## Übungen Parabeln

1) a) Vervollständigen Sie: Eine Funktion $f$ gegeben durch einen Funktionsterm der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit rationalen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Q}, a \neq 0$ nennt man ________________. Ihr Graph ist ________________.
b) Welche geometrische Bedeutung hat der führende Koeffizient $a$?
c) Was können Sie über den Graphen von $f$ aussagen, wenn $a = 0$ ist? Welche geometrische Bedeutung haben dann $b$ und $c$?

2) Beschreiben Sie die Graphen der Funktionen mit den nachfolgenden Funktionstermen:
a) $f(x) = x^2 + 3$,
b) $f(x) = 7 - x^2$,
c) $f(x) = -(2 - x)^2$,
d) $f(x) = (x + 5)^2$,
e) $f(x) = 3x^2$,
f) $f(x) = -x^2$,
g) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2$,
h) $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$,
i) $f(x) = (x + 5)^2 + 3$,
j) $f(x) = (x - 1)^2 + 4$,
k) $f(x) = (x - 7)^2 - 9$,
l) $f(x) = 3(x - 2)^2 + 9$,
m) $f(x) = 5 - (x - 1)^2$,
n) $f(x) = \dfrac{(x + 2)^2}{4} + 3$,
o) $f(x) = 2((x - 2)^2 + 3)$,
p) $f(x) = -((x + 1)^2 - 3)$,
q) $f(x) = (3x + 1)^2$,
r) $f(x) = (2 - x)^2 + 3$,
s) $f(x) = x(x + 7) - x^2 - 1$.

3) a) Wie lautet die allgemeine Scheitelpunktsform eines quadratischen Terms? Warum nennt man sie so? Wie kann man quadratische Terme in Scheitelpunktsform überführen?
b) Überführen Sie die folgenden Terme in Scheitelpunktsform und beschreiben Sie die Graphen der Funktionen, die durch diese Terme definiert sind:
$\alpha$) $f(x) = x^2 - 2x + 7$,
$\beta$) $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$
$\gamma$) $f(x) = -x^2 - 6x + 1$,
$\delta$) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3$.

4) Wir betrachten die Parabeln auf dem Skizzenblatt 'Normalparabeln (1)'.
a) Berechnen Sie mindestens 4 der in der Skizze zu sehenden Parabelschnittpunkte.
b) Welche der Parabeln schneiden sich außerhalb des skizzierten Bereichs? Bestimmen Sie mindestens 4 der außerhalb liegenden Schnittpunkte.
c) Wieviele Schnittpunkte können je zwei Parabeln miteinander haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Übungen Parabeln — Lösungen

1) a) Eine Funktion $f$ gegeben durch einen Funktionsterm der Form $f(x) = ax^2+bx+c$ mit rationalen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Q}, a \neq 0$ nennt man quadratisch. Ihr Graph ist eine Parabel in der Koordinatenebene.
   b) Das Vorzeichen von $a$ gibt die Öffnungsrichtung der Parabel an: Ist $a > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet, im Falle $a < 0$ nach unten. Außerdem gibt der Betrag $|a|$ von $a$ an, wie weit die Parabel ist: Für $|a| > 1$ ist die Parabel *enger* als eine Normalparabel, für $|a| < 1$ ist sie weiter als diese.
   c) Wenn $a = 0$ ist, lautet der Funktionsterm $f(x) = bx + c$. Die Funktion ist dann offenbar linear und ihr Graph eine Gerade. $b$ gibt dann die Steigung dieser Geraden an und $c$ den $y$-Achsenabschnitt.
2) Alle Funktionsgraphen (außer dem letzten) sind Parabeln, und zwar (entsprechend der Reihenfolge der Aufgabenstellung):
   a)–d) Normalparabeln: nach oben geöffnet mit Scheitel $S = (0, 3)$, nach unten geöffnet mit Scheitel $S = (0, 7)$, nach unten geöffnet mit Scheitel $S = (2, 0)$ und schließlich nach oben geöffnet mit Scheitel $(-5, 0)$.
   e)–h) Parabeln mit Scheitel $S = (0, 0)$: nach oben geöffnet, enger als eine Normalparabel; nach unten geöffnete Normalparabel; nach unten geöffnet, weiter als eine Normalparabel und schließlich nach oben geöffnet, ebenfalls weiter als eine Normalparabel.
   i)–k) nach oben geöffnete Normalparabeln mit den Scheiteln $(-5, 3)$, $(1, 4)$ und $(7, -9)$.
   l) eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel $S = (2, 9)$, enger als eine Normalparabel;
   m) eine nach unten geöffnete Normalparabel mit $S = (1, 5)$;
   n) eine nach oben geöffnete Parabel mit $S = (-2, 3)$, weiter als eine Normalparabel.
   Bei den letzten Beispielen sind zunächst Umformungen nötig:
   o) $f(x) = 2((x - 2)^2 + 3) = 2(x - 2)^2 + 6$: eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel $S = (2, 6)$, enger als eine Normalparabel,
   p) $f(x) = -((x+1)^2 - 3) = -(x+1)^2 + 3$: eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (-1, 3)$,
   q) $f(x) = (3x + 1)^2 = (3(x + \frac{1}{3}))^2 = 9(x + \frac{1}{3})^2$: eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel $S = (-\frac{1}{3}, 0)$, enger als eine Normalparabel,
   r) $f(x) = (2 - x)^2 + 3 = (x - 2)^2 + 3$: Eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel $S = (2, 3)$.
   s) $f(x) = x(x+7) - x^2 - 1 = x^2 + 7x - x^2 - 1 = 7x - 1$: Hier ist der Funktionsgraph eine Gerade mit dem Anstieg 7 und dem $y$-Achsenabschnitt $-1$.
3) a) Die allgemeine Scheitelpunktsform eines quadratischen Terms hat die Form

$$a(x - x_S)^2 + y_S\,.$$

   Man nennt sie so, weil man daraus unmittelbar den Scheitel der dadurch gegebenen Parabel ablesen kann: Die Lösungsmenge der Gleichung $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ $(a \neq 0)$ ist eine Parabel mit dem Scheitel $S = (x_S, y_S)$; sie ist nach oben geöffnet, wenn $a > 0$ ist, und nach unten geöffnet, wenn $a < 0$ ist; schließlich ist sie enger als eine

Normalparabel, wenn $|a| > 1$ ist, und weiter, wenn $|a| < 1$ ist. Mittels quadratischer Ergänzung kann man einen beliebigen quadratischen Term in Scheitelpunktsform überführen.
b) Für die vier gegebenen quadratischen Terme erhält man:

$$\begin{aligned}
\alpha) \quad & f(x) = x^2 - 2x + 7 = x^2 - 2x + 1 - 1 + 7 = (x-1)^2 + 6 \\
\beta) \quad & f(x) = 3x^2 + 3x - 1 = 3(x^2 + x) - 1 = 3\Big(x^2 + x + (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\Big) - 1 \\
& = 3\Big((x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\Big) - 1 = 3(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} - 1 = 3(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{7}{4} \\
\gamma) \quad & f(x) = -x^2 - 6x + 1 = -(x^2 + 6x) + 1 = -(x^2 + 6x + 3^2 - 9) + 1 \\
& = -(x+3)^2 + 10 \\
\delta) \quad & f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3 = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x) + 3 = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1 - 1) + 3 \\
& = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2} + 3 = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Die Graphen der durch obige Terme gegebenen Funktionen sind Parabeln, und zwar
$\alpha$) eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S = (1, 6)$,
$\beta$) eine nach oben geöffnete Parabel, enger als eine Normalparabel, mit Scheitelpunkt $S = (-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$,
$\gamma$) eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S = (-3, +10)$,
$\delta$) eine nach unten geöffnete Parabel, weiter als eine Normalparabel, mit dem Scheitelpunkt $S = (-1, \frac{7}{2})$.

4) Wir bezeichnen die 8 Parabeln mit $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_8$ entsprechend der Nummerierung auf dem Skizzenblatt. Zur Berechnung der Schnittpunkte der Parabeln benötigen wir Gleichungen für die Parabeln; diese hatten wir in Übungen (3), Aufgabe 1) bestimmt. Wir berechnen dann durch 'Gleichsetzen' die $x$-Koordinate des Schnittpunktes und daraus dann die $y$-Koordinate.
a) $\mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_6$: Gleichungen für $\mathcal{P}_3$ und $\mathcal{P}_6$ sind gegeben durch $y = x^2 - 4$ bzw. $y = (x+7)^2 - 6$. Für die $x$-Koordinate des Schnittpunktes (die Schnitt*stelle)* muss dann gelten:

$$x^2 - 4 = (x+7)^2 - 6 \iff x^2 - 4 = x^2 + 14x + 49 - 6 \iff 14x = -47 \iff x = -\frac{47}{14}.$$

Die $y$-Koordinate ist dann $y = (-\frac{47}{14})^2 - 4 = \frac{2209}{196} - \frac{784}{196} = \frac{1425}{196}$. Der Schnittpunkt ist also

$$S_{36} = \Big(-\frac{47}{14}, \frac{1425}{196}\Big) \approx (-3.36, 7.27).$$

$\mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_7$: $x^2 - 4 = (x+6)^2 + 1 = x^2 + 12x + 37 \iff 12x = -41 \iff x = -\frac{41}{12} \approx -3.42$. Als $y$-Koordinate ergibt sich dann $y = (-\frac{41}{12})^2 - 4 = \frac{1105}{144} \approx 7.67$. Der Schnittpunkt ist $S_{37} = (-\frac{41}{12}, \frac{1105}{144})$.
$\mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_8$: $x^2 - 4 = (x+4)^2 - 3 = x^2 + 8x + 13 \iff 8x = -17 \iff x = -\frac{17}{8} = 2.125$, $y = (-\frac{17}{8})^2 - 4 = \frac{33}{64} \approx 0.52$, $S_{38} = (-\frac{17}{8}, \frac{33}{64})$.

b) Die Parabeln $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ schneiden sich nicht: Ihre Gleichungen sind alle von der Form $y = x^2 + b$ mit unterschiedlichen Werten für $b$. Bei der Berechnung der Schnittstellen ‘fällt’ der Term $x^2$ weg und man erhält unlösbare Gleichungen.
Alle anderen Parabeln schneiden sich in jeweils einem Punkt. Die Ergebnisse sind mit den Bezeichnungen wie oben:

$$\begin{aligned}
S_{14} &= \left(\tfrac{5}{2}, \tfrac{25}{4}\right) = (2.5, 8.25) \\
S_{15} &= \left(\tfrac{59}{16}, \tfrac{3481}{256}\right) \approx (3.69, 13.60) \\
S_{16} &= \left(-\tfrac{43}{14}, \tfrac{1849}{196}\right) \approx (-3.07, 9.43) \\
S_{17} &= \left(-\tfrac{37}{12}, \tfrac{1369}{144}\right) \approx (-3.08, 9.51) \\
S_{18} &= \left(-\tfrac{13}{8}, \tfrac{169}{64}\right) \approx (-1.63, 2.64) \\[1ex]
S_{24} &= \left(\tfrac{23}{10}, \tfrac{729}{100}\right) \approx (2.3, 7.29) \\
S_{25} &= \left(\tfrac{57}{16}, \tfrac{3761}{256}\right) \approx (3.56, 14.69) \\
S_{26} &= \left(-\tfrac{41}{14}, \tfrac{2073}{196}\right) \approx (-2.93, 10.58) \\
S_{27} &= \left(-\tfrac{35}{12}, \tfrac{1513}{144}\right) \approx (-2.92, 10.51) \\
S_{28} &= \left(-\tfrac{11}{8}, \tfrac{249}{64}\right) \approx (-1.38, 3.89) \\[1ex]
S_{34} &= \left(\tfrac{29}{10}, \tfrac{441}{100}\right) \approx (2.9, 4.41) \\
S_{35} &= \left(\tfrac{63}{16}, \tfrac{2945}{256}\right) \approx (3.94, 11.50) \\
S_{36} &= \left(-\tfrac{47}{14}, \tfrac{1425}{196}\right) \approx (-3.36, 7.27) \\
S_{37} &= \left(-\tfrac{41}{12}, \tfrac{1105}{144}\right) \approx (-3.42, 7.67) \\
S_{38} &= \left(-\tfrac{17}{8}, \tfrac{33}{64}\right) \approx (-2.13, 0.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{45} &= \left(\tfrac{17}{3}, \tfrac{4}{9}\right) \approx (5.67, 0.44) \\
S_{46} &= \left(-\tfrac{3}{4}, \tfrac{529}{16}\right) \approx (-0.75, 33.06) \\
S_{47} &= \left(-\tfrac{6}{11}, \tfrac{3721}{121}\right) \approx (-0.55, 30.75) \\
S_{48} &= \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{169}{9}\right) \approx (0.67, 18.78) \\[1ex]
S_{56} &= \left(\tfrac{8}{15}, \tfrac{11419}{225}\right) \approx (0.53, 50.75) \\
S_{57} &= \left(\tfrac{11}{14}, \tfrac{9221}{196}\right) \approx (0.79, 47.05) \\
S_{58} &= \left(\tfrac{23}{12}, \tfrac{4609}{144}\right) \approx (1.92, 32.01) \\[1ex]
S_{67} &= (-3, 10) \\
S_{68} &= (-5, -2) \\[1ex]
S_{78} &= (-6, 1)
\end{aligned}$$

c) Alle Parabeln auf dem Skizzenblatt ‘Normalparabeln (1)’ sind nach oben geöffnete Normalparabeln, also haben sie Gleichungen der Form $y = (x - a)^2 + b$. Multipliziert man die Terme aus, so erhält man in allen Fällen $y = x^2 - 2ax + a^2 + b$; alle Terme haben also denselben quadratischen Bestandteil $x^2$. Bei der Berechnung der Schnittstellen ‘fällt’ dieser weg, so dass sich jeweils eine lineare Gleichung ergibt, die höchstens eine Lösung besitzt. Es gibt also in allen hier betrachteten Fällen höchstens einen Schnittpunkt.

