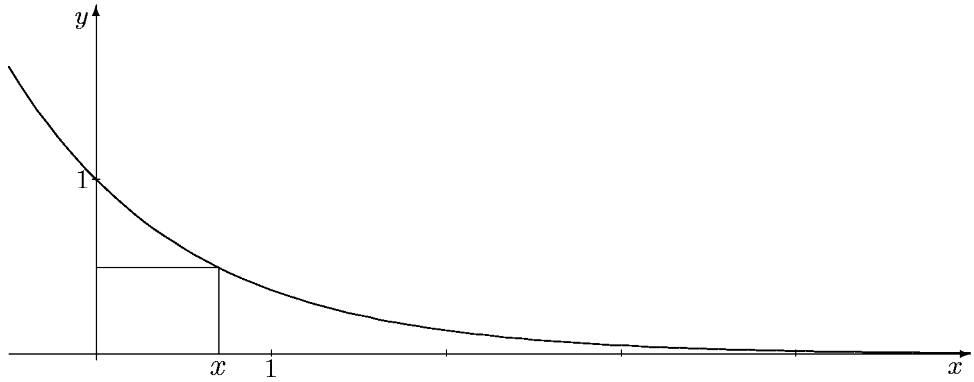
$$A'(x) = -\ln x - x \cdot \frac{1}{x} = -(\ln x + 1)\,.$$

Einzige Nullstelle von A' ist $e^{-1} = \frac{1}{e}$. Hier hat A' einen Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$, da $-\ln x$ monoton fällt; A hat hier also ein Maximum. Der maximale Flächeninhalt beträgt

$$A(e^{-1}) = -e^{-1} \cdot \ln(e^{-1}) = e^{-1}\,.$$

b) $f(x) = e^{-x}$. Diese Funktion ist die Umkehrfunktion der in a) gegebenen Funktion, denn $y = e^{-x} \iff \ln y = -x \iff -\ln y = x$. Die beiden Graphen von a) und b) sind also spiegelbildlich zueinander bzgl. der Geraden mit der Gleichung $y = x$.

Aufgrund der Symmetrie erhält man hier denselben maximalen Flächeninhalt. Zur Übung hier die entsprechenden Überlegungen und Rechnungen für $f(x) = e^{-x}$.



Wieder ist in die Skizze ein solches achsenparalleles Rechteck eingezeichnet. Sein Flächeninhalt beträgt (in Abhängigkeit von der eingezeichneten Größe x):

$$A(x) = x \cdot f(x) = x \cdot e^{-x} \text{ für } 0 \leq x\,.$$

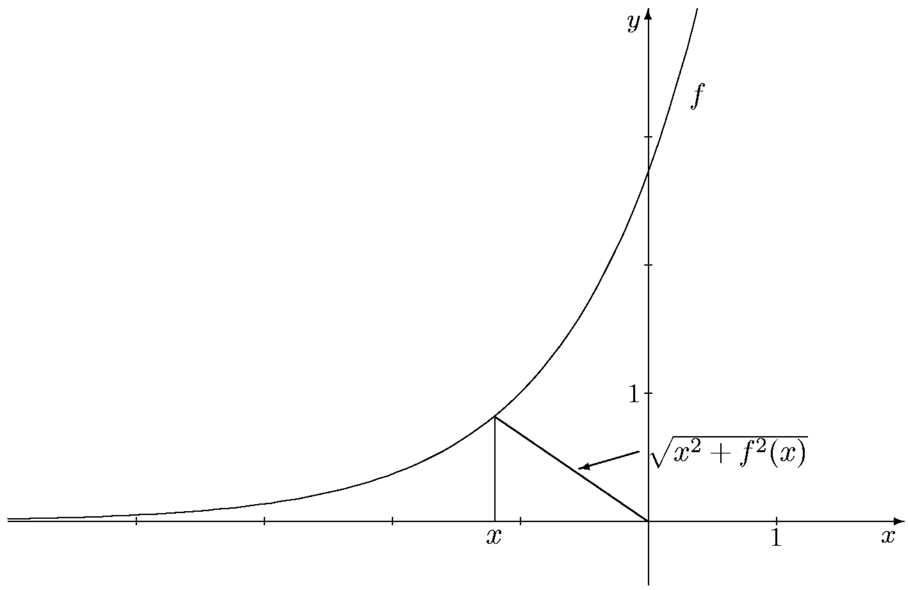
Die Randwerte von A sind $\lim_{x\to\infty} A(x) = 0$ (l'Hospital) und $A(0) = 0$.

