Taylor-Approximation differenzierbarer Funktionen

1. Tangenten und das Approximationsproblem. Im Rahmen der Differentialrechnung haben wir den Begriff der *Tangente* bzw. der *Tangentenfunktion* präzisiert. Ist eine differenzierbare Funktion f und eine Stelle a gegeben, so ist die Tangentenfunktion t die *lineare* Funktion, die bei a denselben *Wert* und denselben *Anstieg* wie f hat:

$$t(x) \text{ linear mit } \quad t(a) = f(a)\,,\; t'(a) = f'(a)\,.$$

Mit dem Ansatz $t(x) = mx + b$ erhält man aus den obigen Forderungen $m = f'(a)$, $b = f(a) - f'(a) \cdot a$ und damit die bekannte Formel für die Tangentenfunktion:

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)\,.$$

Der Graph von t ist dann die *Tangente* von f an der Stelle a; diese *berührt* den Graphen von f an der Stelle a. Dies bedeutet, dass sich in der Nähe von a die beiden Funktionen f und t sehr wenig unterscheiden: Die Funktion f wird durch die lineare Funktion t *approximiert.*

Dies macht man sich in der Physik und allgemein in den Naturwissenschaften zunutze, indem man eine komplizierte, evtl. nicht gut bekannte Funktion f durch ihre *lineare Approximation* t ersetzt. Man erhält so in *erster Näherung* Informationen über f. Je nach Problemstellung kann aber diese lineare Approximation noch nicht ausreichen; man sucht nach einer besseren Approximation. Man erweitert dazu die Forderungen und verlangt neben der Übereinstimmung von Wert und Anstieg an der Stelle auch noch die Übereinstimmung der *Krümmung,* d. h. der *zweiten* Ableitung, an der Stelle. Dies gelingt jedoch nicht mit linearen Funktionen (deren Graphen sind bekanntlich nicht gekrümmt); man muss quadratische Funktionen betrachten.

2. Ein Beispiel: Wir wissen, dass die Cosinusfunktion cos folgende Ableitungswerte[1)] an der Stelle 0 hat:

$$\cos(0) = 1\,,\; \cos'(0) = 0\,,\; \cos''(0) = -1\,.$$

Wir suchen nun eine quadratische Funktion p, deren Ableitungswerte an der Stelle 0 damit übereinstimmen:

$$p(0) = 1\,,\; p'(0) = 0\,,\; p''(0) = -1\,.$$

Dies sind 3 lineare Bedingungen an die drei Koeffizienten des Polynomterms $p(x) = ax^2 + bx + c$ und man erhält die eindeutige Lösung

$$p(x) = 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$

Man erkennt an der nachfolgenden linken Skizze von p (gestrichelt der Verlauf von cos), dass *in der Nähe der Stelle 0* p eine gute Approximation für cos ist.

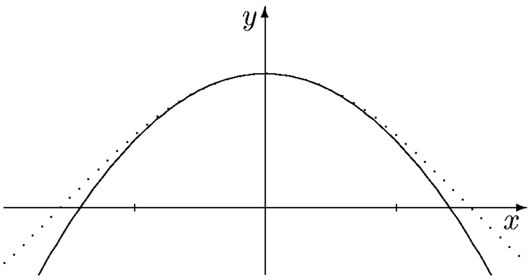
---

1) Die Ausgangsfunktion c verstehen wir auch als 0-te Ableitung und fassen daher im folgenden den Funktionswert $c(0)$ immer auch als Ableitungswert auf.

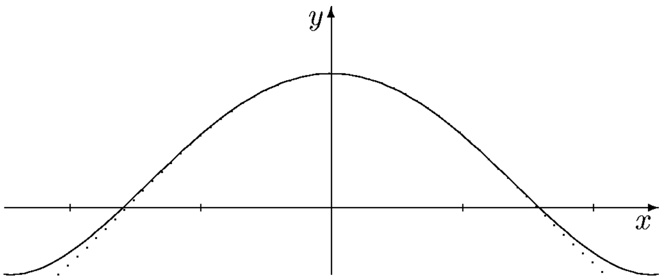
Will man noch bessere Approximationen bestimmen, muss man die Werte weiterer Ableitungen von cos benutzen und Polynomterme höheren Grades bestimmen. So sucht man etwa eine ganzrationale Funktion q, die bis zur 4. Ableitung dieselben Ableitungswerte wie cos hat. Da nun 5 Bedingungen gefordert sind, muss man die Funktion q mit 5 Koeffizienten ansetzen, sie ist also vom Grade ≤ 4. Ausgehend von den Werten $\cos'''(0) = 0$, $\cos^{(4)}(0) = 1$ erhält man dann wieder eine eindeutige Lösung:

$$q(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\,.$$

Die rechte Skizze zeigt den Vergleich des Graphen von q (durchgezogene Linie) mit dem von cos (gestrichelt):



Graph von p



Graph von q

Offenbar wird die Approximation mit höherem Grad besser.