Zwischen den ersten drei Parabeln gab es keinen Schnittpunkt, weil alle dieselbe Symmetrieachse haben, also in ihrer Gleichung $y = x^2 - 2ax + a^2 + b$ die Werte von $a$ identisch waren. Bei der Berechnung der Schnittstellen ‘fiel’ dann nicht nur $x^2$ sondern auch der Term $2ax$ heraus, so dass die Gleichung kein $x$ mehr enthielt und unlösbar wurde. In allen Fällen unterschiedlicher Symmetrieachse (d. h. unterschiedlicher $a$-Werte) ergibt sich mit denselben Überlegungen genau eine Lösung.

## Übungen: Quadratische Funktionen und Gleichungen

1) Untersuchen Sie für die nachfolgend definierten quadratischen Funktionen $f$
   i) den Verlauf des Graphen,
   ii) die Anzahl der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen,
   iii) ob die Funktion einen größten oder kleinsten Wert annimmt,
   iv) wie groß dieser Wert ggf. ist und
   v) an welcher Stelle er angenommen wird.

   a) $f(x) = x^2 - 4x + 7$
   b) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$
   c) $f(x) = -2x^2 - 2x - 2$
   d) $f(x) = 3x^2 + 2x$
   e) $f(x) = -2x^2 - 4x - 6$
   f) $f(x) = -7x^2 + 4x - 1$
   g) $f(x) = -x^2 + \dfrac{2}{3} \cdot x + \dfrac{5}{36}$
   h) $f(x) = -2x^2 + \dfrac{8}{5} \cdot x - \dfrac{41}{50}$

2) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen mittels quadratischer Ergänzung:
   a) $x^2 - 7x + 12 = 0$,
   b) $x^2 + x - 12 = 0$,
   c) $x^2 - 6x + 11 = 0$,
   d) $3x^2 + 11x - 4 = 0$,
   e) $-6x^2 + 17x - 12 = 0$,
   f) $9x^2 + 12x + 4 = 0$,
   g) $-9x^2 + 6x - 5 = 0$,
   h) $6x^2 - x - 12 = 0$.

3) Untersuchen Sie die nachfolgend gegebenen Parabeln $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ auf Schnittpunkte.
   a) $\mathcal{P}_1$: Nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S = (1, 2)$,
      $\mathcal{P}_2$: Graph der Funktion $f_2(x) = x^2 + 4x + 3$.
   b) $\mathcal{P}_1$: Graph der Funktion $f_1(x) = (x - 1)^2 + 2$,
      $\mathcal{P}_2$: Nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (-3, -1)$.
   c) $\mathcal{P}_1$: Lösungsmenge der Gleichung $y + 5 = (x - 3)^2$,
      $\mathcal{P}_2$: Nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (1, -1)$.
   d) $\mathcal{P}_1$: Graph der Funktion $f_1(x) = -2(x - 1)^2 + 2$,
      $\mathcal{P}_2$: Verschiebung der Parabel mit der Gleichung $y = 3x^2$ um 1 nach links und 2 nach unten.
   e) $\mathcal{P}_1$: Parabel mit dem Scheitel $S = (1, 0)$ und durch den Punkt $P = (0, -2)$,
      $\mathcal{P}_2$: Graph der Funktion $f_2(x) = 3(x + 1)^2 - 5$.
   f) $\mathcal{P}_1$: Parabel mit dem Scheitel $(1/3, 2/3)$ und dem $y$-Achsenabschnitt 1,
      $\mathcal{P}_2$: Graph der Funktion $f_2(x) = -2(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{13}{2}$.
   g) $\mathcal{P}_1$: Nach oben geöffnete Normalparabel, die die $x$-Achse bei $+2$ und die $y$-Achse bei $-8$ schneidet,
      $\mathcal{P}_2$: Parabel durch den Koordinatenursprung und mit dem Scheitel $S = (1, 2)$.

**Quadratische Funktionen und Gleichungen — Lösungen**

1) Generell schneiden Funktionsgraphen die $y$-Achse genau einmal (Funktionsbegriff: Zu jedem $x$ gehört genau ein Funktionswert $f(x)$). Dieser Teil der Frage ii) ist damit beantwortet und wir werden darauf nicht mehr eingehen.
Alle Graphen sind Parabeln, da die Funktionen quadratisch sind, und man kann ohne weitere Rechnung die Öffnungsrichtung und Form der Parabel am *führenden* Koeffizienten (dem Faktor vor $x^2$) ablesen.
Um die anderen Fragen beantworten zu können, bestimmen wir durch quadratische Ergänzung die Scheitelpunktsform des Terms $f(x)$ und damit den Scheitelpunkt der jeweiligen Graphen. Im einzelnen erhalten wir so:
   a) Es ist $f(x) = x^2 - 4x + 7 = x^2 - 4x + 2^2 - 4 + 7 = (x-2)^2 + 3$, also:
   i) der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S = (2, 3)$,
   ii) er trifft die $x$-Achse nicht, da die Parabel nach oben geöffnet ist und der Scheitelpunkt *oberhalb* der $x$-Achse liegt ($y_S = 3 > 0$),
   iii) die Funktion $f$ nimmt keinen größten, wohl aber einen kleinsten Wert an, da der Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist,
   iv) der kleinste Wert von $f$ ist $+3$ $(= y_S)$, und
   v) er wird an der Stelle 2 $(= x_S)$ angenommen: $f(2) = 3 \leq f(x)$ für alle $x$.
   b) Es ist $f(x) = -x^2 - 2x + 1 = -(x^2 + 2x - 1) = -(x^2 + 2x + 1^2 - 1 - 1) = -(x+1)^2 + 2$, also:
   i) der Graph ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (-1, -2)$,
   ii) er trifft die $x$-Achse zweimal, da der Scheitel oberhalb der $x$-Achse liegt und die Parabel nach unten geöffnet ist,
   iii)–v) die Funktion $f$ nimmt keinen kleinsten, aber einen größten Wert an, dieser ist $+2$ und wird an der Stelle $-1$ angenommen: $f(-1) = 2 \geq f(x)$ für alle $x$.
   c) Es ist $f(x) = -2x^2 - 2x - 2 = -2(x^2 + x + 1) = -2(x^2 + x + (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1) = -2\big((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\big) = -2(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}$, also:
   i) der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, enger als die Normalparabel, mit dem Scheitel $S = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$,
   ii) er trifft die $x$-Achse nicht,
   iii) $f$ nimmt keinen kleinsten Wert an, erreicht aber an der Stelle $-\frac{1}{2}$ $(= x_S)$ ihren größten Wert $-\frac{3}{2}$ $(= y_S)$.
   d) Es ist $f(x) = 3x^2 + 2x = 3(x^2 + \frac{2}{3}x + (\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9}) = 3\big((x + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9}\big) = 3(x + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$, also:
   i) der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel, enger als die Normalparabel, mit dem Scheitel $S = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$,
   ii) er trifft die $x$-Achse zweimal,
   iii)–v) $f$ nimmt keinen größten, aber an der Stelle $-\frac{1}{3}$ ihren kleinsten Wert $-\frac{1}{3}$ an.
   e) Es ist $f(x) = -2x^2 - 4x - 6 = -2(x^2 + 2x + 3) = -2(x^2 + 2x + 1 - 1 + 3) = -2(x+1)^2 - 4$, also:
   i) der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, enger als eine Normalparabel, mit dem Scheitel $S = (-1, -4)$,

ii) er trifft die $x$-Achse nicht,

iii)–v) $f$ nimmt keinen kleinsten, aber an der Stelle $-1$ ihren größten Wert $-4$ an.

f) Es ist $f(x) = -7x^2+4x-1 = -7(x^2-\frac{4}{7}x+(\frac{2}{7})^2-\frac{4}{49})-1 = -7(x-\frac{2}{7})^2+\frac{4}{7}-1 = -7(x-\frac{2}{7})^2-\frac{3}{7}$, also:
der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, enger als eine Normalparabel, mit dem Scheitel $S = (\frac{2}{7}, -\frac{3}{7})$,
er schneidet die $x$-Achse nicht,
$f$ nimmt keinen kleinsten, aber bei $x = \frac{2}{7}$ ihren größten Wert $-\frac{3}{7}$ an.

g) Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + \frac{2}{3}\cdot x + \frac{5}{36} \\ &= -\big(x^2 - \frac{2}{3}x + (\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9}\big) + \frac{5}{36} \\ &= -(x-\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{9} + \frac{5}{36} \\ &= -(x-\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{4}\,, \end{aligned}$$

also ist der Graph eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$, er schneidet die $x$-Achse zweimal und $f$ nimmt keinen kleinsten, aber bei $x = \frac{1}{3}$ ihren größten Wert $\frac{1}{4}$ an.

h) Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + \frac{8}{5}\cdot x - \frac{41}{50} \\ &= -2\big(x^2 - \frac{4}{5}x + (\frac{2}{5})^2 - \frac{4}{25}\big) - \frac{41}{50} \\ &= -2(x-\frac{2}{5})^2 + \frac{8}{25} - \frac{41}{50} \\ &= -2(x-\frac{2}{5})^2 - \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

also ist der Graph eine nach unten geöffnete Parabel, enger als eine Normalparabel, mit dem Scheitel $S = (\frac{2}{5}, -\frac{1}{2})$, er schneidet die $x$-Achse nicht, und $f$ nimmt an der Stelle $x = \frac{2}{5}$ als größten Wert $-\frac{1}{2}$ an; einen kleinsten Wert nimmt sie nicht an.

2) Wir formen die Gleichungen durch quadratische Ergänzung um in eine Gleichung der Form $(x - x_S)^2 = d$. Ist $d < 0$, so gibt es keine Lösung, da Quadrate niemals negativ sein können. Ist $d = c^2$ eine Quadratzahl, so erhält man die Lösungen $x - x_S = \pm c \iff x = x_S \pm c$.

a)
$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 12 = 0 &\iff x^2 - 7x = -12 \\ &\iff x^2 - 7x + (\frac{7}{2})^2 = -12 + \frac{49}{4} = \frac{1}{4} \\ &\iff (x-\frac{7}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 \\ &\iff x - \frac{7}{2} = \pm\frac{1}{2} \iff x = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \\ &\iff x = 4 \ \vee\ x = 3\,, \end{aligned}$$

also: $\quad \mathbb{L} = \{3, 4\}\,.$

b)
$$\begin{aligned} x^2+x-12=0 &\iff x^2+x=12 \\ &\iff x^2+x+(\frac{1}{2})^2=12+\frac{1}{4}=\frac{49}{4} \\ &\iff (x+\frac{1}{2})^2=(\frac{7}{2})^2 \\ &\iff x+\frac{1}{2}=\pm\frac{7}{2} \iff x=-\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2} \\ &\iff x=3 \ \vee \ x=-4\,, \end{aligned}$$
also: $\mathbb{L}=\{-4,3\}\,.$

c) $x^2-6x+11=0 \iff x^2-6x+3^2=-11+9 \iff (x-3)^2=-2\,.$

Da die negative Zahl $-2$ kein Quadrat ist, besitzt diese Gleichung keine Lösung: $\mathbb{L}=\emptyset$.