$$A'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)\,.$$

Einzige Nullstelle von A' ist also 1, und zwar mit Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$ ($1-x$ fällt monoton). A hat hier also ein Maximum. Der maximale Flächeninhalt beträgt

$$A(1) = e^{-1}\,.$$

S. 96, Aufgabe 23: Ein beliebiger Punkt des Graphen von f ist von der Form $(x, f(x))$. Sein Abstand vom Koordinatenursprung $(0,0)$ ist nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{x^2 + f^2(x)}$. Wir untersuchen (entsprechend dem gegebenen Tipp)



das Abstandsquadrat

$$h(x) = x^2 + f^2(x)\,.$$

a) In diesem Falle ist $f(x) = e^{x+1}$ und damit $h(x) = x^2 + e^{2x+2}$. Die Randgrenzwerte von h sind $\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = \infty$. Es muss also ein Minimum existieren (was auch anschaulich klar ist). Nullstellen von $h'(x) = 2x + 2e^{2x+2}$ sind nicht einfach rein algebraisch bestimmbar. Man findet jedoch durch Einsetzen $x = -1$ als eine Nullstelle von h'. Dass dies die einzige ist, erkennt man an der zweiten Ableitung, $h''(x) = 2 + 4e^{2x+2}$, die nur positive Werte annimmt. Also ist h' monoton wachsend und kann daher nur die eine Nullstelle -1 haben. An dieser hat h ein Minimum, da wegen $h''(x) > 0$ die Funktion h linksgekrümmt ist. Der Punkt des Graphen von f mit dem geringsten Abstand vom Koordinatenursprung ist $P = (-1, f(-1)) = (-1, 1)$. Der minimale Abstand ist daher

$$\sqrt{h(-1)} = \sqrt{1 + f^2(-1)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,.$$

b) Hier ist $f(x) = \ln\frac{x}{e} = \ln x - 1$. Dies ist wieder die Umkehrfunktion von a), denn $y = \ln x - 1 \iff y+1 = \ln x \iff e^{y+1} = x$. Damit ist der Graph von f spiegelbildlich zum Graphen aus a) bezüglich der Winkelhalbierenden im I./III. Quadranten. Dadurch ändert sich das geometrische Problem nicht: Der geringste Abstand zu $(0,0)$ ist $\sqrt{2}$, er wird im gespiegelten Punkt $(1,-1) = (1, f(1))$ des Graphen von f angenommen.
Wieder zur Übung hier die entsprechenden Überlegungen und Rechnungen für $f(x) = \ln\frac{x}{e}$. Die zu untersuchende Funktion ist hier

$$h(x) = x^2 + f^2(x) = x^2 + (\ln x - 1)^2 \text{ für } x > 0\,.$$

Die Randwerte sind wieder $\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = \infty$.

$$h'(x) = 2x + 2(\ln x - 1)\cdot\frac{1}{x} = 2x + \frac{2}{x}(\ln x - 1)$$

Wieder kann man die Gleichung $h'(x)$ nicht einfach algebraisch lösen. Bei der Erstellung einer Wertetabelle kann man zwar auf die Nullstelle $x = 1$ stoßen: $h'(1) = 0$, aber der Nachweis, dass dies die einzige ist, bleibt schwierig. Der Weg über h'' führt auch nicht unmittelbar zum Ziel. Wieder ist eine geeignete Faktorisierung der Terms hilfreich:

$$h'(x) = \frac{2}{x}\cdot(x^2 + \ln x - 1)\,.$$

Wir untersuchen nun nur noch $x^2 - 1 + \ln x$. Diese Funktion hat bei $x = 1$ eine Nullstelle. Sie ist für $x > 0$ monoton wachsend (Ableitung $2x + \frac{1}{x}$), kann also keine weiteren Nullstellen besitzen. [Beachten Sie: Durch das Abspalten des nullstellenfreien (sogar positiven) Faktors $\frac{2}{x}$ wird die Ableitung des verbleibenden Faktors viel einfacher; seine Monotonie reicht aber für die hier anstehende Frage aus!]

10) **S. 98, Aufgabe 37:** a) Es sei $m(t)$ die noch vorhandene Masse Uran 234 zum Zeitpunkt t (gemessen in Jahren). Da eine (konstante) Halbwertszeit vorgegeben ist, liegt exponentieller Zerfall vor, die Funktion kann also angesetzt werden als

$$m(t) = m_0 \cdot a^t \quad (m_0 \text{ Ausgangsmasse}, a < 1 \text{ Änderungsfaktor})\,.$$

Aufgrund der bekannten Halbwertszeit $T_H = 2{,}044 \cdot 10^5 = 244000$ Jahre gilt

$$\frac{1}{2} = a^{T_H} \iff a = 2^{-\frac{1}{T_H}} = 2^{-\frac{1}{244000}} \approx 0{,}999997159\,.$$

(Bitte arbeiten Sie in weiteren Rechnungen nicht mit einem (noch so genauen) Näherungswert für a, sondern mit dem *exakten* Wert $2^{-1/244000}$!) Die Zerfallsfunktion lautet demnach

$$\begin{aligned} m(t) &= m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_H}} && \text{(allgemeine Zerfallsfunktion zur Halbwertszeit } T_H\text{)} \\ &= m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{244000}} && \text{(konkrete Zerfallsfunktion für diese Aufgabe)} \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich der *Anteil* des noch vorhandenen Uran 234 nach t Jahren

$$a(t) := \frac{m(t)}{m_0} = 2^{-\frac{t}{244000}} .$$

Der Rest von a) besteht in der numerischen Auswertung:

$$\begin{aligned} a(1000) &= 2^{-\frac{1000}{244000}} = 2^{-\frac{1}{244}} \approx 0{,}997163 \approx 99{,}7\%\,, \\ a(10000) &= 2^{-\frac{10000}{244000}} = 2^{-\frac{10}{244}} \approx 0{,}971992 \approx 97{,}2\%\,, \\ a(100000) &= 2^{-\frac{100000}{244000}} = 2^{-\frac{100}{244}} \approx 0{,}752709 \approx 75{,}3\%\,, \end{aligned}$$

b) Für den Zeitpunkt t, zu dem noch $p\%$ vorhanden sind, gilt also

$$\frac{p}{100} = 2^{-\frac{t}{244000}} .$$

Dies ist eine Exponentialgleichung für t, die man durch Logarithmieren löst:

$$\begin{aligned} 2^{-\frac{t}{244000}} = \frac{p}{100} &\iff -\frac{t}{244000} \cdot \ln(2) = \ln(\frac{p}{100}) \\ &\iff t = 244000 \cdot \frac{-\ln(\frac{p}{100})}{\ln(2)} = 244000 \cdot \frac{\ln(\frac{100}{p})}{\ln(2)} \end{aligned}$$

Numerische Auswertung:

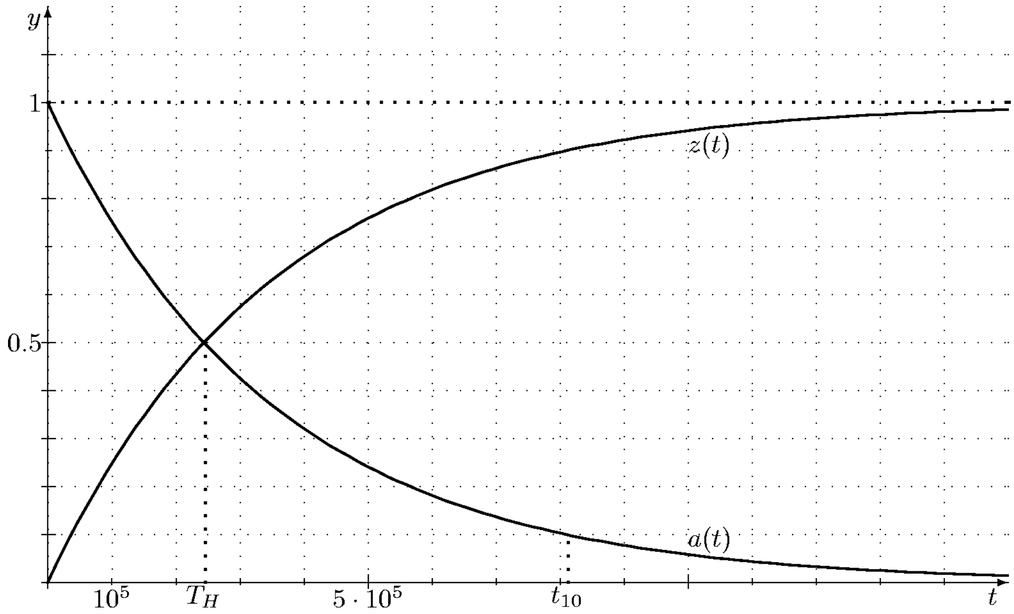
$$\begin{aligned} p = 10: &\quad t_{10} = 244000 \cdot \frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 810550\,, \\ p = 5: &\quad t_5 = 244000 \cdot \frac{\ln 20}{\ln 2} \approx 1054550\,, \quad (= t_{10} + 244000!) \\ p = 1: &\quad t_1 = 244000 \cdot \frac{\ln 100}{\ln 2} \approx 1621101\,. \end{aligned}$$

c) Der bereits zerfallene Anteil ist gegeben durch

$$z(t) = 1 - a(t) = 1 - 2^{-\frac{t}{T_H}} .$$

Den Graphen dieser Funktion z erhält man durch Spiegelung des Graphen von a an der x-Achse ($-a(t)$) und anschließender Verschiebung um 1 nach oben ($1 - a(t)$).

Dies ist dasselbe wie die Spiegelung des Graphen von a an der Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}$.



S. 98, Aufgabe 38: Anmerkung: Die in der Aufgabenstellung als *Wachstumsrate* bezeichnete Größe α ist in der Bezeichnung unseres Lehrbuchs die Wachstumskonstante (= relative *momentane* Änderungsrate $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$).

a) Die gefragte Größe ist

$$N(2000) = 120 \cdot 10^6 \cdot e^{0{,}03 \cdot 10} \approx 161{,}98 \cdot 10^6\,.$$

b) Gesucht ist also die Zeitspanne Δt mit

$$\frac{1}{2} = e^{\alpha \Delta t} \iff \alpha\Delta t = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \iff \Delta t = -\frac{\ln 2}{\alpha} \approx -23{,}1\,.$$

Also jeweils etwa 23 Jahre vor einem beliebigen Zeitpunkt war die Bevölkerung halb so groß wie zu diesem Zeitpunkt. (Bezogen auf 1990 also im Jahre 1967 oder bezogen auf 2000 im Jahre 1977.)

c) Die jährliche Änderungsrate ist

$$\frac{N(t+1) - N(t)}{N(t)} = \frac{N(t+1)}{N(t)} - 1 = e^{0{,}03} - 1 \approx 0{,}030454534 = 3{,}0454534\%\,.$$

Die jährliche Änderungsrate ist also ungefähr (aber eben nicht gleich) der Wachstumskonstanten. (Beachten Sie: $1 + x$ ist die Tangentenfunktion zu e^x an der Stelle 0. Für 'kleine' x ist daher $e^x \approx 1 + x$. Hier bedeutet dies, dass die jährliche Wachstumsrate $e^\alpha - 1$ ungefähr gleich der Wachstumskonstanten α ist. Mit wachsendem α wird die Abweichung aber immer größer.)

S. 98, Aufgabe 39: Es sei $N(t)$ die Bevölkerungszahl zur Zeit t (in Jahren). Da eine konstante Wachstumsrate vorgegeben ist, liegt exponentielles Wachstum vor:

$$N(t) = N_0 \cdot a^t \quad \text{mit } a = 1 + 0{,}005 = 1{,}005\,.$$

Aus dem angegebenen *absoluten* Wachstum von 2 Millionen in 5 Jahren erhalten wir

$$2 \cdot 10^6 = N(5) - N_0 = N_0 \cdot (a^5 - 1) \iff N_0 = \frac{2 \cdot 10^6}{1{,}005^5 - 1} \approx 79{,}2 \cdot 10^6\,.$$

Nach Ablauf der 5 Jahre beträgt die Bevölkerungszahl also $79{,}2 + 2 = 81{,}2$ Millionen. Die Verdopplungszeit t bestimmt sich durch

$$2 = a^t \iff t = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}005} \approx 138{,}98\,.$$

Bei einem 0,5-prozentigen jährlichen Wachstum verdoppelt sich die Bevölkerungszahl in etwa 139 Jahren.

S. 99, Aufgabe 40: (Wir bearbeiten die Aufgabe mit den gegebenen (veralteten) Daten.) Es sei $U(t)$ bzw. $M(t)$ die Bevölkerungszahl (in Millionen) der USA bzw. von Mexiko zur Zeit t (in Jahren seit 1987). Damit ist lt. Vorgabe $U_0 = 242$ und $M_0 = 81$. Das konstante jährliche Bevölkerungswachstum ist mit $p_U = 0{,}01$ und $p_M = 0{,}026$ angegeben. Also lauten die Wachstumsfunktionen

$$U(t) = U_0(1 + p_U)^t = 242 \cdot 1{,}01^t\,, \qquad M(t) = M_0(1 + p_M)^t = 81 \cdot 1{,}026^t\,.$$

Skizzen siehe unten.
b) Die Verdopplungszeiten t_U bzw. t_M für die USA bzw. Mexiko ergeben sich zu

$$2 = (1 + p_U)^{t_U} = 1{,}01^{t_U} \iff t_U = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}01} \approx 69{,}66\,,$$
$$2 = (1 + p_M)^{t_M} = 1{,}026^{t_M} \iff t_M = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}026} \approx 27\,.$$

c) Gesucht ist die Zeit t mit

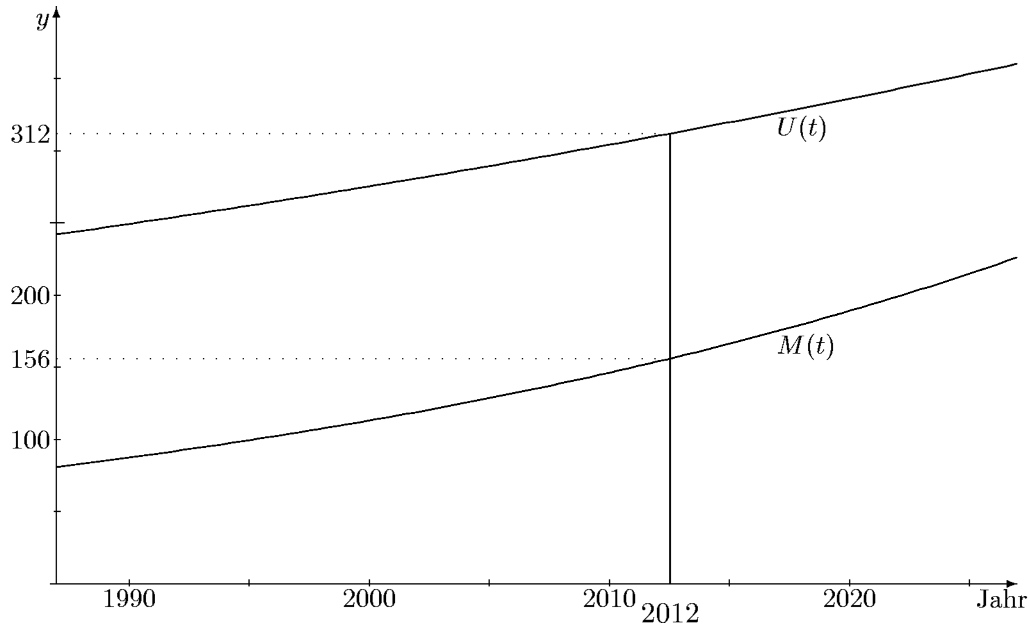
$$M(t) = \frac{U(t)}{2} \iff 2 \cdot 81 \cdot 1{,}026^t = 242 \cdot 1{,}001^t\,.$$