3. Taylorpolynome. Wir wollen nun systematisch diese Approximation durch ganzrationale Funktionen höheren Grades studieren.

Satz/Definition: *Es sei f eine beliebig oft differenzierbare Funktion und a eine Stelle im Definitionsbereich. Dann gibt es für jede natürliche Zahl n genau eine ganzrationale Funktion p_n vom Grad $\leq n$, die bis zur n-ten Ableitung dieselben Ableitungswerte an der Stelle a hat wie f:*

$$p_n(a) = f(a)\,,\ p_n'(a) = f'(a)\,,\ p_n''(a) = f''(a)\,,\ldots, p_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)\,.$$

Man nennt diese ganzrationale Funktion p_n auch das n-te Taylorpolynom von f zur Stelle a. Explizit ist $p_n(x)$ gegeben durch

$$\boxed{p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,,}$$

wobei für eine natürliche Zahl n die Zahl $n!$ (lesen Sie: 'n Fakultät') das Produkt der Zahlen von 1 bis n bezeichnet:

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n\,.}$$

Es ist $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, usw. Man setzt (aus guten Gründen) $0! = 1$.

Beweis: Wir behandeln zunächst den Fall $a = 0$ und setzen die gesuchte ganzrationale Funktion p_n vom Grad $\leq n$ an als

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n.$$

Die für p_n geforderten Eigenschaften $p_n(0) = f(0)$, $p_n'(0) = f'(0), \ldots, p_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$ stellen insgesamt $n+1$ lineare Gleichungen für die $n+1$ unbekannten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ dar. Die Matrix dieses linearen Gleichungssystems ist von besonders einfacher Bauart:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & f(0) \\
0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & f'(0) \\
0 & 0 & 2! & 0 & & 0 & f''(0) \\
0 & 0 & 0 & 3! & & 0 & f'''(0) \\
\vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n! & f^{(n)}(0)
\end{array}\right)$$

Die Koeffizientenmatrix ist eine sog. *Diagonalmatrix,* die nur in der 'Hauptdiagonalen' von 0 verschiedene Einträge hat, und zwar gerade die Folge der Fakultäten: $0! = 1$, $1! = 1$, $2!$, …, $n!$. Eine solche Matrix hat offenbar den maximal möglichen Rang $n+1$, das Gleichungssystem ist also für jede rechte Seite eindeutig lösbar; und die Lösung berechnet sich unmittelbar wie im Satz angegeben.

Wir führen nun den Fall einer beliebigen Stelle a auf den Fall $a = 0$ zurück, indem wir zunächst a nach 0 verschieben, dann das obige Ergebnis anwenden und dann wieder von 0 nach a zurückverschieben.

Wir betrachten daher statt $f(x)$ die Funktion $g(x) = f(x+a)$. Deren Graph ergibt sich aus dem Graphen von f durch eine Verschiebung in x-Richtung um $-a$; dabei wird die Stelle a zur Stelle 0 verschoben: $g(0) = f(a)$. Nun gilt nach Kettenregel $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x+a)$, so dass auch für alle Ableitungen gilt $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$. Wendet man die obige Überlegung für g und die Stelle 0 an, so folgt: Es gibt genau eine ganzrationale Funktion (nennen wir sie q_n) vom Grad $\leq n$ mit $q_n^{(k)}(0) = g^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$ für $k = 0, \ldots, n$; sie ist explizit berechenbar durch

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k .$$

Verschiebt man nun alles wieder zurück (d. h. ersetzt man überall x durch $x - a$), so erhält man genau eine ganzrationale Funktion

$$p_n(x) = q_n(x-a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

vom Grade $\leq n$ mit den geforderten Eigenschaften

$$p_n^{(k)}(a) = q_n^{(k)}(0) = g^{(k)}(0) = f^{(k)}(a) \quad (k = 0, \ldots, n) .$$

