## Übungen zur Selbstkontrolle I

1) Gegeben sind die Zahlen

$$a = 1200\,,\ b = 108\,900\,,\ c = 216\,000\,,\ d = 326\,700 \text{ und } e = 33 \cdot 275 \cdot 144\,.$$

a) Bestimmen Sie von allen Zahlen die Primfaktorzerlegung.
b) Untersuchen Sie die Zahlen auf gegenseitige Teilbarkeit.
c) Bestimmen Sie für alle Zahlenpaare den ggT und das kgV.
d) Welche dieser Zahlen sind Quadratzahlen (zweite Potenzen) oder Kubikzahlen (dritte Potenzen)? Welches ist ggf. die Basis?

**Lösung:**
a) Primzerlegungen:

$$
\begin{aligned}
a &= 12 \cdot 100 = 3 \cdot 4 \cdot 10^2 = 3 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2\,,\\
b &= 1089 \cdot 100 = 9 \cdot 121 \cdot 10^2 = 3^2 \cdot 11^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2\,,\\
c &= 216 \cdot 1000 = 2 \cdot 108 \cdot 10^3 = 2 \cdot 2 \cdot 54 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^2 \cdot 2 \cdot 27 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3\,,\\
d &= 3267 \cdot 100 = 9 \cdot 363 \cdot 10^2 = 3^2 \cdot 3 \cdot 121 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2\,,\\
e &= (3 \cdot 11) \cdot (5 \cdot 55) \cdot 12^2 = 3 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 4^2 \cdot 3^2 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2
\end{aligned}
$$

b) Es gilt $b \mid d \mid e$, denn in der Primzerlegung von $b$ sind alle auftretenden Exponenten kleiner-gleich den entsprechenden Exponenten in der Primzerlegung von $d$, und diese wiederum sind kleiner-gleich den entsprechenden Exponenten in der Primzerlegung von $e$.
Genauso gilt $a \mid c$ und $a \mid e$, denn in der Primzerlegung von $a$ sind alle Exponenten kleiner-gleich den entsprechenden Exponenten in der Primzerlegung von $c$ bzw. von $e$.
Weitere Teilbarkeiten gibt es nicht: $b \nmid a$, da in der Primzerlegung von $b$ der Exponent der 3 (er hat den Wert 2) größer ist als der Exponent der 3 in der Primzerlegung von $a$ (dieser hat den Wert 1).
$b \nmid c$, da in der Primzerlegung von $b$ der Exponent der 11 (er hat den Wert 2) größer ist als der Exponent der 11 in der Primzerlegung von $c$ (er hat den Wert 0, da 11 in der Primzerlegung nicht vorkommt).
Genauso begründet man alle anderen Aussagen über Nicht-Teilbarkeit.
c) Aus $b \mid d \mid e$ entnimmt man zunächst

$$\mathrm{ggT}(b,d) = \mathrm{ggT}(b,e) = b\,,\ \mathrm{ggT}(d,e) = d\,,\quad \mathrm{kgV}(b,e) = \mathrm{kgV}(d,e) = e\,,\ \mathrm{kgV}(b,d) = d\,.$$

Genauso folgt

$$\mathrm{ggT}(a,c) = \mathrm{ggT}(a,e) = a\,,\ \mathrm{kgV}(a,c) = c\,,\ \mathrm{kgV}(a,e) = e\,.$$

Für die anderen Zahlenpaare benutzen wir die Primzerlegungen, um ggT und kgV zu bestimmen. Den ggT erhält man, indem man bei allen Primfaktoren den jeweils *kleineren* Exponenten wählt. Dabei sind nicht vorhandene Primfaktoren als Potenz mit Exponent 0 zu lesen.

$$\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(2^4 \cdot 3 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300\,.$$

Beim kgV muss man den jeweils *größeren* Exponenten wählen:

$$\mathrm{kgV}(a,b) = \mathrm{kgV}(2^4 \cdot 3 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2\,.$$

Auf diese Weise erhält man die Ergebnisse in den folgenden Tabellen:

**größter gemeinsamer Teiler**

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ | $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ | $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ | $a$ |
| $b$ | | $b$ | $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | | | $c$ | $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ | $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ |
| $d$ | | | | $d$ | $d$ |
| $e$ | | | | | $e$ |

**kleinstes gemeinsames Vielfaches**

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2$ | $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ | $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2$ | $e$ |
| $b$ | | $b$ | $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$ | $d$ | $e$ |
| $c$ | | | $c$ | $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$ | $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$ |
| $d$ | | | | $d$ | $e$ |
| $e$ | | | | | $e$ |

d) $b$ ist eine Quadratzahl, da in der Primzerlegung alle Exponenten gerade sind; $b = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11)^2 = 330^2$.
$c$ ist eine Kubikzahl, da in der Primzerlegung alle Exponenten durch drei teilbar sind: $c = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^3 = 60^3$.
Bei den drei anderen Zahlen besitzen die Exponenten in der Primzerlegung keinen gemeinsamen Teiler außer 1; diese Zahlen sind also weder Quadrat- noch Kubikzahlen.