Diese Exponentialgleichung wird wie üblich durch Logarithmieren gelöst:

$$M(t) = \frac{U(t)}{2} \iff \ln 162 + t \ln 1{,}026 = \ln 242 + t \ln 1{,}01$$
$$\iff t = \frac{\ln 242 - \ln 162}{\ln 1{,}026 - \ln 1{,}01} \approx 25{,}53\,.$$

Zu diesem Zeitpunkt (im Jahre 2012) beträgt die Bevölkerungszahl von Mexiko bzw. der USA (in Millionen)

$$M(25{,}5) = 81 \cdot 1{,}026^{25{,}5} = 156\,, \quad U(25{,}5) = 242 \cdot 1{,}01^{25{,}5} = 312\,.$$



S. 99, Aufgabe 41: Es sei $p(h)$ der Luftdruck (gemessen in hPa) in der Höhe h über dem Meer (gemessen in km). Vorgegeben ist $p_0 = 1013$ sowie eine konstante Änderungsrate. Also liegt exponentielle Abnahme vor und wir können ansetzen:

$$p(h) = p_0 \cdot a^h \,.$$

Die Änderungsrate pro 1000 m ist $p = -12\%$ (negativ, da der Luftdruck abnimmt), also ist der Änderungsfaktor $a = 1 + p = 0{,}88$ und es gilt

$$p(h) = 1013 \cdot 0{,}88^h \,.$$

Numerische Ergebnisse:

$$\begin{aligned} 100\,\text{m}: &\quad p(0{,}1) = 1013 \cdot 0{,}88^{0{,}1} \approx 1000{,}1\,, \\ 2000\,\text{m}: &\quad p(2) = 1013 \cdot 0{,}88^2 \approx 784{,}5\,, \\ 8000\,\text{m}: &\quad p(8) = 1013 \cdot 0{,}88^8 \approx 364{,}3\,. \end{aligned}$$

Die 'Halbwertshöhe' H (in km) ist gegeben durch

$$\frac{1}{2} = 0{,}88^H \iff H = -\frac{\ln 2}{\ln 0{,}88} \approx 5{,}422\,.$$

In einer Höhe von etwa 5422 Metern ist der Luftdruck auf die Hälfte gesunken.
b) Zunächst schreiben wir die Funktion von der Variablen h (in km) auf x (in m) um. Ist x die Höhe in Metern, so ist $h = \frac{x}{1000}$ die Höhe in km, also ist der Druck in der Höhe x

$$p(h) = p(x/1000) = p_0 \cdot 0{,}88^{\frac{x}{1000}} \,.$$

Mit $0{,}88 = e^{\ln 0{,}88}$ erhält man daraus die geforderte Beschreibung

$$x \mapsto p_0 \cdot \left(e^{\ln 0{,}88}\right)^{\frac{x}{1000}} = p_0 \cdot e^{\frac{x \ln 0{,}88}{1000}} = p_0 \cdot e^{-kx} \quad \text{mit } k = \frac{-\ln 0{,}88}{1000} \approx 0{,}000127833$$