4. Berechnung von Wurzeln. Die Berechnung von Quadratwurzeln ist das erste über die Grundrechenarten hinausgehende Problem. Wir wollen hier die mathematischen Grundlagen dafür verstehen. Für dieses Problem fasst man natürlich die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ins Auge. Als Stelle a kann man jedoch nicht $a = 0$ wählen, da f dort nicht differenzierbar ist! Wir wählen daher $a = 1$, eine Stelle, an der f (und auch alle

Ableitungswerte) berechenbar sind:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}\,, \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,, \\ f''(x) &= \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot x^{-\frac{3}{2}}\,, \\ f'''(x) &= \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdot x^{-\frac{5}{2}}\,, \end{aligned}$$

und deren Werte an der Stelle 1:

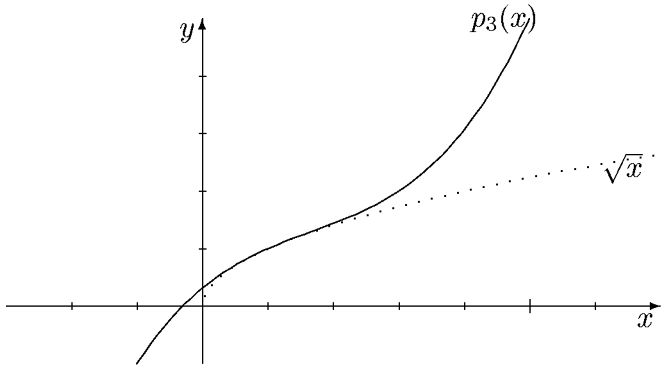
$$f(1) = 1\,,\ f'(1) = \frac{1}{2}\,,\ f''(1) = -\frac{1}{4}\,,\ f'''(1) = \frac{3}{8}\,.$$

Damit erhält man das dritte Taylorpolynom an der Stelle 1

$$p_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}\cdot\frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{3}{8}\cdot\frac{(x-1)^3}{3!} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3\,.$$

Wenn man nun aber den Wert des Taylorpolynoms $p_3(6)$ vergleicht mit $f(6) = \sqrt{6}$, erlebt man eine Enttäuschung: $p_3(6) = 8{,}1875$ kann kaum als 'Annäherung' an $\sqrt{6}$ bezeichnet werden, da $\sqrt{6}$ ja kleiner als 3 sein muss (wegen $3^2 = 9 > 6$).

Die folgende Skizze von $\sqrt{x}$ und $p_3(x)$ zeigt die Diskrepanz überdeutlich:



Zugleich zeigt diese Skizze aber auch, dass *in der Nähe der Stelle 1* das Taylorpolynom anscheinend eine *gute* Approximation für $\sqrt{x}$ ist. Man kann also mit Hilfe des Taylorpolynoms näherungsweise die Wurzel aus solchen Zahlen ziehen, die nahe bei 1 liegen. Mit ein wenig Überlegung kann man dies benutzen, um auch unser Ausgangsproblem, nämlich $\sqrt{6}$ anzunähern, zufriedenstellend zu lösen.

Wir benutzen dazu die Rechengesetze für Wurzelterme:

$$\sqrt{6} = \sqrt{\frac{6}{c}}\cdot\sqrt{c}\,.$$

Wenn man nun $c > 0$ so wählt, dass $\frac{6}{c}$ nahe bei 1 liegt und zugleich $\sqrt{c}$ bekannt ist, so kann man auch $\sqrt{6}$ näherungsweise berechnen. Wir erreichen dies, indem wir c als *Quadratzahl nahe bei 6* wählen, etwa $c = 6{,}25 = 2{,}5^2$. Dann erhalten wir

$$\sqrt{6} = \sqrt{\frac{6}{6{,}25}}\cdot\sqrt{6{,}25} = \sqrt{\frac{24}{25}}\cdot 2{,}5\,.$$

Zur näherungsweisen Berechnung der Quadratwurzel aus $\frac{24}{25}$ benutzen wir p_3 und erhalten

$$\sqrt{\frac{24}{25}} \approx p_3(\frac{24}{25}) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{25}) - \frac{1}{8} \cdot (-\frac{1}{25})^2 + \frac{1}{16} \cdot (-\frac{1}{25})^3 = \frac{244949}{250000} = 0{,}979796\,.$$

Dies ergibt als Näherungswert für $\sqrt{6}$ den Wert

$$\sqrt{6} \approx 2{,}5 \cdot 0{,}979796 \approx 2{,}44949$$

(Ein Vergleich mit dem (Näherungs-)Wert des Taschenrechners 2,449489743 zeigt eine Abweichung erst in der 7. Stelle hinter dem Komma: $2{,}449489743 - 2{,}44949 = -\,0{,}000000257$.)