## Übungen zur Selbstkontrolle II

1) Beschreiben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form:
   a) die Menge der geraden natürlichen Zahlen,
   b) die Menge der zweistelligen Vielfachen von sieben,
   c) die Menge $T_{48}$ der Teiler von 48,
   d) entfallen
   e) die Menge der Potenzen von 3.
   Welche der Mengen sind endlich, welche unendlich?
2) Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch eine charakteristische Eigenschaft:
   a) $A = \{6, 12, 18, 24, \ldots\}$,
   b) $B = \{10, 100, 1000, 10000, \ldots\}$,
   c) $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$,
   d) $D = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$,
   e) $E = \{4, 9, 25, 49, 121, 169, \ldots\}$,
   f) $F = \{1, 8, 27, 64, 125, \ldots\}$.
3) Wir bezeichnen für natürliche Zahlen $d$ mit $T_d$ die Menge aller Teiler von $d$.
   a) Bestimmen Sie die Mengen $T_{18}$, $T_{24}$, $T_{36}$ und $T_{72}$ in aufzählender Darstellung.
   b) Bestimmen Sie in aufzählender Darstellung die Menge $M$ aller natürlichen Zahlen, die sowohl zu $T_{18}$ als auch zu $T_{24}$ gehören. Beschreiben Sie $M$ durch eine charakteristische Eigenschaft.
   c) Welche Teilmengenbeziehungen $\ldots \subset \ldots$ gelten zwischen den 5 Mengen aus a) bzw. b)? Welche gelten nicht ($\ldots \not\subset \ldots$)?

## Übungen zur Selbstkontrolle II — Lösungen

1) a) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$,
b) $\{14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}$,
c) $T_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$,
d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$,
e) $\{3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots\} = \{3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, \ldots\}$.
Die Mengen unter a) und e) sind unendlich, die anderen endlich.

2) a) $A$ ist die Menge der Vielfachen von 6.
b) $B$ ist die Menge der Potenzen von 10.
c) $C$ ist die Menge der Teiler von 24.
d) $D$ ist die Menge der Primzahlen.
e) $E$ soll die Menge der Quadrate von Primzahlen darstellen, und
f) $F$ die Menge aller Kuben (dritten Potenzen) von natürlichen Zahlen.

3) a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
T_{18} &= \{1, 18, 2, 9, 3, 6\} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}\,, \\
T_{24} &= \{1, 24, 2, 12, 3, 8, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}\,, \\
T_{36} &= \{1, 36, 2, 18, 3, 12, 4, 9, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}\,, \\
T_{72} &= \{1, 72, 2, 36, 3, 24, 4, 18, 6, 12, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}\,.
\end{aligned}$$

b) Es ist $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Dies ist die Menge der Teiler von 6: $M = T_6$. Beachten Sie: Definitionsgemäß besteht $M$ aus allen gemeinsamen Teilern von 18 und 24; der größte darunter ist die 6: $6 = \mathrm{ggT}(18, 24)$. Wir sehen, dass die Menge der *gemeinsamen* Teiler zweier Zahlen gerade die Teiler des ggT sind.

c) Da 18 ein Teiler von 36 ist, ist jeder Teiler von 18 auch ein Teiler von 36. Dies bedeutet, dass *jede* Zahl aus $T_{18}$ auch zu $T_{36}$ gehört: $T_{18} \subset T_{36}$. Genauso findet man $T_{36} \subset T_{72}$ und $T_{24} \subset T_{72}$.
Gemäß der Definition gilt $M \subset T_{18}$ und $M \subset T_{24}$, so dass $M$ in allen anderen Mengen enthalten ist. Weitere Teilmengenbeziehungen gibt es nicht: $T_{18} \not\subset T_{24} \not\subset T_{36}$. Eine vollständige Übersicht enthält das folgende Diagramm:

| | $M$ | $T_{18}$ | $T_{24}$ | $T_{36}$ | $T_{72}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | $=$ | $\subset$ | $\subset$ | $\subset$ | $\subset$ |
| $T_{18}$ | $\not\subset$ | $=$ | $\not\subset$ | $\subset$ | $\subset$ |
| $T_{24}$ | $\not\subset$ | $\not\subset$ | $=$ | $\not\subset$ | $\subset$ |
| $T_{36}$ | $\not\subset$ | $\not\subset$ | $\not\subset$ | $=$ | $\subset$ |
| $T_{72}$ | $\not\subset$ | $\not\subset$ | $\not\subset$ | $\not\subset$ | $=$ |

## Übungen zur Selbstkontrolle III

1) Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:
   a) $(2x + 3y)(c - d) =$
   b) $(4a + 5b)(7a - 9b) =$
   c) $(x - 4)(x - 5) =$
   d) $(p + q)(p - q)(2p + q) =$
   e) $(2a - 3b)(-2b - 3a) =$
2) Schreiben Sie die folgenden Terme als Produkt, indem Sie 'ausklammern':
   a) $9a^2b - 9ab + 18ab^3 - 54a^2b^2 =$
   b) $2xy^2 + 6x^2y^3 - 6x^3y^2 - 2x^2y^2 =$
   c) $13p^2q + 7pq - 6p^2q - 14p^3q =$
   d) $9x^3y^2z - 3xy^3z^2 + 15x^2y^2z^2 =$
3) Faktorisieren Sie die folgenden Terme (durch Ausklammern und binomische Formeln) soweit wie möglich:
   a) $4x^3 - 4xy^2 =$
   b) $2p^4q + 2p^2q^3 - 4p^3q^2 =$
   c) $7a^5b - 7ab^5 =$
   d*) $32p^4q + 2q^5 + 16p^2q^3 =$
4) Vereinfachen Sie:
   a) $(2a - b)^2 + (2a + b)^2 =$
   b) $(a + 3b)^2 - (a - 3b)^2 =$
   c) $(x + y)^4 - (x - y)^4 =$

## Übungen zur Selbstkontrolle III — Lösungen

1) a) $(2x+3y)(c-d) = 2xc - 2xd + 3yc - 3yd$,
b) $(4a+5b)(7a-9b) = 28a^2 - 36ab + 35ab - 45b^2 = 28a^2 - ab - 45b^2$, Korr.!
c) $(x-4)(x-5) = x^2 - 9x + 20$,
d) $(p+q)(p-q)(2p+q) = (p^2-q^2)(2p+q) = 2p^3 + p^2q - 2pq^2 - q^3$,
e) $(2a-3b)(-2b-3a) = -4ab - 6a^2 + 6b^2 + 9ab = -6a^2 + 5ab + 6b^2$.
2) a) $9a^2b - 9ab + 18ab^3 - 54a^2b^2 = 9ab(a - 1 + 2b^2 - 6ab)$,
b) $2xy^2 + 6x^2y^3 - 6x^3y^2 - 2x^2y^2 = 2xy^2(1 + 3xy - 3x^2 - x)$, Korr.!
c) $13p^2q + 7pq - 6p^2q - 14p^3q = 7pq + 7p^2q - 14p^3q = 7pq(1 + p - 2p^2)$,
d) $9x^3y^2z - 3xy^3z^2 + 15x^2y^2z^2 = 3xy^2z(3x^2 - yz + 5xz)$.
3) a) $4x^3 - 4xy^2 = 4x(x^2 - y^2) = 4x(x-y)(x+y)$,
b) $2p^4q + 2p^2q^3 - 4p^3q^2 = 2p^2q(p^2 + q^2 - 2pq) = 2p^2q(p-q)^2$,
c) $7a^5b - 7ab^5 = 7ab(a^4 - b^4) = 7ab(a^2+b^2)(a^2-b^2) = 7ab(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$,
d*) $32p^4q + 2q^5 + 16p^2q^3 = 2q(16p^4 + q^4 - 8p^2q^2) = 2q(4p^2 - q^2)^2 = 2q[(2p+q)(2p-q)]^2 = 2q(2p+q)^2(2p-q)^2$.
4) a) $(2a-b)^2 + (2a+b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2 + 4a^2 + 4ab + b^2 = 8a^2 + 2b^2$,
b) $(a+3b)^2 - (a-3b)^2 = a^2 + 6ab + 9b^2 - (a^2 - 6ab + 9b^2) = 12ab$,
oder mit Hilfe des dritten Binoms:
$(a+3b)^2 - (a-3b)^2 = [(a+3b) + (a-3b)] \cdot [(a+3b) - (a-3b)] = 2a \cdot 6b = 12ab$,
c) mit Hilfe des dreitten Binoms:
$(x+y)^4 - (x-y)^4 = [(x+y)^2 + (x-y)^2] \cdot [(x+y)^2 - (x-y)^2]$
$= (2x^2 + 2y^2) \cdot 4xy = 8x^3y + 8xy^3$.

## Übungen zur Selbstkontrolle IV

1) Berechnen Sie:

a) $(\frac{3}{-8} - \frac{-11}{12}) \cdot \frac{-8}{13} =$

b) $(\frac{2}{-7} + \frac{-4}{5})(\frac{13}{19} - \frac{1}{2}) =$

c) $-\frac{7}{12} + \frac{3}{4}(\frac{7}{9} - \frac{5}{18}) =$

d) $-\frac{9}{10} \cdot (\frac{4}{9} - \frac{7}{15}) \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) =$

2) Vereinfachen Sie:

a) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot (\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}) =$

b) $\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-x}{x-y} =$

c) $\frac{z^2 - 1}{z+1} - \frac{z^2 + 1}{z-1} =$

d) $(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a-b)^2}) \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} =$

3) Vereinfachen Sie die folgenden Doppelbrüche:

a) $\frac{\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}}{\frac{a-b}{a+b}} =$

b) $\frac{\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}}{\frac{(x-y)^2}{x+y}} =$

c) $\frac{\frac{1-z}{z+1}}{1 - \frac{z}{z+1}} =$

d) $\frac{\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{a^2-b^2}}{\frac{a-b}{a+b}} =$

## Übungen zur Selbstkontrolle IV — Lösungen

1) a) $(\frac{3}{-8} - \frac{-11}{12}) \cdot \frac{-8}{13} = (-\frac{3}{8} + \frac{11}{12}) \cdot (-\frac{8}{13}) = \frac{-9+22}{24} \cdot (-\frac{8}{13}) = -\frac{13 \cdot 8}{24 \cdot 13} = -\frac{1}{3}$

b) $(\frac{2}{-7} + \frac{-4}{5})(\frac{13}{19} - \frac{1}{2}) = \frac{-10-28}{35} \cdot \frac{26-19}{38} = -\frac{38 \cdot 7}{35 \cdot 38} = -\frac{1}{5}$

c) $-\frac{7}{12} + \frac{3}{4}(\frac{7}{9} - \frac{5}{18}) = -\frac{7}{12} + \frac{3}{4} \cdot \frac{14-5}{18} = -\frac{7}{12} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-14+9}{24} = -\frac{5}{24}$

d) $-\frac{9}{10} \cdot (\frac{4}{9} - \frac{7}{15}) \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) = -\frac{9}{10} \cdot \frac{20-21}{45} \cdot \frac{2-3}{6} = -\frac{9}{10 \cdot 45 \cdot 6} = -\frac{1}{300}.$

2) a) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \cdot (\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{(a-b)^2+(a+b)^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2} = \frac{2a^2+2b^2}{a^2+b^2} = 2.$

b) $\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-x}{x-y} = \frac{x-y}{x+y} - 1 = \frac{x-y-(x+y)}{x+y} = -\frac{2y}{x+y}.$

c) $\frac{z^2-1}{z+1} - \frac{z^2+1}{z-1} = \frac{(z-1)(z+1)}{z+1} - \frac{z^2+1}{z-1} = z - 1 - \frac{z^2+1}{z-1} = \frac{(z-1)^2-(z^2+1)}{z-1} = -\frac{2z}{z-1}.$

d) $(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a-b)^2}) \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{(a-b)^2+(a+b)^2}{(a+b)^2 \cdot (a-b)^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{(2a^2+2b^2) \cdot (a^2-b^2)}{[(a+b)(a-b)]^2 \cdot (a^2+b^2)} = \frac{2}{a^2-b^2}.$

3) a) $\frac{\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}}{\frac{a-b}{a+b}} = \frac{(a^2-b^2) \cdot (a+b)}{(a+b)^2 \cdot (a-b)} = \frac{(a-b)(a+b) \cdot (a+b)}{(a+b)^2 \cdot (a-b)} = 1.$

b) $\frac{\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}}{\frac{(x-y)^2}{x+y}} = \frac{(x^2-2xy+y^2) \cdot (x+y)}{(x^2-y^2) \cdot (x-y)^2} = \frac{(x-y)^2 \cdot (x+y)}{(x-y)(x+y)(x-y)^2} = \frac{1}{x-y}.$

c) $\frac{\frac{1-z}{z+1}}{1 - \frac{z}{z+1}} = \frac{\frac{1-z}{z+1}}{\frac{z+1-z}{z+1}} = \frac{(1-z) \cdot (z+1)}{(z+1)} = 1 - z.$

d) $\frac{\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{a^2-b^2}}{\frac{a-b}{a+b}} = \frac{\frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{a^2-b^2}}{\frac{a-b}{a+b}} = \frac{\frac{1}{ab}}{\frac{a-b}{a+b}} = \frac{a+b}{ab(a-b)}.$