d)
$$\begin{aligned} 3x^2+11x-4=0 &\iff x^2+\frac{11}{3}x=\frac{4}{3} \\ &\iff x+\frac{11}{3}x+(\frac{11}{6})^2=\frac{4}{3}+\frac{121}{36}=\frac{169}{36} \\ &\iff (x+\frac{11}{6})^2=(\frac{13}{6})^2 \\ &\iff x+\frac{11}{6}=\pm\frac{13}{6} \iff x=-\frac{11}{6}\pm\frac{13}{6} \\ &\iff x=\frac{1}{3} \ \vee \ x=-4\,, \end{aligned}$$
also: $\mathbb{L}=\big\{-4,\frac{1}{3}\big\}\,.$

e)
$$\begin{aligned} -6x^2+17x-12=0 &\iff x^2-\frac{17}{6}x+2=0 \\ &\iff x^2-\frac{17}{6}x+(\frac{17}{12})^2=-2+\frac{289}{144}=\frac{1}{144} \\ &\iff (x-\frac{17}{12})^2=(\frac{1}{12})^2 \\ &\iff x-\frac{17}{12}=\pm\frac{1}{12} \iff x=\frac{17}{12}\pm\frac{1}{12} \\ &\iff x=\frac{3}{2} \ \vee \ x=\frac{4}{3}\,, \end{aligned}$$
also: $\mathbb{L}=\{\frac{4}{3},\frac{3}{2}\}\,.$

f)
$$\begin{aligned} 9x^2+12x+4=0 &\iff x^2+\frac{4}{3}x=-\frac{4}{9} \\ &\iff x^2+\frac{4}{3}x+(\frac{2}{3})^2=-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=0 \\ &\iff (x+\frac{2}{3})^2=0 \iff x+\frac{2}{3}=0 \\ &\iff x=-\frac{2}{3}\,, \end{aligned}$$
also: $\mathbb{L}=\big\{-\frac{2}{3}\big\}\,.$

g)
$$\begin{aligned} -9x^2+6x-5=0 &\iff x^2-\frac{2}{3}x=-\frac{5}{9} \\ &\iff x^2-\frac{2}{3}x+\big(\frac{1}{3}\big)^2=-\frac{5}{9}+\frac{1}{9}=-\frac{4}{9} \\ &\iff \big(x-\frac{1}{3}\big)^2=-\frac{4}{9}<0\,, \end{aligned}$$
also: $\mathbb{L}=\emptyset$

h)
$$\begin{aligned} 6x^2-x-12=0 &\iff x^2-\frac{1}{6}x=2 \\ &\iff x^2-\frac{1}{6}x+\big(\frac{1}{12}\big)^2=2+\frac{1}{144}=\frac{289}{144} \\ &\iff \big(x-\frac{1}{12}\big)^2=\big(\frac{17}{12}\big)^2 \\ &\iff x-\frac{1}{12}=\pm\frac{17}{12} \iff x=\frac{1}{12}\pm\frac{17}{12} \\ &\iff x=\frac{3}{2} \ \vee\ x=-\frac{4}{3}\,, \end{aligned}$$
also: $\mathbb{L}=\big\{-\frac{4}{3},\frac{3}{2}\big\}$.

3) Man beschreibt zunächst alle Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen $f_1$ und $f_2$ und löst dann die Schnittstellengleichung $f_1(x)=f_2(x)$. Die gefundenen Schnittstellen sind die $x$-Koordinaten der Schnittpunkte; die $y$-Koordinaten erhält man durch Einsetzen der Schnittstellen in eine der beiden Funktionsgleichungen.

a) Eine Gleichung für $\mathcal{P}_1$ ist gegeben durch $y=(x-1)^2+2$, $\mathcal{P}_1$ ist also Graph der Funktion $f_1(x)=(x-1)^2+2=x^2-2x+3$. Wir lösen nun die Schnittstellengleichung:
$$f_1(x)=f_2(x) \iff x^2-2x+3=x^2+4x+3 \iff 6x=0 \iff x=0\,.$$
Es gibt also genau eine Schnittstelle $x=0$; die $y$-Koordinate des Schnittpunktes ist $f_2(0)=3$, der einzige Schnittpunkt also $(0,3)$.

b) $\mathcal{P}_2$ ist Graph der Funktion $f_2(x)=-(x+3)^2-1=-x^2-6x-10$. Wir lösen also die Schnittstellengleichung
$$\begin{aligned} f_1(x)=f_2(x) &\iff (x-1)^2+2=-(x+3)^2-1 \\ &\iff x^2-2x+3=-x^2-6x-10 \iff 2x^2+4x=-13 \\ &\iff x^2+2x=-\frac{13}{2} \iff x^2+2x+1=-\frac{13}{2}+1 \\ &\iff (x+1)^2=-\frac{11}{2}<0\,. \end{aligned}$$
Diese Gleichung hat keine Lösung, folglich gibt es keine Schnittpunkte.

c) $\mathcal{P}_1$ ist Graph der Funktion $f_1(x)=(x-3)^2-5=x^2-6x+4$ und $\mathcal{P}_2$ ist Graph der Funktion $f_2(x)=-(x-1)^2-1=-x^2+2x-2$. Wir lösen die Schnittstellengleichung
$$\begin{aligned} f_1(x)=f_2(x) &\iff x^2-6x+4=-x^2+2x-2 \iff 2x^2-8x+6=0 \\ &\iff x^2-4x+3=0 \iff (x-1)(x-3)=0 \quad \text{(Vieta)} \\ &\iff x=1 \ \vee\ x=3\,. \end{aligned}$$

Es gibt also genau zwei Schnittpunkte: $S_1 = (1, f_2(1)) = (1, -1)$ und $S_2 = (3, f_2(3)) = (3, -5)$.

d) Verschiebt man die Parabel mit der Gleichung $y = 3x^2$ um 1 nach links und 2 nach unten, so erhält man die Gleichung für die verschobene Parabel $\mathcal{P}_2$, indem man $x$ durch $x+1$ und $y$ durch $y+2$ ersetzt. Damit ist $y+2 = 3(x+1)^2$ eine Gleichung für $\mathcal{P}_2$; $\mathcal{P}_2$ ist Graph der Funktion $f_2(x) = 3(x+1)^2 - 2 = 3x^2 + 6x + 1$. Zusammen mit $f_1(x) = -2(x-1)^2 + 2 = -2x^2 + 4x$ erhält man die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff -2x^2 + 4x = 3x^2 + 6x + 1 \iff 5x^2 + 2x + 1 = 0 \\ &\iff x^2 + \frac{2}{5}x + (\frac{1}{5})^2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{25} \\ &\iff (x + \frac{1}{5})^2 = -\frac{4}{25} < 0\,. \end{aligned}$$

Diese ist unlösbar, da Quadrate nie negativ sein können; es gibt also keine Schnittpunkte.

e) $\mathcal{P}_1$ ist Graph einer Funktion $f_1$ mit $f_1(x) = a(x-1)^2$. Da der Graph durch $P = (0, -2)$ verlaufen soll, ist $f_1(0) = -2$, also $-2 = f_1(0) = a(-1)^2 = a$. Insgesamt erhalten wir $f_1(x) = -2(x-1)^2 = -2x^2 + 4x - 2$. Zusammen mit dem vorgegebenen Funktionsterm $f_2(x) = 3(x+1)^2 - 5 = 3x^2 + 6x - 2$ erhalten wir die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff -2x^2 + 4x - 2 = 3x^2 + 6x - 2 \\ &\iff 5x^2 + 2x = 0 \iff 5x(x + \frac{2}{5}) = 0 \\ &\iff x = 0 \;\vee\; x = -\frac{2}{5}\,. \end{aligned}$$

Die $y$-Koordinaten der Schnittpunkte sind $f_2(0) = -2$ und $f_2(-\frac{2}{5}) = 3 \cdot \frac{9}{25} - 5 = \frac{27-125}{25} = -\frac{98}{25}$, die Schnittpunkte also $S_1 = (0, -2)$ und $S_2 = (-\frac{2}{5}, -\frac{98}{25}) = -(0{,}4; -3{,}96)$.

f) $\mathcal{P}_1$ ist Graph von $f_1(x) = a(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3}$. Da der $y$-Achsenabschnitt 1 ist, erhalten wir

$$1 = f_1(0) = a \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \iff \frac{a}{9} = \frac{1}{3} \iff a = 3\,.$$

Damit ist $f_1(x) = 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3} = 3x^2 - 2x + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 3x^2 - 2x + 1$. Für $f_2$ erhalten wir $f_2(x) = -2(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{13}{2} = -2x^2 - 2x - \frac{1}{2} + \frac{13}{2} = -2x^2 - 2x + 6$. Wir lösen die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff 3x^2 - 2x + 1 = -2x^2 - 2x + 6 \\ &\iff 5x^2 = 5 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1\,. \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte sind damit $S_1 = (1, f_1(1)) = (1, 2)$ und $S_2 = (-1, f_1(-1)) = (-1, 6)$.

g) Da $\mathcal{P}_1$ eine nach oben geöffnete Normalparabel ist, ist sie Graph einer normierten quadratischen Funktion $f_1(x) = x^2 + bx + c$. Da die $y$-Achse bei $-8$

geschnitten wird, ist $-8 = f_1(0) = c$, also $f_1(x) = x^2 + bx - 8$. Da bei $+2$ die $x$-Achse geschnitten wird, gilt $0 = f_1(2) = 4 + 2b - 8 = 2b - 4 \iff b = 2$. Insgesamt ist also $\mathcal{P}_1$ Graph der Funktion $f_1(x) = x^2 + 2x - 8$.
$\mathcal{P}_2$ ist Graph von $f_2(x) = a(x-1)^2 + 2$. Da die Parabel durch den Koordinatenursprung verläuft, ist $0 = f_2(0) = a + 2$, also $a = -2$.
Wir lösen die Schnittstellengleichung

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff x^2 + 2x - 8 = -2(x-1)^2 + 2 = -2x^2 + 4x \\ &\iff 3x^2 - 2x = 8 \iff x^2 - \frac{2}{3}x + (\frac{1}{3})^2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{9} = \frac{25}{9} \\ &\iff (x - \frac{1}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2 \iff x - \frac{1}{3} = \pm\frac{5}{3} \\ &\iff x = \frac{1}{3} \pm \frac{5}{3} \iff x = 2 \ \lor \ x = -\frac{4}{3}\,. \end{aligned}$$

Damit erhält man zwei Schnittpunkte $S_1 = (2, f_1(2)) = (2, 0)$ und schließlich $S_2 = \big(-\frac{4}{3}, f_2(-\frac{4}{3})\big) = \big(-\frac{4}{3}, -\frac{80}{9}\big)$.

# Übungen zur Potenzrechnung

Aus: Lambacher Schweizer, Lehrbuch Klasse 10, S. 22

**4** Schreibe als Potenz.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{6}$ c) $\sqrt[4]{2}$ d) $\sqrt[3]{24^2}$ e) $\sqrt[5]{11^6}$ f) $\sqrt[4]{7^3}$ g) $\sqrt{5^6}$

h) $\sqrt[3]{18^2}$ i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ k) $\frac{1}{\sqrt[4]{12^3}}$ l) $\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$ m) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ n) $\frac{1}{\sqrt[r]{t^s}}$ o) $\frac{1}{\sqrt[n]{a^{r+1}}}$

**5** Schreibe als Potenz, kürze und schreibe dann wieder als Wurzel ($a, r, s, t, x, y > 0$).

a) $\sqrt[4]{3^2}$ b) $\sqrt[6]{2^3}$ c) $\sqrt[12]{5^4}$ d) $\sqrt[10]{y^5}$ e) $\sqrt[9]{t^6}$ f) $\sqrt[8]{s^6}$ g) $\sqrt[18]{r^{12}}$

h) $\sqrt[4]{x^6}$ i) $\frac{1}{\sqrt[10]{2^8}}$ k) $\frac{1}{\sqrt[15]{3^{10}}}$ l) $\frac{1}{\sqrt[2n]{r^n}}$ m) $\frac{1}{\sqrt[16]{a^{4k}}}$ n) $\frac{1}{\sqrt[15]{x^{3k}}}$ o) $\frac{1}{\sqrt[3a]{x^{12a}}}$

**6** Vereinfache.

a) $\sqrt[4]{100}$ b) $\sqrt[4]{25}$ c) $\sqrt{9^4}$ d) $\sqrt[6]{4^3}$ e) $\sqrt[10]{25^4}$ f) $\sqrt[8]{16}$ g) $\sqrt[6]{81}$

**7** Schreibe als Potenz und berechne dann mit Hilfe des Taschenrechners auf 3 Dezimalen.

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt[5]{14}$ d) $\sqrt[10]{2}$ e) $\sqrt[4]{7^3}$ f) $\sqrt[5]{6^3}$ g) $\sqrt[6]{47^2}$

h) $\sqrt[3]{5}$ i) $\sqrt[3]{23}$ k) $\sqrt[3]{23^2}$ l) $\sqrt[6]{4}$ m) $\sqrt[7]{25}$ n) $1 : \sqrt[7]{2}$ o) $5 : \sqrt[3]{8}$

**8** Es gilt $(-2)^3 = -8$. Was ist an der Rechnung $(-2)^3 = (-2)^{\frac{6}{2}} = \sqrt[2]{(-2)^6} = \sqrt[2]{64} = 8$ falsch?

**9** Berechne.

a) $\sqrt[3]{(-3)^6}$ b) $\frac{1}{\sqrt{(-5)^4}}$ c) $\sqrt[7]{b^{14}}$ mit $b < 0$ d) $\sqrt[n]{b^{2n}}$ mit n aus $\mathbb{N}$, $n \neq 0$, $b < 0$

**10** Schreibe als Wurzel.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ c) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{32}$ d) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{2{,}5}$ e) $\sqrt[4]{32} : \sqrt[4]{2}$

f) $\sqrt[3]{2x} : \sqrt[3]{x}$ g) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{4x}$ h) $\sqrt[4]{10y} : \sqrt[4]{2y}$ i) $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^3}$ k) $\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

**11**

a) $\sqrt[4]{6} : \sqrt[3]{6}$ b) $\sqrt[6]{5} : \sqrt[3]{5}$ c) $\sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{5}$ d) $\frac{1}{\sqrt[4]{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{4}}$ e) $\sqrt[6]{\sqrt[4]{2^3}}$

f) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{4}$ g) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ h) $\sqrt[5]{3} : \sqrt{3}$ i) $\sqrt[3]{5} : \sqrt{5}$ k) $\sqrt[4]{2^9} \cdot \sqrt{2^9}$

l) $\sqrt[3]{x} : \sqrt{x}$ m) $\sqrt{x} : \sqrt[4]{x}$ n) $\sqrt[n]{3} : \sqrt[2n]{3}$ o) $\sqrt[n]{e^x} \cdot \sqrt[n]{e^x}$ p) $\frac{1}{\sqrt[n]{x}} : \sqrt[n]{x}$

**12**

a) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[5]{7}$ b) $\sqrt{11} : \sqrt[5]{11}$ c) $\sqrt[4]{3^2} \cdot \sqrt[3]{3^2}$ d) $\sqrt[n]{5} \cdot \sqrt[2n]{5}$

e) $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{3}$ f) $\sqrt[3]{25} : \sqrt[3]{5}$ g) $\sqrt[5]{0{,}2} \cdot \sqrt[5]{10}$ h) $\sqrt[4]{0{,}16} \cdot \sqrt[4]{0{,}01}$

**13** Vereinfache.

a) $5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}$ b) $3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}$ c) $2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$ d) $4^{-\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{3}{4}}$ e) $2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{-\frac{3}{10}}$

f) $10^{\frac{1}{2}} : 10^{\frac{1}{3}}$ g) $6^{-\frac{1}{2}} : 6^{\frac{2}{3}}$ h) $2^{-\frac{2}{3}} : 2^{-0{,}5}$ i) $a^{-\frac{1}{2}} : a$ k) $3^x : 3^{-\frac{1}{2}}$

l) $x^{\frac{1}{n}} \cdot x^{-\frac{1}{n}}$ m) $y^{\frac{1}{q}} : y^{\frac{1}{q}}$ n) $z^{-\frac{1}{n}} \cdot z^{-\frac{1}{n}}$ o) $t^{\frac{3}{n}} : t^{-\frac{1}{n}}$ p) $c^{-\frac{1}{2}} \cdot c^4$

**14** Vereinfache.

a) $a^{\frac{6}{5}} \cdot a^{-1}$ b) $b^{\frac{2}{3}} : b$ c) $x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$ d) $y^{\frac{2}{3}} : y^{-\frac{1}{3}}$ e) $z^{1,2} \cdot z^{-0,7}$

f) $(2a)^{\frac{5}{4}} : (2a)^{\frac{3}{4}}$ g) $(5b^{-2}) : b^{-3}$ h) $(ax)^t \cdot (ax^{-6})$ i) $(8x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (8x)^2$ k) $(15y)^{-2} : (15y)^{-3}$

**15** Vereinfache.

a) $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4$ b) $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4$ c) $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$ d) $\left(4^{\frac{1}{5}}\right)^{-\frac{3}{4}}$ e) $\left(3^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{4}{5}}$

**16**

a) $\left(x^{\frac{5}{4}} : y^{-\frac{5}{8}}\right)^{-\frac{4}{5}}$ b) $\left(x^{\frac{4}{5}} \cdot y^{-\frac{8}{5}}\right)^{-\frac{5}{8}}$ c) $\left(x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right)^2$ d) $\left(a^{\frac{5}{6}} + b^{\frac{1}{6}}\right)^2$

**17** Schreibe mit nur einem Wurzelzeichen.

a) $\sqrt{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ e) $\sqrt[n]{\sqrt[3]{a}}$ f) $\sqrt{\sqrt[n]{a}}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$ h) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$ i) $\sqrt{3\sqrt{x}}$ k) $\sqrt[3]{5\sqrt{a^3}}$ l) $\sqrt[3]{9\sqrt[3]{9}}$ m) $\sqrt[3]{\sqrt[n]{x}}$

**18** Vereinfache.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{4^9}}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8^4}}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{216}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{256}}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{32768}}$

**19**

a) $\frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt[4]{b^3}}$ b) $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x}}$ c) $\frac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a} : \sqrt[3]{a}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{2y} : \sqrt[3]{y}}{\sqrt{y} : \sqrt[4]{y}}$ e) $\frac{\sqrt{t} : \sqrt[3]{t}}{t}$ f) $\left(\frac{10^n : 2^n}{\sqrt{5}}\right)^2$

**20**

a) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^6$ b) $\left(\sqrt[5]{2}\right)^{-10}$ c) $\left(\sqrt[6]{x}\right)^4$ d) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^{-2}$ e) $\left(\sqrt{x^3}\right)^4$ f) $\left(\sqrt[10]{y^3}\right)^5$

g) $\left(\sqrt{s}\right)^{2n}$ h) $\left(\sqrt[3]{s^4}\right)^{3n}$ i) $\left(\sqrt[n]{t^3}\right)^{2n}$ k) $\left(\sqrt[2n]{x}\right)^n$ l) $\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^8$ m) $\left(\sqrt{\sqrt{b^3}}\right)^{4n}$

**21** Radiziere teilweise und vereinfache, falls möglich.

a) $\sqrt{8}$ b) $\frac{\sqrt{27}}{3}$ c) $\frac{\sqrt[3]{40}}{2}$ d) $\frac{2}{\sqrt{12}}$ e) $\sqrt[4]{241\,x^3}$ f) $\sqrt[3]{9\,a^4}$

g) $\sqrt{(-5)^4 x^5}$ h) $\sqrt{x^3 (a+b)^5}$ i) $\sqrt[6]{a^{-11} b^{-7}}$ k) $\sqrt[5]{a^6 (x-9)^{-7}}$ l) $\sqrt[3]{a^9 b^{12} c^4}$ m) $\sqrt{a^4 b^3 c^5}$

**22** Mache den Nenner rational und vereinfache, falls möglich.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ d) $\sqrt{\frac{5}{11}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

g) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ h) $\frac{2}{\sqrt[4]{4}}$ i) $\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$ k) $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$ l) $\sqrt{\frac{1}{a}}$ m) $\left(\frac{4}{3y}\right)^{\frac{1}{3}}$

**23**

a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4a^2}}$ b) $\frac{3b}{\sqrt[4]{27b^3}}$ c) $\frac{d}{\sqrt{8d^3}}$ d) $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}$ e) $\frac{1}{\sqrt[6]{(4-x)^2}}$

**24**

a) $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ b) $\frac{2\sqrt{x}-15\sqrt{y}}{\sqrt{x}+5\sqrt{y}}$ c) $\frac{3p-\sqrt{p}}{\sqrt{p}+1}$ d) $\frac{\sqrt{2u}-2\sqrt{v}}{\sqrt{u}-\sqrt{2v}}$ e) $\frac{(3-3\sqrt{x})\,x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$

**25** Schreibe als eine Wurzel aus einem Term.

a) $\sqrt[3]{5} \cdot 7$ b) $\sqrt[a]{x^b} \cdot x^b$ c) $(a-b)\cdot\sqrt{(a-b)}$ d) $(z-y)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{(y+z)^2}$

**26** Vereinfache.

a) $\left(\sqrt{18}-\sqrt{32}\right)\cdot\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}}{\sqrt[4]{2401}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ c) $\left(\sqrt[b]{a^{2b-3}} - \sqrt[b]{a^{3-b}}\right) : \sqrt[b]{a^{b-3}}$

## Lambacher Schweitzer Band 10, S. 22/23 – Ergebnisse

**Aufgabe 4:**

a) $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}$ c) $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$ d) $\sqrt[3]{24^2} = 24^{\frac{2}{3}}$
e) $\sqrt[5]{11^6} = 11^{\frac{6}{5}}$ f) $\sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}}$ g) $\sqrt{5^6} = 5^3$ h) $\sqrt[3]{18^2} = 18^{\frac{2}{3}}$
i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$ k) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{12^3}} = 12^{-\frac{3}{4}}$ l) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7^2}} = 7^{-\frac{2}{3}}$ m) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{-\frac{2}{3}}$
n) $\dfrac{1}{\sqrt[r]{t^s}} = t^{-\frac{s}{r}}$ o) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^{r+1}}} = a^{-\frac{r+1}{n}}$
m)–o) nur möglich und gültig für positive Basen $a, t$.

**Aufgabe 5:**

a) $\sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ b) $\sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
c) $\sqrt[12]{5^4} = 5^{\frac{4}{12}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ d) $\sqrt[10]{y^5} = y^{\frac{5}{10}} = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$
e) $\sqrt[9]{t^6} = \sqrt[3]{t^2}$ f) $\sqrt[8]{t^6} = \sqrt[4]{t^3}$ g) $\sqrt[18]{r^{12}} = \sqrt[3]{r^2}$ h) $\sqrt[4]{x^6} = \sqrt{x^3}$
i) $\dfrac{1}{\sqrt[10]{2^8}} = 2^{-\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{2^4}}$ k) $\dfrac{1}{\sqrt[15]{3^{10}}} = 3^{-\frac{10}{15}} = 3^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3^2}}$
l) $\dfrac{1}{\sqrt[2n]{r^n}} = \sqrt{\dfrac{1}{r}}$ m) $\dfrac{1}{\sqrt[16]{a^{4k}}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{a^k}}$ n) $\dfrac{1}{\sqrt[15]{x^{3k}}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{x^k}}$ o) $\dfrac{1}{\sqrt[3a]{x^{12a}}} = \dfrac{1}{x^4}$

Beachten Sie: Alle Probleme mit dem Definitionsbereich der verschiedenen Terme sind Ihnen durch die Aufgabenstellung abgenommen: Dort sind alle Variablen als positiv deklariert. Beachten Sie aber bei derartigen Rechnungen immer das Vorzeichen. Ohne diese Voraussetzung sind einige der obigen Formeln *falsch.* Korrekturen:
f) $\sqrt[8]{t^6} = |t|^{\frac{6}{8}} = |t|^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{|t|^3}$ $(t \in \mathbb{R})$ h) $\sqrt[4]{x^6} = \sqrt{|x|^3}$ $(x \in \mathbb{R})$

**Aufgabe 6:**

a) $\sqrt[4]{100} = \sqrt{10}$ b) $\sqrt[4]{25} = \sqrt{5}$ c) $\sqrt{9^4} = 9^2 = 81$ d) $\sqrt[6]{4^3} = \sqrt{4} = 2$
e) $\sqrt[10]{25^4} = \sqrt[5]{25^2} = \sqrt[5]{5^4}$ f) $\sqrt[8]{16} = \sqrt{2}$ g) $\sqrt[6]{81} = \sqrt[3]{9}$

**Aufgabe 7:**

a) $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}} \approx 2{,}645751$ b) $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}316074$
c) $\sqrt[5]{14} = 14^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}695218$ d) $\sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{10}} \approx 1{,}071773$
e) $\sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}} \approx 1{,}681793$ f) $\sqrt[5]{6^3} = 6^{\frac{3}{5}} \approx 2{,}930156$
g) $\sqrt[6]{47^2} = 47^{\frac{1}{3}} \approx 3{,}608826$ h) $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}709976$
i) $\sqrt[3]{23} = 23^{\frac{1}{3}} \approx 2{,}843867$ k) $\sqrt[3]{23^2} = 23^{\frac{2}{3}} \approx 8{,}087579$
l) $\sqrt[6]{4} = 4^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}259921$ m) $\sqrt[7]{25} = 25^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}58382$
n) $1 : \sqrt[7]{2} = 2^{-\frac{1}{7}} \approx 0{,}905724$ o) $1 : \sqrt[3]{8} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

**Aufgabe 8:**

Der Fehler liegt an der gekennzeichneten Stelle:

$$-8 = (-2)^3 = (-2)^{\frac{6}{2}} \underset{\Uparrow}{=} \sqrt[2]{(-2)^6} = \sqrt[2]{64} = 8\,,$$

denn die Definition von Potenzen mit gebrochenen Exponenten ist nur gültig und gerechtfertigt für **positive Basen**:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \quad \text{nur für } a > 0!$$

Das obige Beispiel zeigt zugleich den entscheidenden Grund dafür, die Definition von Potenzen mit gebrochenen Exponenten auf positive Basen einzuschränken: Würde man dies nicht tun, so könnte man wie oben gezeigt einen Widerspruch $8 = -8$ herleiten. Die Mathematik wäre nicht mehr *widerspruchsfrei!* Dies würde aber bedeuten, dass man im Rahmen der Mathematik *alles* herleiten könnte: jede Aussage und zugleich ihre Negation. Damit wären die Aussagen der Mathematik wertlos.
Dieser Widerspruch entsteht aber sogar unabhängig von der gewählten Definition für Potenzen mit gebrochenen Exponenten. Denn aufgrund des fundamentalen Potenzgesetzes $(a^r)^s = a^{rs}$, dessen Gültigkeit immer gefordert wird, ergäbe sich der folgende Widerspruch:

$$-2 = (-2)^{2\cdot\frac{1}{2}} = \left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2\cdot\frac{1}{2}} = 2\,.$$

> Das Potenzgesetz $(a^r)^s = a^{rs}$ kann für Potenzen mit negativen Basen und gebrochenen Exponenten nicht allgemeingültig sein! Daher muss man die Definition von Potenzen mit gebrochenen Exponenten auf positive Basen einschränken.

**Aufgabe 9:**

a) $\sqrt[3]{(-3)^6} = \sqrt[3]{3^6} = 3^{\frac{6}{3}} = 3^2 = 9,$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{(-5)^4}} = \dfrac{1}{\sqrt{5^4}} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25},$

c) $\sqrt[7]{b^{14}} = \sqrt[7]{|b|^{14}} \underset{(*)}{=} |b|^{\frac{14}{7}} = |b|^2 = b^2.$

d) $\sqrt[n]{b^{2n}} = \sqrt[n]{|b|^{2n}} \underset{(*)}{=} |b|^{\frac{2n}{n}} = |b|^2 = b^2.$

Die Umformungen in c) und d) gelten für alle $b$! Allerdings ist die jeweilige Umformung $(*)$ ohne die Betragsstriche *falsch,* auch wenn am Ende die Betragsstriche wieder wegfallen können!
Alternative Lösung von c)/d) ohne gebrochene Exponenten:

c) $\sqrt[7]{b^{14}} = \sqrt[7]{(b^2)^7} = b^2,$

d) $\sqrt[n]{b^{2n}} = \sqrt[n]{(b^2)^n} = b^2$ (wegen $b^2 \geq 0$).

**Aufgabe 10:**

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2,$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = 9,$

c) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{32} = \sqrt{8},$

d) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{2{,}5} = \sqrt[5]{10},$

e) $\sqrt[4]{32} : \sqrt[4]{2} = 2,$

f) $\sqrt[3]{2x} : \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{2}$ (für $x \neq 0$)

g) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{4x} = 2x$ (für $x > 0$),

h) $\sqrt[4]{10y} : \sqrt[4]{2y} = \sqrt[4]{5}$ (für $y > 0$),

i) $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^3} = x,$

k) $\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x}$ (für $x \neq 0$).

**Aufgabe 11:**

a) $\sqrt[4]{6} : \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = 6^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{6}},$

b) $\sqrt[6]{5} : \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}} = 5^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{5}},$

c) $\sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2},$

d) $\frac{1}{\sqrt[4]{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^4 \cdot 3}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}},$

e) $\sqrt[6]{\sqrt[4]{2^3}} = 2^{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2},$

f) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{7}{12}} = 2^{\frac{7}{6}} = 2\sqrt[6]{2},$

g) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{32},$

h) $\sqrt[5]{3} : \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{3}{10}} = \frac{1}{\sqrt[10]{27}},$

i) $\sqrt[3]{5} : \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 5^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{5}},$

k) $\sqrt[4]{2^9} \cdot \sqrt{2^9} = 2^{\frac{9}{4}+\frac{9}{2}} = 2^{\frac{27}{4}} = 2^6 \cdot \sqrt[4]{2^3},$

**Aufgabe 12:**

a) $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[5]{7}=7^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=7^{\frac{8}{15}}=\sqrt[15]{7^8}$,
b) $\sqrt{11}:\sqrt[5]{11}=11^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}=11^{\frac{3}{10}}=\sqrt[10]{11}$,

c) $\sqrt[4]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3}^2=3^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}=3^{\frac{7}{6}}=\sqrt[6]{3^7}$,
d) $\sqrt[n]{5}\cdot\sqrt[2n]{5}=5^{\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}}=5^{\frac{3}{2n}}=\sqrt[2n]{5^3}$,

e) $\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3^3}$,
f) $\dfrac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{5}$,

g) $\sqrt[5]{0{,}2}\cdot\sqrt[5]{10}=\sqrt[5]{2}$,

h) $\sqrt[4]{0{,}16}\cdot\sqrt[4]{0{,}01}=\sqrt[4]{16\cdot 10^{-4}}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{10^{-4}}=2\cdot 10^{-1}=0{,}2$,

**Aufgabe 13:**

Die Terme werden nicht nur vereinfacht, sondern auch *ohne* gebrochene Exponenten mittels Wurzeln dargestellt:

a) $5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{5^3}$,
b) $3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=3^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{3^7}$,

c) $2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$,
d) $4^{-\frac{2}{3}}\cdot 4^{\frac{3}{4}}=2^{-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}}=2^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{2}$,

e) $2^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{-\frac{3}{10}}=2^{\frac{3}{5}-\frac{3}{10}}=2^{\frac{3}{10}}=\sqrt[10]{2^3}$,
f) $10^{\frac{1}{2}}:10^{\frac{1}{3}}=10^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=10^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{10}$,

g) $6^{-\frac{1}{2}}:6^{\frac{2}{3}}=6^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=6^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{6}$,
h) $2^{-\frac{2}{3}}:2^{-0{,}5}=2^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{7}{6}}=\frac{1}{\sqrt[6]{7}}$,

i) $a^{-\frac{1}{2}}:a=a^{-\frac{1}{2}-1}=a^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a^3}}$,
j) $3^x:3^{-\frac{1}{2}}=3^{x-\frac{1}{2}}=3^{\frac{2x-1}{2}}=\sqrt{3^{2x-1}}$,

**Aufgabe 14:**

Die Terme werden nicht nur vereinfacht, sondern auch *ohne* gebrochene Exponenten mittels Wurzeln dargestellt:

a) $a^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{a}$
b) $b^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{b}}$
c) $x^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{x^3}=(\sqrt[4]{x})^3$

d) $y$
e) $z^{0{,}5}=\sqrt{z}$
f) $(2a)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2a}$

g) $5b$
h) $a^2x^{t-6}$

i) $8^{\frac{7}{2}}\cdot x^5=2^{\frac{21}{2}}\cdot x^5=2^{10}\sqrt{2}\cdot x^5$
k) $15y$

**Aufgabe 15:**

Die Terme werden nicht nur vereinfacht, sondern auch *ohne* gebrochene Exponenten mittels Wurzeln dargestellt:

a) 4
b) 9
c) $5^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{5}$

d) $4^{-\frac{3}{20}}=2^{-\frac{3}{10}}=\dfrac{1}{\sqrt[10]{8}}$
e) $3^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{27}$

**Aufgabe 16:**

Die Terme werden nicht nur vereinfacht, sondern auch *ohne* gebrochene Exponenten mittels Wurzeln dargestellt:

a) $x^{(\frac{5}{4}+\frac{5}{8})(-\frac{4}{5})}=x^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$
b) $x^{(\frac{4}{5}-\frac{8}{5})(-\frac{5}{8})}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

Die nächsten beiden Umformungen kann man kaum als Vereinfachungen bezeichnen. Aber als Übung zur Anwendung binomischer Formeln bei gebrochen Exponenten hier die intendierten Ergebnisse:

c) $x^3-2(xy)^{\frac{3}{2}}+y^3=x^3-2\sqrt{x^3y^3}+y^3$
d) $a^{\frac{5}{3}}+2a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a^5}+2\sqrt[6]{a^5b}+\sqrt[3]{b}$

**Aufgabe 17:**

a) $\sqrt{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$,
b) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}=2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{2}$,

c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[9]{5}$,
d) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$,

e) $\sqrt[n]{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3n]{a}$,
f) $\sqrt{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[2n]{a}$,

g) $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$,

h) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[12]{x}$,

i) $\sqrt{3\sqrt{x}} = \left(3x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left((3^2x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{9x}$,

k) $\sqrt[3]{5\sqrt{a^3}} = \left(5a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = (5^2a^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{25a^3}$,

l) $\sqrt[3]{9\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{9^{1+\frac{1}{3}}} = 9^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt[9]{9^4}$,

m) $\sqrt[3]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[3n]{x}$.

**Aufgabe 18:**

a) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{4^9}}} = 2^{18\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}} = 2$,

b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8^4}}} = 2^{3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 2$,

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{216}} = 6^{3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$,

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{256}} = 2^{8\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$,

e) $32768 = 4\cdot 8192 = 4^2\cdot 2048 = 4^3\cdot 512 = 2^6\cdot 2^9 = 2^{15}$, also $\sqrt[3]{\sqrt[5]{32768}} = 2^{15\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}} = 2$.

**Aufgabe 19:**

a) $b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}} = b^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{b}$

b) $x^{1-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$

c) $a^{\frac{5}{6}-(1-\frac{1}{3})} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{y^{1-\frac{1}{4}}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{y^3}}$

e) $t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-1} = t^{-\frac{5}{6}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{t^5}}$

f) $10^{2n}\cdot 2^{-2n}\cdot 5^{-1} = 5^{2n-1}$

**Aufgabe 20:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $25$ | b) $2^{-2} = \dfrac{1}{4}$ | c) $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ | d) $x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ |
| e) $x^6$ | f) $\sqrt{y^3}$ | g) $s^n$ | h) $s^{4n}$ |
| i) $t^6$ | k) $\sqrt{x}$ | l) $9$ | m) $b^{3n}$ |

# Übungen zu Potenzgleichungen

Aus: Lambacher Schweizer, Lehrbuch Klasse 10, S. 42

**2** Bestimme die Lösungsmenge.

a) $x^6 = 20$  b) $x^6 = -20$  c) $x^5 = 20$  d) $x^5 = -20$
e) $x^4 = 625$  f) $x^5 + 1024 = 0$  g) $343 + x^3 = 0$  h) $x^5 + 17 = -15$
i) $x^3 + 12 = 39$  k) $x^3 - 23 = -13$  l) $87 + x^5 = 93$  m) $x^3 + 0{,}125 = 0$

**3**

a) $5x^3 - 20 = 7 - 3x^3$  b) $65 - 53x^2 = 16 + 47x^2$  c) $1{,}2x^5 + 0{,}00243 = 0{,}2x^5$

**4** Gib die Lösungen auf zwei Nachkommastellen genau an.

a) $x^3 = 100$  b) $x^5 = 15$  c) $x^4 = 13{,}5$  d) $x^6 = 18{,}2$
e) $x^{-3} = -7{,}5$  f) $1{,}2x^4 = 4{,}9$  g) $0{,}3x^3 = 0{,}68$  h) $23{,}4x^4 = 3{,}8$

**5** Bestimme die Lösungsmenge.

a) $(x-3)^3 = 8$  b) $(2x-1)^4 = 16$  c) $(0{,}4x+1)^5 = 243$
d) $(7x-3)^3 = 216$  e) $(5x-3)^3 - 8 = 0$  f) $(x+7{,}3)^4 = 256$
g) $(9-5x)^7 - 2 = 0$  h) $(84x-81)^4 = 81$  i) $(7x-23)^8 = 10^{-8}$
k) $(10^7 \cdot x - 23)^9 = 10^{18}$  l) $125 \cdot 100^2 = (12 - 0{,}1x)^4$  m) $(6{,}5x - 6{,}5)^6 + 36^3 = 0$

**6**

a) $x^{\frac{1}{2}} = 11$  b) $x^{\frac{1}{2}} = 7$  c) $x^{\frac{1}{3}} = 8$  d) $x^{\frac{1}{5}} = 1$
e) $\sqrt[3]{2x} = 1$  f) $4 = \sqrt[3]{2x}$  g) $\sqrt[3]{x-1} = 2$  h) $\sqrt[3]{1-2x} = -0{,}1$

**7**

a) $\sqrt{x^3} = 2$  b) $\sqrt[3]{x^2} = 2$  c) $\sqrt[5]{x^2} = 2$  d) $\sqrt[6]{x^5} = 10^{-5}$
e) $x^{\frac{2}{3}} = 3$  f) $x^{\frac{2}{5}} = 2$  g) $x^{\frac{5}{2}} = 1$  h) $x^{\frac{3}{4}} = 0{,}001$

**8**

a) $\sqrt[3]{x^2+3} - 1 = 0$  b) $\sqrt[4]{x^3 - \sqrt{2}} + 1 = 0$  c) $5 - \sqrt[5]{x^3 - 5} = -238$

**9** Berechne die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von g und f.

a) $g: x \mapsto x^3$; $f: x \mapsto 6x$  b) $g: x \mapsto x^7$; $f: x \mapsto 6x^6 + x^5$  c) $g: x \mapsto x^3 + 2x^2$; $f: x \mapsto x^4 + 2x^2$

## Lambacher Schweizer Band 10, S. 42 – Ergebnisse

### Aufgabe 2:

a) $\mathbb{L} = \{\pm\sqrt[6]{20}\}$, b) $\mathbb{L} = \emptyset$, c) $\mathbb{L} = \{\sqrt[5]{20}\}$, d) $\mathbb{L} = \{-\sqrt[5]{20}\}$,
e) $\mathbb{L} = \{\pm 5\}$, f) $\mathbb{L} = \{-4\}$, g) $\mathbb{L} = \{-7\}$, h) $\mathbb{L} = \{-2\}$,
i) $\mathbb{L} = \{3\}$, k) $\mathbb{L} = \{\sqrt[3]{10}\}$, l) $\mathbb{L} = \{\sqrt[5]{6}\}$, m) $\mathbb{L} = \{-0{,}5\}$.

### Aufgabe 3:

a) $5x^3 - 20 = 7 - 3x^3 \iff 8x^3 = 27 \iff x^3 = \frac{27}{8} = \frac{3^2}{2^3} \iff x = \frac{3}{2}$, also $\mathbb{L} = \{\frac{3}{2}\}$,
b) $65 - 53x^2 = 16 + 47x^2 \iff 49 = 100x^2 \iff x^2 = \frac{7^2}{10^2} \iff x = \pm\frac{7}{10}$, also $\mathbb{L} = \{\pm\frac{7}{10}\}$,
c) $1{,}2x^5 + 0{,}00243 = 0{,}2x^5 \iff x^5 = -\frac{243}{10^5} = -\frac{3^5}{10^5} \iff x = -\frac{3}{10}$, also $\mathbb{L} = \{-0{,}3\}$.

### Aufgabe 4:

a) Eine Lösung: $\sqrt[3]{100} \approx 4{,}64$,
b) eine Lösung: $\sqrt[5]{15} \approx 1{,}72$,
c) zwei Lösungen: $\pm\sqrt[4]{13{,}5} \approx \pm 1{,}92$,
d) zwei Lösungen: $\pm\sqrt[6]{18{,}2} \approx \pm 1{,}62$,
e) eine Lösung: $-\sqrt[3]{\frac{1}{7{,}5}} \approx -0{,}51$,
f) zwei Lösungen: $\pm\sqrt[4]{\frac{4{,}9}{1{,}2}} \approx \pm 1{,}42$,
g) eine Lösung: $\sqrt[3]{\frac{0{,}68}{0{,}3}} \approx 1{,}31$,
h) zwei Lösungen: $\pm\sqrt[4]{\frac{3{,}8}{23{,}4}} \approx \pm 0{,}63$.

### Aufgabe 5:

a) $(x-3)^3 = 8 \iff x - 3 = 2 \iff x = 5$, also $\mathbb{L} = \{5\}$,
b) $(2x-1)^4 = 16 \iff 2x - 1 = \pm 2 \iff 2x = 3 \lor 2x = -1 \iff x = \frac{3}{2} \lor x = -\frac{1}{2}$, also $\mathbb{L} = \{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\}$,
c) $(0{,}4x+1)^5 = 243 = 3^5 \iff 0{,}4x + 1 = 3 \iff x = 5$, also $\mathbb{L} = \{5\}$,
d) $(7x-3)^3 = 216 = 6^3 \iff 7x - 3 = 6 \iff x = \frac{9}{7}$, also $\mathbb{L} = \{\frac{9}{7}\}$.
e) $(5x-3)^3 - 8 = 0 \iff (5x-3)^3 = 2^3 \iff 5x - 3 = 2 \iff x = 1$, also $\mathbb{L} = \{1\}$,
f) $(x+7{,}3)^4 = 256 = 2^8 = 4^4 \iff x + 7{,}3 = \pm 4 \iff x = -3{,}3 \lor x = -11{,}3$, also $\mathbb{L} = \{-3{,}3; -11{,}3\}$,
g) $(9-5x)^7 - 2 = 0 \iff (9-5x)^7 = 2 \iff 9 - 5x = \sqrt[7]{2} \iff x = \frac{1}{5}(9 - \sqrt[7]{2}) \approx 1{,}58$, also $\mathbb{L} = \{\frac{1}{5}(9 - \sqrt[7]{2})\}$,
h) $(84x-81)^4 = 81 = 3^4 \iff 84x - 81 = \pm 3 \iff 84x = 84 \lor 84x = 78 \iff x = 1 \lor x = \frac{13}{14}$, also $\mathbb{L} = \{1, \frac{13}{14}\}$,

### Aufgabe 6:

Definitionsbereich und Lösungsmengen der Gleichungen:
a) $\mathbb{D} = [0, \infty[$, $\mathbb{L} = \{121\}$,
b) $\mathbb{D} = [0, \infty[$, $\mathbb{L} = \{49\}$,
c) $\mathbb{D} = [0, \infty[$, $\mathbb{L} = \{8^3\} = \{512\}$,
d) $\mathbb{D} = [0, \infty[$, $\mathbb{L} = \{1\}$,
e) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{L} = \{\frac{1}{2}\}$,
f) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{L} = \{32\}$,
g) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{L} = \{9\}$,
h) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\sqrt[3]{1-2x} = -0{,}1 \iff 1 - 2x = -10^{-3} \iff 2x = 1{,}001 \iff x = 0{,}5005$, also $\mathbb{L} = \{0{,}5005\}$.

**Aufgabe 7:**

Definitionsbereich und Lösungsmengen der Gleichungen:
a) $\mathbb{D} = [0, \infty[$, $\mathbb{L} = \{\sqrt[3]{4}\}$,
b) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{L} = \{\pm\sqrt{8}\} = \{\pm 2\sqrt{2}\}$,
c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{L} = \{\pm\sqrt{32}\} = \{\pm 4\sqrt{2}\}$,
d) $\mathbb{D} = [0, \infty[$, $\mathbb{L} = \{10^{-6}\}$,
e) $\mathbb{D} = [0, \infty[$, $\mathbb{L} = \{3^{\frac{3}{2}}\} = \{3\sqrt{3}\}$,
f) $\mathbb{D} = [0, \infty[$, $\mathbb{L} = \{3^{\frac{5}{2}}\} = \{4\sqrt{2}\}$,
g) $\mathbb{D} = [0, \infty[$, $\mathbb{L} = \{1\}$,
f) $\mathbb{D} = [0, \infty[$, $\mathbb{L} = \{0{,}0001\}$.

**Aufgabe 8:**

Definitionsbereich und Lösungsmengen der Gleichungen:
a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\sqrt[3]{x^2+3} - 1 = 0 \iff \sqrt[3]{x^2+3} = 1 \iff x^2 + 3 = 1^3 = 1 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$, also $\mathbb{L} = \{\pm 2\}$,
b) $\sqrt[4]{x^3 - \sqrt{2}} + 1 = 0$ hat keine Lösung, da $\sqrt[4]{\ldots}$ nie negativ, insbesondere nie $= -1$ sein kann, also $\mathbb{L} = \emptyset$,
c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $5 - \sqrt[5]{x^3 - 5} = -238 \iff \sqrt[5]{x^3 - 5} = 243 = 3^5 \iff x^3 - 5 = 3^{25} \iff x^3 = 3^{25} + 5 \iff x = \sqrt[3]{3^{25} + 5} = \sqrt[3]{847288609448} \approx 9462{,}6$, also $\mathbb{L} = \{\sqrt[3]{847288609448}\}$.

**Aufgabe 9:**

a) $f(x) = g(x) \iff x^3 = 6x \iff x(x^2 - 6) = 0 \iff x = 0 \lor x = \pm\sqrt{6}$,
b) $f(x) = g(x) \iff 6x^6 + x^5 = x^7 \iff 0 = x^7 - 6x^6 - x^5 = x^5(x^2 - 6x - 1) \iff x = 0 \lor x = 3 \pm \sqrt{9+1} = 3 \pm \sqrt{10}$,
c) $f(x) = g(x) \iff x^4 + 2x^2 = x^3 + 2x^2 \iff 0 = x^4 - x^3 = x^3(x-1) \iff x = 0 \lor x = 1$.

# Übungen zu Exponential- und Logarithmusfunktionen

(Aus: Lambacher Schweizer, Lehrbuch Klasse 10, S. 83–85)

**1** Zeichne die Graphen der Exponentialfunktionen. Bestimme am Graphen die Schrittweite für die Verdopplung bzw. die Halbierung der Funktionswerte.
a) $x \mapsto 0{,}5 \cdot 1{,}6^x$ b) $x \mapsto 3 \cdot 0{,}7^x$ c) $x \mapsto 0{,}25 \cdot 2{,}5^x$ d) $x \mapsto 4 \cdot 0{,}85^x$

**2** Von welchen der Funktionen liegen die Graphen jeweils achsensymmetrisch zueinander bezüglich der y-Achse?
$f_1$: $x \mapsto 3^x$ $f_2$: $x \mapsto 0{,}2^x$ $f_3$: $x \mapsto 5^x$ $f_4$: $x \mapsto 6{,}25^x$
$f_5$: $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $f_6$: $x \mapsto \left(\frac{4}{25}\right)^x$ $f_7$: $x \mapsto 0{,}3^x$ $f_8$: $x \mapsto \left(3\frac{1}{3}\right)^x$

**3** Bestimme zu jeder Funktion diejenige Funktion, deren Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse zum Graphen der ersten Funktion liegt. Gib dazu auch jeweils an, welche der Funktionen monoton wachsend, welche monoton fallend ist.
a) $x \mapsto 4^x$ b) $x \mapsto 0{,}7^x$ c) $x \mapsto 3{,}75^x$ d) $x \mapsto 2{,}7^x$
e) $x \mapsto \left(\frac{4}{5}\right)^x$ f) $x \mapsto \left(2\frac{2}{3}\right)^x$ g) $x \mapsto \left(\frac{17}{4}\right)^x$ h) $x \mapsto 0{,}1^x$

**4** Wie kann man aus dem Graphen von $x \mapsto 2^x$ die Graphen erhalten von
a) $x \mapsto 2^{x+2}$, b) $x \mapsto 2^{x+1}$, c) $x \mapsto 2^x + 1$, d) $x \mapsto 2^{2x}$?

**5** Zeichne den Graphen der Funktion. Zeichne den Graphen der Umkehrfunktion durch Spiegeln an der Geraden $y = x$. Gib die Funktionsvorschrift der Umkehrfunktion an.
a) $x \mapsto 4 \cdot 2^x$ b) $x \mapsto 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $x \mapsto 5 \cdot \lg(x)$ d) $x \mapsto 3 \cdot \log_4(x)$

**6** Bestimme zu folgenden Funktionen jeweils die Umkehrfunktion.
a) $x \mapsto 5^x$ b) $x \mapsto 2 \cdot 3^x$ c) $x \mapsto 0{,}2 \cdot 4{,}5^x$ d) $x \mapsto 4 \cdot 2^{3x}$
e) $x \mapsto \log_{0,5}(x)$ f) $x \mapsto 3 \cdot \lg(x)$ g) $x \mapsto 4 \cdot \log_5(x)$ h) $x \mapsto 0{,}5 \cdot \lg(x^2)$

**7** Löse die Exponentialgleichungen möglichst geschickt.
a) $3^x = \frac{1}{9}$ b) $5^x = 0{,}04$ c) $32^x = 8$ d) $8^x = 0{,}25$
e) $25^x = 0{,}2$ f) $16^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ g) $625^x = 125$ h) $243^x = \frac{1}{9}$
i) $0{,}5^x = 16$ k) $0{,}2^x = 125$ l) $0{,}25^x = 128$ m) $0{,}04^x = 125$

**8** Bestimme y, a bzw. x.
a) $y = \log_7(49)$ b) $y = \log_5(0{,}008)$ c) $y = \log_{0,5}(8)$ d) $y = \log_{27}\left(\frac{1}{3}\right)$
e) $\log_a\left(\frac{1}{27}\right) = -3$ f) $\log_a\left(\frac{1}{9}\right) = -4$ g) $\log_{27}(x) = \frac{4}{3}$ h) $\log_{16}(x) = -\frac{5}{4}$

**9** Gib die Lösungen der Exponentialgleichungen auf 2 Nachkommastellen genau an.
a) $2 \cdot 3^x = 0{,}8$ b) $5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{5}$ c) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^x = \sqrt{2}$ d) $4 + 3 \cdot 2^x = 6{,}9$
e) $3 \cdot 2^{x-4} = 7$ f) $2{,}8 \cdot 1{,}6^{1-x} = 3{,}2$ g) $4 \cdot 1{,}5^{2x-1} = 6{,}5$ h) $5 \cdot 2^{3x+2} = 11$
i) $\frac{4}{3} \cdot 3^{1-x} = 2$ k) $0{,}2 \cdot 0{,}3^{x+1} = 0{,}3$ l) $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{2x+1} = \sqrt{8}$ m) $\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{3x+5} = 35$
n) $5^{x+1} = 8^{2x}$ o) $2{,}8^{3x} \cdot 1{,}5^x = 10$ p) $0{,}4 \cdot 3{,}2^x = 2^{3x-1}$ q) $3^{4x} \cdot 4^x = 5^{x+2}$

**10** Löse durch eine geeignete Substitution.
a) $8^{x+2} - 8^{2x} = 240$ b) $6^{2+x} + 6^{2-x} = 78$ c) $96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} + 3 \cdot 2^{3x-2} = 15$

**11** Bestimme die Lösungen.
a) $\lg(1-3x)=0{,}8$ b) $\lg(x^2-24)=3$ c) $\log_2(x-1)=2{,}5$ d) $\log_3(1-x)=-0{,}3$

**12** Forme mit Hilfe der Logarithmenregeln um.
a) $\lg(2ux)$ b) $\lg(3x^2)$ c) $\log_2(5u^3)$ d) $\log_3(7u^2x^3)$
e) $\lg\left(\frac{ax}{b}\right)$ f) $\log_a\left(\frac{1}{x^2v}\right)$ g) $\log_a\left(\frac{1}{x^2a^3}\right)$ h) $\log_3\left(\frac{4}{9x^5}\right)$
i) $\lg[(x+y)^2]$ k) $\lg\left(\sqrt{1+a}\right)$ l) $\lg\left(\frac{1}{x\cdot\sqrt{1+x}}\right)$ m) $\log_a\left(\frac{1}{a\cdot\sqrt{1+a}}\right)$

**13** Drücke durch einen einzigen Logarithmus aus.
a) $2\cdot\lg(x)+3\cdot\lg(y)-\lg(z)$ b) $\log_a(p)-\frac{1}{2}\cdot\log_a(q)+\frac{1}{4}\cdot\log_a(r)$
c) $3\cdot\log_a(b)+\frac{1}{2}\cdot\log_a(b+x)$ d) $-\lg(u)-2\cdot\lg(v)-\frac{1}{3}\cdot\lg(w)$
e) $2\cdot[\lg(x)-\lg(y)]$ f) $2\cdot\lg(a)-3\cdot[\lg(b)+\lg(a)]$

**14** Löse die Gleichungen.
a) $\lg(x)+\lg(3)=\lg(1+x)$ b) $\lg(x)=2\cdot\lg(x)+\lg(1+x)$ c) $\log_2(x)+8=\log_2(7x-8)$

**15** Vereinfache.
a) $10^{\lg(x+1)}$ b) $10^{2\cdot\lg(x)}$ c) $10^{-2\cdot\lg(x)}$ d) $10^{-\lg(\sqrt{x})}$ e) $10^{[\lg(x)]^2}$

**16** Ein exponentielles Wachstum erfolgt täglich um 3 % (7 %; 40 %; 0,3 %; –11 %; –4 %). Berechne die Verdoppelungs- bzw. die Halbwertszeit.

Fig. 1

**17** Berechne zu dem Angebot der Land-Sparkasse den jährlichen Wachstumsfaktor (Zinsfaktor) und daraus die durchschnittliche Zunahme des Kapitals.
Vergleiche mit der Angabe der Sparkasse.

**18** Direktor Knauf betrachtet die Umsatzsteigerung seiner Firma von 1980 bis 1995. Er meint, 75 % in 15 Jahren ist ja nicht viel, gerade 5 % pro Jahr.
Nimm an, der Umsatz ist jedes Jahr um genau p % gestiegen. Berechne diese durchschnittliche Zunahme.

**19** Die Entwicklung des Exports der Bundesrepublik Deutschland kann für den Zeitraum von 1960 bis 1970 durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden.
a) Wähle $x=0$ für das Jahr 1960. Bestimme die Termdarstellung der Exponentialfunktion. Benutze dazu die Werte von 1960 und 1970.
b) Prüfe, in wie weit die übrigen Angaben der Grafik zu dieser Funktion passen.

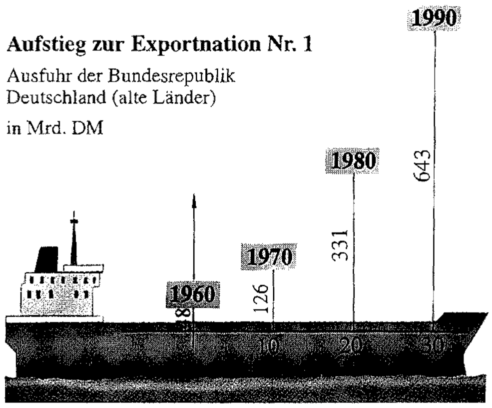

Fig. 2

**20** Bei der Entladung eines Kondensators wird alle 5 Sekunden die Spannung gemessen.
Handelt es sich bei der Funktion $t\mapsto U$ um eine Exponentialfunktion? Wenn ja, gib ihre Termdarstellung an.

| t (Zeit in s) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| U (Spannung in V) | 10 | 6,8 | 4,6 | 3,1 | 2,1 |

**21** Eine unter Hochspannung stehende Ionisationskammer wird mit dem radioaktiven Edelgas Radon 220 gefüllt. Es wird die Stromstärke in Abhängigkeit von der Zeit gemessen.

| t (Zeit in s) | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I (Stromstärke in $10^{-11}$ A) | 4 | 3,1 | 2,4 | 1,9 | 1,4 | 1,1 |

a) Trage die Messwerte in ein Koordinatensystem auf logarithmischem Papier ein.
b) Ermittle die Halbwertszeit.
c) Wie lautet die Termdarstellung der Funktion *Zeit* $\rightarrow$ *Stromstärke*?

**22** Frische Milch ist ein guter Nährboden für Keime. 1 m*l* Milch enthielt eine halbe Stunde nach dem Melken 1300 Keime. Eine Stunde später waren es 7310 Keime.
a) Berechne die Anzahl der Keime unmittelbar nach dem Melken, wenn man exponentielles Wachstum der Keime annimmt.
b) Wie viel Keime enthielt 1 m*l* der Milch 1 Stunde nach dem Melken?

| ASA | DIN |
|---|---|
| 50 | 18 |
| 100 | 21 |
| 200 | 24 |
| 400 | 27 |
| 1000 | 31 |

**23** Die Empfindlichkeit von Filmen wird sowohl in amerikanischen ASA-Werten als auch in deutschen DIN-Werten angegeben. Die Zuordnung ASA $\rightarrow$ DIN kann näherungsweise durch $\text{DIN} = 1 + k \cdot \lg(\text{ASA})$ beschrieben werden. Bestimme k.
Kontrolliere dein Ergebnis mit den übrigen Werten der Tabelle.

**24** Der pH-Wert eines Stoffes ist der negative Zehnerlogarithmus der Wasserstoffionen-Konzentration (genauer: $H_3O^+$-Konzentration in mol/*l*). Ist z. B. der pH-Wert einer Seifenlösung 8,5, so beträgt die $H^+$-Konzentration $10^{-8,5}$ mol/*l*.
a) Welchen pH-Wert hat eine Lauge mit doppelt so hoher $H^+$-Konzentration?
b) Der Regen mit dem bisher höchsten Säuregehalt hatte den pH-Wert 2,4. Wie viel Mal größer als in reinem Wasser (pH-Wert 7) war die $H^+$-Konzentration?

**25** Die Stärke von Erdbeben wird mit der sogenannten Richter-Skala gemessen. Dabei wird das Erdbeben mit einem schwachen, kaum wahrnehmbaren Beben verglichen. Ist das Beben k-mal so stark wie dieses, dann wird ihm die Stärke lg(k) zugeordnet.
a) Wie viel Mal stärker ist ein Erdbeben der Stärke 7 auf der Richter-Skala als ein Erdbeben der Stärke 6?
b) Das Erdbeben von 1906 in San Francisco, das große Teile der Stadt zerstörte, hatte eine Stärke von 8,3. Im Jahr 1978 ereignete sich auf der Schwäbischen Alb ein Beben der Stärke 5,8. Wie viel Mal stärker war das Beben in San Francisco?

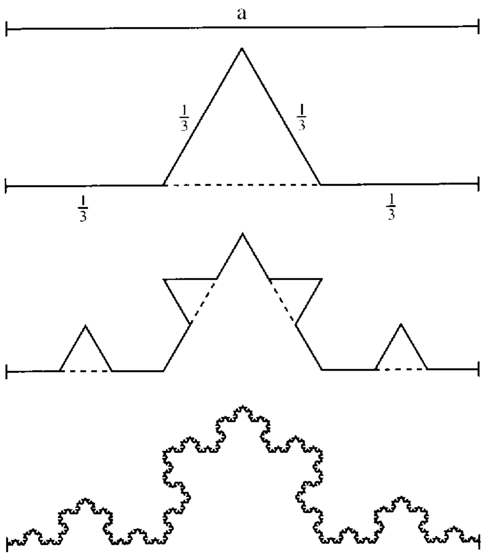

Fig. 1

**26** Fig. 1 zeigt den Beginn einer Folge geometrischer Figuren. Das Konstruktionsprinzip ist bei jedem Schritt dasselbe:
Jede Strecke wird gedrittelt. Über dem mittleren Stück wird ein gleichseitiges Dreieck „aufgesetzt".
a) Offensichtlich wird die Länge des Streckenzuges von Schritt zu Schritt größer. Um welche Art von Wachstum handelt es sich?
b) Berechne die Länge des Streckenzuges nach 4 (40; 400; 100000) Schritten.

## Lambacher Schweizer Band 10, S. 83–85 – Ergebnisse

### Aufgabe 2:

Die Spiegelung eines Graphen an der $y$-Achse erreicht man, indem man im Funktionsterm $x$ durch $-x$ ersetzt! Für Exponentialfunktionen bedeutet dies: $f(x) = a^x$ und $g(x) = a^{-x}$ haben Graphen, die bzgl. der $y$-Achse spiegelbildlich zueinander sind. Wegen $g(x) = a^{-x} = (\frac{1}{a})^x$ haben zwei Exponentialfunktionen spiegelbildche Graphen, wenn die *Basen Kehrwerte voneinander sind.*
Damit erhalten wir folgende Paare von Funktionen mit spiegelbildlichen Graphen:

1. $f_1(x) = 3^x$ und $f_5(x) = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$,
2. $f_(x) = 0{,}2^x = \frac{1}{5}^x = 5^{-x}$ und $f_3(x) = 5^x$,
3. $f_4(x) = 6{,}25^x = (\frac{25}{4})^x$ und $f_6(x) = (\frac{4}{25})^x$,
4. $f_7(x) = 0{,}3^x = (\frac{3}{10})^x$ und $f_8(x) = (\frac{10}{3})^x$.

### Aufgabe 3:

Exponentialfunktionen sind monoton steigend, wenn die Basis $a > 1$ ist, und monoton fallend bei $a < 1$ ($a > 0$ in jedem Falle vorausgesetzt).
a) $f(x) = 4^x$ monoton wachsend, gespiegelter Graph: $g(x) = 4^{-x} = (\frac{1}{4})^x$ monoton fallend.
b) $f(x) = 0{,}7^x$ monoton fallend,
gespiegelter Graph: $g(x) = 0{,}7^{-x} = (\frac{7}{10})^{-x} = (\frac{10}{7})^x$ monoton steigend.
c) $f(x) = 3{,}75^x$ monoton steigend,
gespiegelter Graph: $g(x) = 3{,}75^{-x} = (\frac{15}{4})^{-x} = (\frac{4}{15})^x$ monoton fallend.
d) $f(x) = 2{,}7^x = (\frac{27}{10})^x$ monoton steigend,
gespiegelter Graph: $g(x) = (\frac{10}{27})^x$ monoton fallend.
e) $f(x) = (\frac{4}{5})^x$ monoton fallend,
gespiegelter Graph: $g(x) = (\frac{5}{4})^x$ monoton steigend.
f) $f(x) = (\frac{8}{3})^x$ monoton steigend,
gespiegelter Graph: $g(x) = (\frac{3}{8})^x$ monoton fallend.
g) $f(x) = (\frac{17}{4})^x$ monoton steigend,
gespiegelter Graph: $g(x) = (\frac{4}{17})^x$ monoton fallend.
h) $f(x) = 0{,}1^x$ monoton fallend,
gespiegelter Graph: $g(x) = 10^x$ monoton steigend.

### Aufgabe 7:

a) $3^x = \frac{1}{9} = 3^{-2} \iff x = -2$.
b) $5^x = 0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = 5^{-2} \iff x = -2$,
c) $32^x = 8 \iff 2^{5x} = 2^3 \iff 5x = 3 \iff x = \frac{3}{5}$,
d) $8^x = 0{,}25 \iff 2^{3x} = 2^{-2} \iff 3x = -2 \iff x = -\frac{2}{3}$,
e) $25^x = 0{,}2 \iff 5^{2x} = 5^{-1} \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}$,
f) $16^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff 2^{4x} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{2}} \iff 4x = -\frac{1}{2} \iff x = -\frac{1}{8}$,
g) $625^x = 125 \iff 5^{4x} = 5^3 \iff 4x = 3 \iff x = \frac{3}{4}$,
h) $243^x = \frac{1}{9} \iff 3^{5x} = 3^{-2} \iff 5x = -2 \iff x = -\frac{2}{5}$,
i) $0{,}5^x = 16 \iff 2^{-x} = 2^4 \iff -x = 4 \iff x = -4$,
k) $0{,}2^x = 125 \iff 5^{-x} = 5^3 \iff x = -3$,
l) $0{,}25^x = 128 \iff 2^{-2x} = 2^7 \iff x = -\frac{7}{2}$,
m) $0{,}04^x = 125 \iff (\frac{4}{100})^x = 5^3 \iff (\frac{1}{25})^x = 5^3 \iff 5^{-2x} = 5^3 \iff x = -\frac{3}{2}$.

**Aufgabe 8:**

a) $y = \log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$,
b) $y = \log_5 0{,}008 = \log_5(2^3 \cdot 10^{-3}) = \log_5 5^{-3} = -3$,
b) alternativ: $y = \log_5 0{,}008 \iff 5^y = \frac{8}{1000} = \frac{2^3}{10^3} = 5^{-3} \iff y = -3$,
c) $y = \log_{0,5} 8 \iff 0{,}5^y = 8 \iff 2^{-y} = 2^3 \iff y = -3$,
d) $y = \log_{27} \frac{1}{3} \iff 27^y = \frac{1}{3} \iff 3^{3y} = 3^{-1} \iff 3y = -1 \iff y = -\frac{1}{3}$,
e) $\log_a \frac{1}{27} = -3 \iff a^{-3} = \frac{1}{27} = 3^{-3} \iff a = 3$ (für $a > 0$, $a \neq 1$),
f) $\log_a \frac{1}{9} = -4 \iff a^{-4} = \frac{1}{9} = 3^{-2} \iff a = 3^{\frac{-2}{-4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$(für $a > 0$, $a \neq 1$),
g) $\log_{27} x = \frac{4}{3} \iff x = 27^{\frac{4}{3}} = (3^3)^{\frac{4}{3}} = 3^4 = 81$ (für $x > 0$),
h) $\log_{16} x = -\frac{5}{4} \iff x = 16^{-\frac{5}{4}} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$ (für $x > 0$).

**Aufgabe 9:**

Exponentialgleichungen löst man durch *Logarithmieren,* um die Unbekannte aus dem Exponenten ‘herunterzuholen’.
In den folgenden Rechnungen bezeichnet log immer den Logarithmus zu *irgendeiner* Basis, innerhalb einer Rechnung aber immer *derselben* Basis. Zur Berechnung der Näherungswerte benutzt man irgendeinen auf dem Taschenrechner verfügbaren Logarithmus, am naheliegendsten den *dekadische* Logarithmus $\log_{10} = \lg$.

a) $2 \cdot 3^x = 0{,}8 \iff 3^x = 0{,}4 \iff x \log 3 = \log 0{,}4 \iff x = \dfrac{\log 0{,}4}{\log 3} \approx -0{,}83$,

b) $5 \cdot (\dfrac{2}{3})^x = \dfrac{2}{5} \iff (\dfrac{2}{3})^x = \dfrac{2}{25} \iff x \log \dfrac{2}{3} = \log \dfrac{2}{25} \iff x = \dfrac{\log \frac{2}{25}}{\log \frac{2}{3}} \approx 6{,}23$,

c) $\dfrac{2}{3} \cdot (\dfrac{7}{5})^x = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \iff \log 2 - \log 3 + x \log \dfrac{7}{5} = \dfrac{1}{2} \log 2 \iff x \log \dfrac{7}{5} = \dfrac{1}{2} \log 2 - \log 2 + \log 3 = \log 3 - \dfrac{1}{2} \log 2 \iff x = \dfrac{\log 3 - \frac{1}{2} \log 2}{\log \frac{7}{5}} \approx 2{,}24$,

d) $4 + 3 \cdot 2^x = 6{,}9 \iff 2^x = \dfrac{2{,}9}{3} \iff x \log 2 = \log 2{,}9 - \log 3 \iff x = \dfrac{\log 2{,}9 - \log 3}{\log 2} \approx -0{,}05$

... n) $5^{x+1} = 8^{2x} \iff (x+1) \log 5 = 2x \log 8 \iff x(\log 5 - 2 \log 8) = -\log 5 \iff x = \dfrac{\log 5}{2 \log 8 - \log 5} \approx 0{,}63$,

o) $2{,}8^{3x} \cdot 1{,}5^x = 10 \iff 3x \log 2{,}8 + x \log 1{,}5 = \log 10 \iff x(3 \log 2{,}8 + \log 1{,}5) = \log 10 \iff x = \dfrac{\log 10}{3 \log 2{,}8 + \log 1{,}5} \approx 0{,}66$,

p) $0{,}4 \cdot 3{,}2^x = 2^{3x-1} \iff \log 0{,}4 + x \log 3{,}2 = (3x-1) \log 2 \iff x(\log 3{,}2 - 3 \log 2) = -\log 2 - \log 0{,}4 \iff x \log \dfrac{3{,}2}{2^3} = -\log(2 \cdot 0{,}4) \iff x = -\dfrac{\log 0{,}8}{\log 0{,}4} \approx -0{,}24$

q) $3^{4x} \cdot 4^x = 5^{x+2} \iff 4x \log 3 + x \log 4 = (x+2) \log 5 \iff x(4 \log 3 + \log 4 - \log 5) = 2 \log 5 \iff x = \dfrac{2 \log 5}{4 \log 3 + \log 4 - \log 5} \approx 0{,}77$.

**Aufgabe 10:**

a) Substituiere $z = 8^x$:

$$8^{x+2} - 8^{2x} = 240 \iff 8^2 \cdot z - z^2 = 240 \iff z^2 - 64z + 240 = 0$$
$$\iff z = 32 \pm \sqrt{32^2 - 240} = 32 \pm \sqrt{784} = 32 \pm 28 \iff 8^x = 60 \ \vee \ 8^x = 4$$
$$\iff x \log 8 = \log 60 \ \vee \ x \log 8 = \log 4 \iff x = \frac{\log 60}{\log 8} \approx 1{,}97 \ \vee \ x = \frac{\log 4}{\log 8} \approx 0{,}67$$

b) Substituiere $z = 6^x$:

$$6^{2+x} + 6^{2-x} = 78 \iff 6^2 \cdot z + \frac{6^2}{z} = 78 \iff 6^2 \cdot z^2 + 6^2 = 78z$$
$$\iff z^2 - \frac{13}{6}z + 1 = 0 \iff z = \frac{13}{12} \pm \sqrt{\frac{169}{144} - 1} = \frac{13}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{13}{12} \pm \frac{5}{12}$$
$$\iff 6^x = \frac{3}{2} \ \vee \ 6^x = \frac{2}{3} \iff x = \frac{\log \frac{3}{2}}{\log 6} \approx 0{,}23 \ \vee \ x = \frac{\log \frac{2}{3}}{\log 6} \approx \ -0{,}23$$

c) Substituiere $z = 2^{3x}$:

$$96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} + 3 \cdot 2^{3x-2} = 15 \iff 96 \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot z \cdot 2^{-2} = 15 \iff \frac{48}{z} + \frac{3}{4}z = 15$$
$$\iff 48 + \frac{3}{4}z^2 = 15z \iff z^2 - 20z + 64 = 0 \iff z = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6$$
$$\iff 2^{3x} = 16 = 2^4 \ \vee \ 2^{3x} = 4 = 2^2 \iff 3x = 4 \ \vee \ 3x = 2 \iff x = \frac{4}{3} \ \vee \ x = \frac{2}{3}$$

**Aufgabe 11:**

lg ist eine abkürzende Schreibweise für den dekadischen Logarithmus $\log_{10}$. Aufgrund der Definition des Logarithmus als Exponent: $y = \log_a(x) \iff a^y = x$, erhält man folgende äquivalente Gleichungsumformungen und Lösungen:

a) $\lg(1 - 3x) = 0{,}8 \iff 1 - 3x = 10^{0{,}8} \iff x = \dfrac{1 - 10^{0{,}8}}{3} \approx \ -1{,}77$

b) $\lg(x^2 - 24) = 3 \iff x^2 - 24 = 10^3 = 1000 \iff x^2 = 1024 \iff x = \pm 32\,.$

c) $\log_2(x - 1) = 2{,}5 = \dfrac{5}{2} \iff x - 1 = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2} \iff x = 1 + 4\sqrt{2} \approx 6{,}66\,.$

d) $\log_3(1 - x) = -0{,}3 \iff 1 - x = 3^{-0{,}3} \iff x = 1 - 3^{-0{,}3} \approx 0{,}28$

**Aufgabe 12:**

Bei den folgenden Umformungen setzen wir voraus, dass alle Variablen nur positive Werte annehmen können!

a) $\lg(2ux) = \lg(2) + \lg(u) + \lg(x)$,

b) $\lg(3x^2) = \lg(3) + 2\lg(x)$,

c) $\log_2(5u^3) = \log_2(5) + 3\log_2(u)$,

d) $\log_3(7u^2x^3) = \log_3(7) + 2\log_3(u) + 3\log_3(x)$,

e) $\lg(\frac{ax}{b}) = \lg(a) + \lg(x) - \lg(b)$,

f) $\log_a(\frac{1}{x^2v}) = -2\log_a(x) - \log_a(v)$,

g) $\log_a(\frac{1}{x^2a^3}) = -2\log_a(x) - 3$,

h) $\log_3(\frac{4}{9x^5}) = \log_3(4) - 2 - 5\log_3(x)$,

i) $\lg[(x+y)^2] = 2\lg(x+y)$,

k) $\lg(\sqrt{1+a}) = \frac{1}{2}\lg(1+a)$,

l) $\lg(\frac{1}{x\sqrt{1+x}}) = -\lg(x) - \frac{1}{2}\lg(1+x)$,

m) $\log_a(\frac{1}{a\sqrt{1+a}}) = -1 - \frac{1}{2}\log_a(1+a)$.

**Aufgabe 13:**

a) $2\lg(x) + 3\lg(y) - \lg(z) = \lg(\frac{x^2y^3}{z})$,

b) $\log_a(p) - \frac{1}{2}\log_a(q) + \frac{1}{4}\log_a(r) = \log_a(pr^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{2}}) = \log_a(\frac{p\sqrt[4]{r}}{\sqrt{q}})$,

c) $3\log_a(b) + \frac{1}{2}\log_a(b+x) = \log_a(b^3 \cdot \sqrt{b+x})$,

d) $-\lg(u) - 2\lg(v) - \frac{1}{3}\lg(w) = \lg(\frac{1}{uv^2\sqrt[3]{w}})$,

e) $2[\lg(x) - \lg(y)] = 2\lg(\frac{x}{y}) = \lg(\frac{x^2}{y^2})$.

f) $2\lg(a) - 3[\lg(b) + \lg(a)] = 2\lg(a) - 3\lg(b) - 3\lg(a) = -\lg(a) - 3\lg(b) = \lg(\frac{1}{ab^3})$.

**Aufgabe 15:**

Wir verwenden die grundlegende Beziehung $10^{\lg(x)} = x$.

a) $10^{\lg(x+1)} = x + 1$,

b) $10^{2\lg(x)} = (10^{\lg(x)})^2 = x^2$,

c) $10^{-2\lg(x)} = (10^{\lg(x)})^{-2} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$,

d) $10^{-\lg(\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

e) $10^{[\lg(x)]^2} = 10^{\lg(x)\cdot\lg(x)} = (10^{\lg(x)})^{\lg(x)} = x^{\lg(x)}$.

**Aufgabe 17:**

Sei $p$ der Jahreszinssatz. Dann erhöht sich ein Kapital $K$ in jedem Jahr auf $K + K \cdot p = K(1+p)$, wird also mit dem Faktor $1+p$ multipliziert. In 6 Jahren wird das Kapital also sechsmal mit diesem Faktor multipliziert, also insgesamt mit $(1+p)^6$.
Im vorliegenden Fall ist $K = 1000$, $p$ unbekannt, und $1500 = K(1+p)^6 = 1000(1+p)^6$. Also:

$$1{,}5 = (1+p)^6 \iff 1+p = \sqrt[6]{1{,}5} \iff p = \sqrt[6]{1{,}5} - 1 \approx 0{,}07 = 7\%\,.$$

Einen Wertzuwachs von 50% in 6 Jahren erhält man also bei einem jährlichen Zinssatz von 7%.

**Aufgabe 18:**

Sei $p$ die jährliche Umsatzsteigerung. Sie wird als konstant unterstellt und im Aufgabentext als 'durchschnittliche Zunahme' bezeichnet. Bei einem Umsatzplus von 75% in 15 Jahren, also einem Anwachsen des Umsatzes auf das 1,75-fache innerhalb von 15 Jahren, gilt:

$$1{,}75 = (1+p)^{15} \iff 1+p = \sqrt[15]{1{,}75} \iff p = \sqrt[15]{1{,}75} - 1 \approx 0{,}038 = 3{,}8\%\,.$$

Die durchschnittliche jährliche Umsatzsteigerung beträgt also nur 3,8%.