5. Die Fehlerabschätzung. Der letzte Vergleich mit dem Taschenrechner ist etwas irreführend. Wenn wir die mathematischen Grundlagen für den Taschenrechner verstehen wollen, können wir ihn nicht zugleich benutzen, um die Qualität unserer Taylorapproximation zu untermauern. Wir müssen vielmehr *unabhängig vom Taschenrechner* fundierte Aussagen über den Fehler machen, d. h. die Abweichung zwischen Taylorpolynom und der zu approximierenden Funktion abschätzen. Dies leistet der folgende Satz:

Fehlerabschätzung bei der Taylorapproximation: *Es sei f eine beliebig oft differenzierbare Funktion, $p_n(x)$ das n-te Taylorpolynom zur Stelle a und $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ das sog. Restglied. Dieses kann man wie folgt abschätzen:*
Gilt über einem Intervall I, welches a enthält, die Abschätzung

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq C$$

mit einer reellen Zahl C, so gilt über demselben I

$$|R_n(x)| \leq C \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Wir wollen dieses wichtige Resultat nun auf unser Beispiel anwenden. Wir hatten das dritte Taylorpolynom p_3 betrachtet, also $n = 3$ gesetzt. Um die obige Fehlerabschätzung benutzen zu können, müssen wir I wählen und dann C bestimmen. Da wir $\sqrt{\frac{24}{25}}$ durch $p_3(\frac{24}{25})$ angenähert haben, müssen wir $R_3(\frac{24}{25})$ abschätzen. Wir wählen unser Intervall I so, dass 1 und $\frac{24}{25}$ darin liegen, also $I = [\frac{24}{25}, 1]$.

Wir müssen nun C bestimmen. Wir suchen also den größten Wert, den der Betrag der 4. Ableitung $\left|f^{(4)}(x)\right|$ im Bereich $\frac{24}{25} \leq x \leq 1$ annehmen kann. (Dies ist im Grunde eine Extremwertaufgabe: Man bestimme den größten/kleinsten Wert einer Funktion über einem gegebenen Bereich. Man kann hier also die bekannten Methoden der Kurvendiskussion anwenden. In diesem Fall ist dies unnötig, da die Funktion $f^{(4)}$ monoton fällt, sie also ihren größten Wert an der kleinsten Stelle x annimmt, also bei $\frac{24}{25}$.)

Wir berechnen zunächst

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16} \cdot x^{-\frac{7}{2}}\,,$$

und schätzen die x-Potenz ab:

$$\frac{24}{25} = 0{,}96 \leq x \leq 1 \Longrightarrow (\sqrt{0{,}96})^7 \leq x^{\frac{7}{2}} \leq 1 \tag{$*$}$$

Wir müssen nun, um weiter abschätzen zu können, $\sqrt{0{,}96}$ bestimmen, womit wir scheinbar wieder am Ausgangspunkt sind. Aber wir brauchen hier keinen exakten Wert, auch keinen Näherungswert; eine *Abschätzung* für $\sqrt{0{,}96}$ nach unten genügt. Diese erhalten wir etwa durch die Überlegung:

$$\sqrt{0{,}96} \geq \sqrt{0{,}81} = 0{,}9\,.$$

Wir fahren also bei $(*)$ fort:

$$(*) \Longrightarrow 0{,}9^7 \leq x^{\frac{7}{2}} \leq 1 \Longrightarrow 0{,}47 \leq x^{\frac{7}{2}} \leq 1 \tag{$**$}$$

Beim nun folgenden Übergang zu den Kehrwerten kehren sich die Ungleichungen um, und wir folgern:

$$(**) \Longrightarrow \frac{1}{0{,}47} \geq x^{-\frac{7}{2}} \geq 1 \Longrightarrow 2{,}1 \geq x^{-\frac{7}{2}} \geq 1$$

Also folgt für $x \in I$:

$$\left|f^{(4)}(x)\right| \leq \frac{15}{16} \cdot 2{,}1 \leq 2\,.$$

Damit ist $C = 2$ und unsere Fehlerabschätzung lautet:

$$|R_3(x)| \leq 2 \cdot \frac{|x-1|^4}{4!} \quad \text{für } 0{,}96 \leq x \leq 1\,.$$

Dies ergibt für $x = 0{,}96$:

$$|R_3(0{,}96)| \leq 2 \cdot \frac{0{,}04^4}{24} \leq 2{,}2 \cdot 10^{-7}\,.$$

Der Fehler bei der Berechnung von $\sqrt{\frac{24}{25}}$ liegt also in der 7. Stelle hinter dem Komma. Dies ergibt nach Multiplikation mit 2,5 für $\sqrt{6}$ einen Fehler von höchstens $2{,}5 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-7} \leq 5{,}5 \cdot 10^{-7}$:

$$\sqrt{6} \approx \underline{2{,}4494900}\,.$$

6. Beweis der Fehlerabschätzung. Wir wollen nun den Nachweis für die obige Fehlerabschätzung liefern. Dieser ist ein sehr schönes Beispiel für die Anwendung der Differential- und Integralrechnung und zeigt damit die fundamentale Bedeutung dieses Bereichs der Mathematik.

Grundlage der Fehlerabschätzung sind die folgenden Eigenschaften des Restgliedes. Wir fixieren n und lassen zur Vereinfachung der Schreibweise den Index n bei R_n weg. Aus $R(x) = f(x) - p_n(x)$ folgt dieselbe Beziehung für die höheren Ableitungen

$$R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - p_n^{(k)}(x) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,,$$

und daher

$$\begin{aligned} R(a) &= f(a) - p_n(a) = 0\,, \\ R'(a) &= f'(a) - p_n'(a) = 0\,, \\ &\vdots \quad \vdots \\ R^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) - p_n^{(n)}(a) = 0\,. \end{aligned}$$

Da für die ganzrationale Funktion p_n vom Grad $\leq n$ die n-te Ableitung den Grad 0 hat, also konstant ist, ist die $n+1$-te Ableitung *überall* 0. Man erhält so

$$R^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - p_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \quad \text{für } alle \;\; x\,.$$

Gemäß der Voraussetzung des Satzes über die Restgliedabschätzung gilt daher

$$\left|R^{(n+1)}(x)\right| = \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq C \quad \text{für alle } x \in I\,.$$

Aufgabe ist es nun, aus dieser Abschätzung der $n+1$-ten Ableitung von R unter Verwendung der Ableitungswerte $R^{(k)}(a) = 0$ die behauptete Abschätzung für das Restglied $R(x)$ selbst zu folgern.

Wir benutzen dazu den Zusammenhang zwischen Ableitung und Integral.

Integralabschätzung. Wir erinnern an den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Ist F eine Stammfunktion von f mit $F(a) = 0$, so ist

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

denn $\int_a^x f = \int_a^x f(t)\,dt = \big[F(t)\big]_a^x = F(x) - F(a) = F(x)$.

Nun ist $R^{(n)}$ offenbar eine Stammfunktion von $R^{(n+1)} = f^{(n+1)}$, und zwar mit dem Wert 0 an der Stelle a, also gilt

$$R^{(n)}(x) = \int_a^x R^{(n+1)} = \int_a^x f^{(n+1)} = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Wegen der Abschätzung $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq C$ über dem Integrationsintervall gilt

$$\left|R^{(n)}(x)\right| = \left|\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \leq \left|\int_a^x C dt\right| = \left|\big[Ct\big]_a^x\right| = |C(x-a)|\;.$$

Geht man nun von dieser neuen Abschätzung $\left|R^{(n)}(t)\right| \leq |C(t-a)|$ aus und wendet die obigen Überlegungen auf $R^{(n-1)}(x) = \int_a^x R^{(n)}(t)\,dt$ an, so erhält man

$$\left|R^{(n-1)}(x)\right| = \left|\int_a^x R^{(n)}(t)\,dt\right| \leq \left|\int_a^x C(t-a)\,dt\right| = \left|\big[C\cdot\frac{1}{2}(t-a)^2\big]_a^x\right| = C\cdot\frac{1}{2}\,|x-a|^2\;.$$

Dies wiederholt man nun, erhält beim nächsten Schritt $\left|R^{(n-2)}(x)\right| \leq C\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot|x-a|^3$ und kommt schließlich nach insgesamt $n+1$ Schritten zur Behauptung

$$|R(x)| \leq C\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n+1}\,|x-a|^{n+1} = C\cdot\frac{1}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1}\;.$$

Abschließend noch die Skizzen der im Unterricht dargestellten Taylorpolynome zum Sinus: