Ferienübung

1) Stellen Sie die folgenden Zahlen als Potenzen mit möglichst großem Exponenten dar.
a) $a = 6^5 \cdot 21^3 \cdot 7^2 \cdot 14^3$, b) $b = 180 \cdot 300 \cdot 240$.

2) Berechnen Sie (durch Ausmultiplizieren oder vollständiges Faktorisieren):
a) $[(u^2 - v^2)^2 - (u^2 + v^2)^2]^5$, b) $\dfrac{4a^5b + 24a^3b^2 + 36ab^3}{2a^3 + 6ab}$

3) Berechnen Sie die folgenden Bruchterme:
a) $\dfrac{(u+v)^3}{(v^2-u^2)^2}$ b) $\dfrac{\frac{(u+v)^2}{u^2-v^2}}{\frac{u^2-v^2}{u-v}}$ c) $\dfrac{a^2+b^2+2ab}{a^2-b^2}$
d) $\dfrac{\frac{(a-b)^2}{(a^2+b^2)^2}}{\frac{(a^2-b^2)^2}{a^4+2a^2b^2+b^4}}$ e) $\dfrac{9ab-3b^2}{4ab-3a} \cdot \dfrac{4a^2+10ab}{18a-6b}$ f) $\dfrac{\frac{9ab-3b^2}{4ab-3a} \cdot \frac{4a^2+10ab}{18a-6b}}{\frac{4ab+10b^2}{8ab-6a}}$

4) a) Richtig oder falsch?
i) $a^k + b^k = (a+b)^k$, ii) $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$ iii) $(a^k)^l = a^{k+l}$.
b) Geben Sie die Definition für b^{-k} $(k \in \mathbb{N})$ an. Für welche b gilt diese Definition?
Berechnen Sie:
c) $2^{41} - 2 \cdot 4^{20}$ d) $\dfrac{5^{101}+5^{100}}{5^{101}-5^{100}}$ e) $\dfrac{2^{-101}+4^{-50}}{2^{-101}-4^{-50}}$

5) Stellen Sie die folgenden Terme
1. als Bruch ohne negative Exponenten und
2. als Produkt von Potenzen der Variablen (ohne Bruchstrich) dar.
a) $\dfrac{a^{-2}b^2c^{-2}}{a^2b^{-2}c^{-3}}$ b) $\dfrac{a^2(bc)^{-2}}{(ab)^{-2}c^3}$ c) $\dfrac{\frac{(uv)^3w^{-2}}{u^{-2}(vw)^{-1}}}{\frac{(uvw)^{-2}w^3}{u^{-1}v^3w^2}}$

6) Lösen Sie die folgenden (Un)Gleichungen. Geben Sie die Lösungsmengen an!
a) $(2x-3)(2x-5) = 4x^2 - 14x + 11$,
b) $3 - 3x > 3(7 - 2x)$,
c) $8x^2 + 2(x-4) \leq (4x-1)(2x+1)$.

7) Bei welchen drei aufeinanderfolgenden *geraden* Zahlen ist die Summe um 60 kleiner als das Sechsfache der mittleren Zahl?

8) Vertauscht man bei einer dreistelligen Zahl a Einer- und Hunderterziffer, so ist die neue Zahl durch 45 teilbar und um 198 kleiner als a. Bestimmen Sie a.

9) Ein Benzinkanister wurde an der Tankstelle zu 90% gefüllt, es wurden 5 Liter an einen Motorradfahrer abgegeben und zwei Drittel des Restes in den Autotank gefüllt. Danach ist der Kanister noch zu 10% gefüllt. Wie groß ist das Fassungsvermögen des Kanisters?

10) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
a) $(x - a^2)(a^2+1) + 2a^2 = 5x - 3a^2$, b) $3x^3 = 48x$.

Ferienübung — Lösungen

1) a) $a = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 3^3 \cdot 7^3 \cdot 7^2 \cdot 2^3 \cdot 7^3 = 2^8 \cdot 3^8 \cdot 7^8 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^8 = 42^8$,
   b) $b = 10 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 10 = 10^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^4 = 60^4$.
2) a) $-4^5 u^{10} v^{10} = -1024 u^{10} v^{10}$,
   b) $2b(a^2 + 3b)$.
3) a) $\dfrac{u+v}{(u-v)^2}$, b) $\dfrac{1}{u-v}$, c) $\dfrac{a+b}{a-b}$,
   d) $\dfrac{1}{(a+b)^2}$, e) $\dfrac{b(2a+5b)}{(4b-3)}$ f) a
4) a) i) falsch, ii) richtig, iii) falsch.
   b) $b^{-k} = \dfrac{1}{b^k}$ für $b \neq 0$.
   c) 0, d) $\dfrac{3}{2}$, e) -3.
5) a) $a^{-4} b^4 c = \dfrac{b^4 c}{a^4}$, b) $a^4 c^{-5} = \dfrac{a^4}{c^5}$, c) $u^6 v^9$.
6) a) $\mathbb{L} = \{2\}$, b) $\mathbb{L} =]6, \infty[$, c) $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.
7) Sei x die mittlere der drei Zahlen. Bedingung: $(x-2) + x + (x+2) = 6x - 60$. Die gesuchten Zahlen sind 18, 20, 22.
8) Sei $a = 100x + 10y + z$ mit den Dezimalziffern x, y, z von a. Vertauscht man x und z, so erhält man $b = 100z + 10y + x$. Da b durch 45, also auch durch 5 teilbar ist, muss $x = 0$ oder $x = 5$ sein. Da a dreistellig ist, ist x nicht 0, also $x = 5$.
   Laut Aufgabentext gilt

$$b = a - 198 \iff 198 = a - b = 99x - 99z = 99(5 - z) \iff 2 = 5 - z \iff z = 3\,.$$

   Da b durch 45, also auch durch 9 teilbar ist, ist 9 ein Teiler der Quersumme $z + y + x = 3 + y + 5 = 8 + y$. Also muss $y = 1$ sein. Die gesuchte Zahl ist 513.
9) Sei x das Fassungsvermögen des Kanisters. Bedingung:

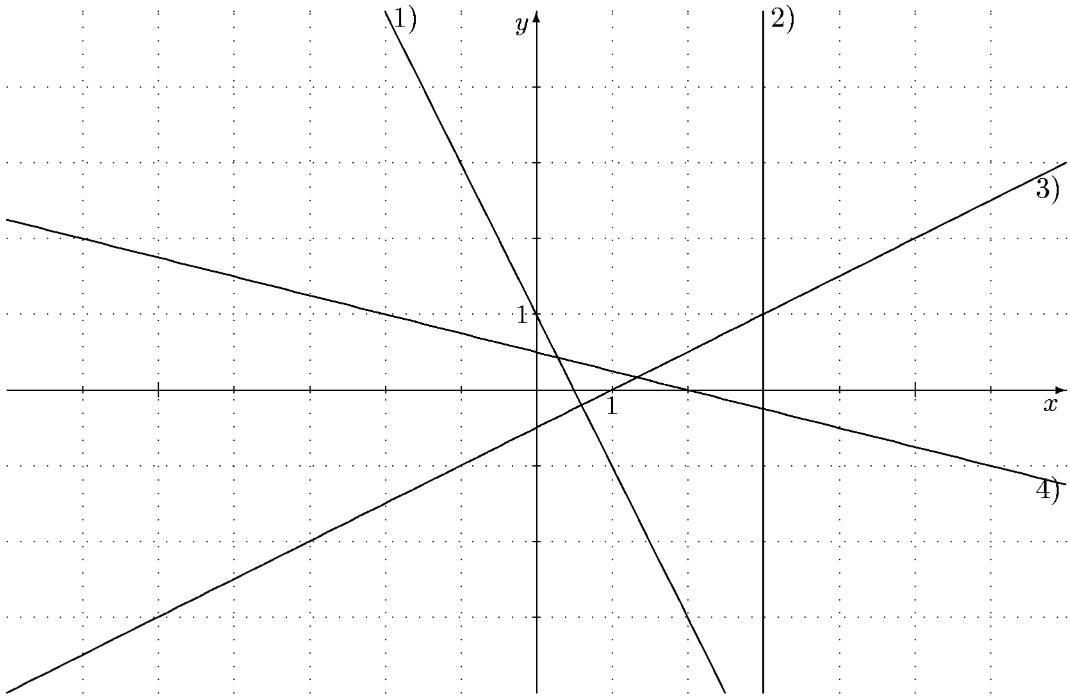
$$(0{,}9x - 5) \cdot \frac{1}{3} = 0{,}1x\,.$$

   Lösung: $\frac{25}{3}$ Liter.
10) a) Umformung zu $(a^2 - 4)x = a^2(a^2 - 4)$. Division durch $a^2 - 4$, wenn möglich. Ergebnis: $\mathbb{L} = \{a^2\}$, falls $a^2 \neq 4$ und $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$, falls $a^2 = 4$.
   b) $0 = x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = x(x-4)(x+4)$, also $\mathbb{L} = \{0, -4, 4\}$.

Ferienübung II

1) a) Was versteht man unter einer linearen Gleichung (mit zwei Variablen)?
b) Was können Sie über die Lösungsmenge einer solchen linearen Gleichung allgemein sagen?
c) Welche besondere Form haben lineare Funktionsgleichungen?
d) Welche Geraden lassen sich durch lineare Funktionsgleichungen beschreiben?

2) a) Markieren Sie auf den Geraden in der nachstehenden Skizze Punkte, die ganzzahlige Koordinaten haben, und berechnen Sie dann aus diesen Punkten Gleichungen für die Geraden.



b) Welche der Geraden sind Funktionsgraphen, welche nicht?
c) Welche der Geraden schneiden sich rechtwinklig?
d) Markieren Sie das rechtwinklige Dreieck in der obigen Skizze und berechnen Sie die Eckpunkte.
e) Ergänzen Sie die Zeichnung durch die Graphen der folgenden Funktionen:
$f(x) = \frac{4}{3}x + 2, \qquad g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, \qquad h(x) = 3.$
Benutzen Sie auch dabei nur Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.

3) Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $A = (3, -1)$, $B = (1, 3)$ und $C = (-3, 1)$.
a) Bestimmen Sie Gleichungen für die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks. (Eine *Seitenhalbierende* eines Dreiecks ist die Gerade durch einen Eckpunkt und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite.)
[Kontrollergebnis: Die Seitenmittelpunkte sind $(2, 1)$, $(0, 0)$ und $(-1, 2)$.]
b) Zeigen Sie, dass sich alle drei Seitenhalbierenden in *einem* Punkt schneiden, und

bestimmen Sie ihn. [Dieser Punkt ist der sog. *Schwerpunkt* des Dreiecks.]
c) Vergleichen Sie die Ergebnisse Ihrer Rechnungen mit einer sauberen Zeichnung.

4) a) Wieviele Lösungen kann ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten haben?
b) Begründen Sie Ihre Antwort durch geeignete geometrische Argumentationen.
c) Geben Sie für die folgenden linearen Gleichungssysteme jeweils die Zahl der Lösungen an – ohne die Lösungen zu bestimmen – und begründen Sie Ihre Antwort kurz.

i) $\begin{bmatrix} y & = & 2x-3 \\ y & = & -2x-1 \end{bmatrix}$, ii) $\begin{bmatrix} y & = & \frac{1}{2}x+1 \\ y & = & \frac{1}{2}x-1 \end{bmatrix}$,

iii) $\begin{bmatrix} y & = & \frac{x}{3}+4 \\ y & = & \frac{1}{3}x-1 \end{bmatrix}$, iv) $\begin{bmatrix} y & = & 2x+5 \\ 2y & = & 4x+10 \end{bmatrix}$.

5) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $\begin{bmatrix} 2x-y & = & 6 \\ x-y & = & 8 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2x-y & = & 4 \\ -6x+3y & = & 2 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 6y + 4z = 2 \\ x - 4y = 6 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} -x + y + z = 0 \\ 3x - 3y - 2z = 2 \\ -2x + 4y + 3z = 1 \end{bmatrix}$.

6) In einem Zeltlager stehen zwölf Zelte, die jeweils mit 4 Jungen bzw. 3 Mädchen voll belegt sind. Insgesamt nehmen 43 Kinder am Zeltlager teil. Wieviele davon sind Jungen, wieviele Mädchen?

7) Julia kauft zum Muttertag für 9,50 EUR einen Strauß mit drei Rosen und zwei Lilien, der Bruder Jens kauft für 10,50 EUR einen Strauß mit zwei Rosen und drei Lilien. Der Vater weiß nicht, dass die Kinder Blumen schenken, und kauft einen Strauß mit zwölf Rosen und drei Lilien. Wieviel muss der Vater für seinen Strauß bezahlen.

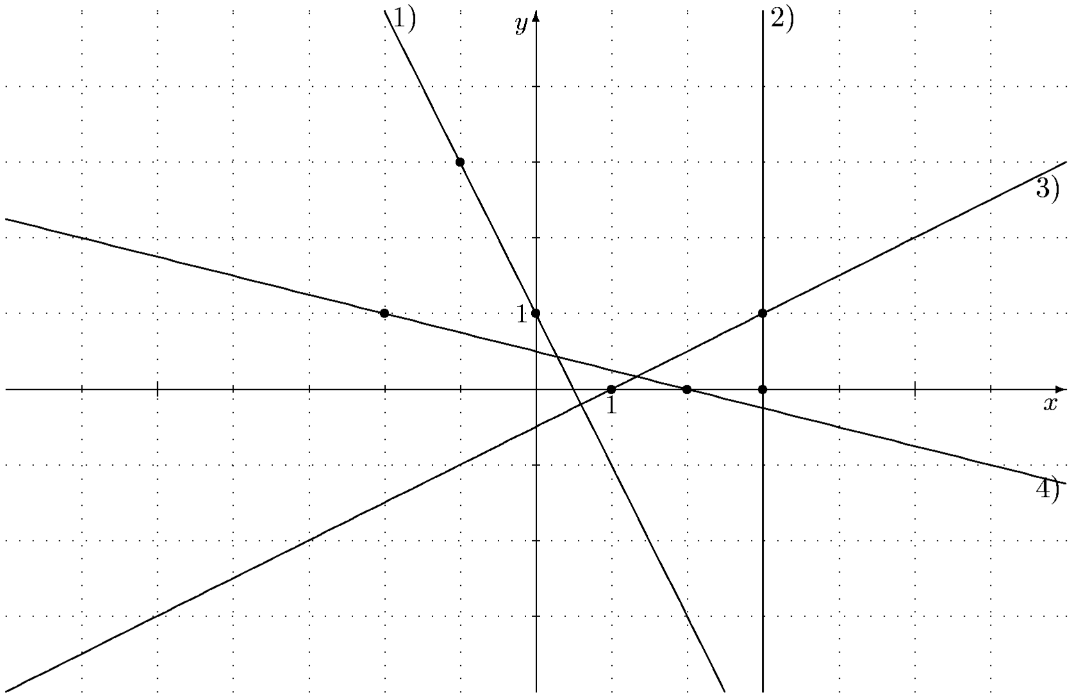
8) a) Bestimmen Sie drei Zahlen so, dass sich die Summen 10 bzw. 11 bzw. 12 ergeben, wenn man je zwei von ihnen addiert.
b) Bei drei Zahlen x, y und z kann man von jeweils zweien den Mittelwert bilden. Ist es möglich, dass sich dabei jedes Mal der Mittelwert 10 ergibt, obwohl die drei Zahlen verschieden sind?
c) Untersuchen Sie die Frage b) für einen festen Mittelwert m (statt 10).

Ferienübung II — Lösungen

1) a) Eine lineare Gleichung ist eine Gleichung der Form $ax+by=c$ mit Zahlen a, b, c.

b) Die Lösungsmenge einer solchen Gleichung ist eine Gerade in der Ebene (außer in dem Sonderfall $a=b=0$).
c) Eine lineare Funktionsgleichung hat die Form $y=ax+b$.
d) Alle Geraden, die nicht parallel zur y-Achse sind, lassen sich durch lineare Funktionsgleichungen beschreiben (d. h. sind Lösungsmenge linearer Funktionsgleichungen).

2) Wir bezeichnen die einzelnen Geraden mit $G_1, \ldots, G_4$ entsprechend der angegebenen Nummerierung. Die massiv markierten Punkte auf den Graphen haben ganzzahlige Koordinaten:



G_1 enthält die Punkte $(-1,3)$ und $(0,1)$, also ist der Anstieg $a_1=\frac{1-3}{0-(-1)}=-2$. Der y-Achsenabschnitt ist 1, die Gleichung also $y=-2x+1$.
G_2 enthält zwei Punkte $(3,1)$ und $(3,0)$ mit gleicher x-Koordinate, verläuft also parallel zur y-Achse und hat als Gleichung $x=3$.
G_3 enthält die Punkte $(1,0)$ und $(3,1)$, hat also den Anstieg $a_3=\frac{1-0}{3-1}=\frac{1}{2}$. Eine Gleichung für G_3 lautet also $y=\frac{1}{2}x+b$. Einsetzen von $(0,1)$ ergibt $0=\frac{1}{2}\cdot 1+b \iff b=-\frac{1}{2}$ und die Gleichung lautet: $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.
G_4 enthält die Punkte $(-2,1)$ und $(2,0)$. Der Anstieg ist daher $a_4=\frac{0-1}{2-(-2)}=-\frac{1}{4}$. $(2,0)$ in $y=-\frac{1}{4}x+b$ eingesetzt ergibt $0=-\frac{1}{4}\cdot 2+b \iff b=\frac{1}{2}$. Eine Gleichung für G_4 ist daher $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.
c) Wir vergleichen die Anstiege $a_1=-2$, $a_3=\frac{1}{2}$ und $a_4=-\frac{1}{4}$. Wegen $a_1\cdot a_3=-1$ schneiden sich die Geraden G_1 und G_3 rechtwinklig. Alle anderen Geraden schneiden sich nicht rechtwinklig.

d) Die Eckpunkte des rechtwinkligen Dreiecks sind durch kleine Kreise markiert (siehe nachfolgende Skizze). Sie sind die Schnittpunkte der Geraden G_1, G_3 und G_4 miteinander.
Schnittpunkt A von G_1 mit G_3:

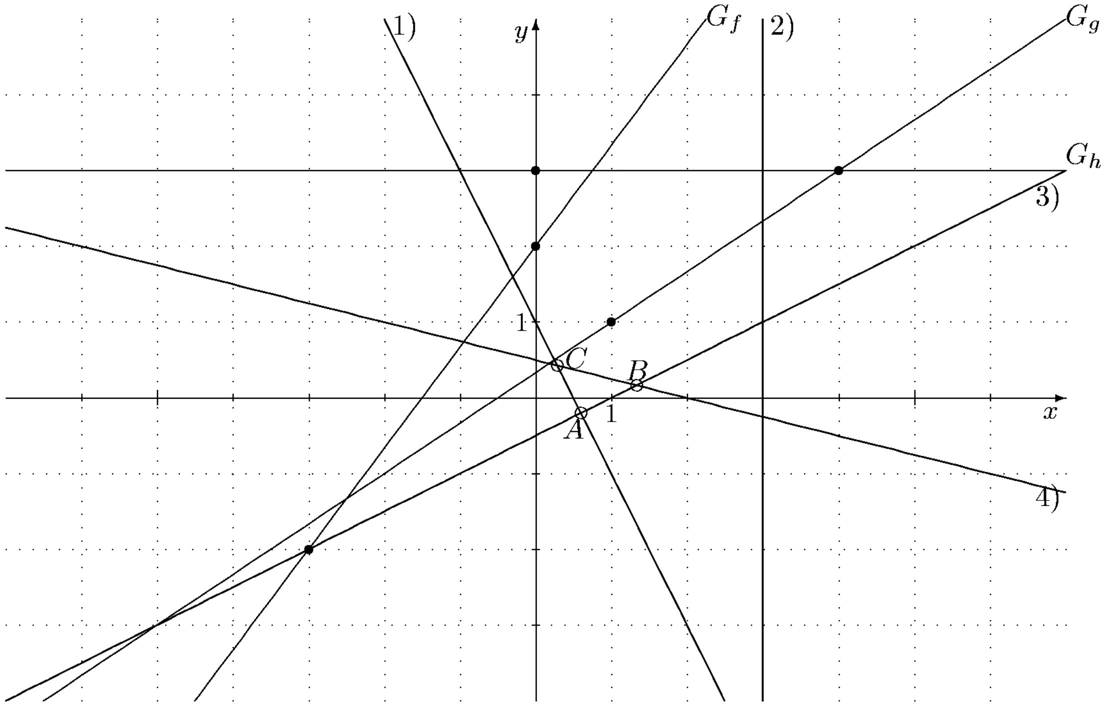
$$-2x+1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \iff -4x+2=x-1 \iff 5x=3 \iff x=\frac{3}{5}\,,$$
$$y=-2\cdot\frac{3}{5}+1=-\frac{1}{5}\,,\quad A=(\frac{3}{5}\,,-\frac{1}{5})$$

Schnittpunkt B von G_3 mit G_4:

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2} \iff 2x-2=-x+2 \iff 3x=4 \iff x=\frac{4}{3}\,,$$
$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\,,\quad B=(\frac{4}{3}\,,\frac{1}{6})\,.$$

Schnittpunkt C von G_1 mit G_4:

$$-2x+1=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2} \iff -8x+4=-x+2 \iff 7x=2 \iff x=\frac{2}{7}\,,$$
$$y=-2\cdot\frac{2}{7}+1=\frac{3}{7}\,,\quad C=(\frac{2}{7},\frac{3}{7})$$



e) In obiger Skizze sind auch die geforderten Graphen eingezeichnet. Dazu benutzen wir die massiv markierten Punkte:

$$f(0)=2 \ \wedge\ f(-3)=-2 \implies G_f \text{ verläuft durch } (0,2),(-3,-2)\,,$$
$$g(1)=1 \ \wedge\ g(4)=3 \implies G_g \text{ verläuft durch } (1,1),(4,3)\,,$$

Der Graph von h ist die Parallele zur x-Achse durch $(0,3)$.

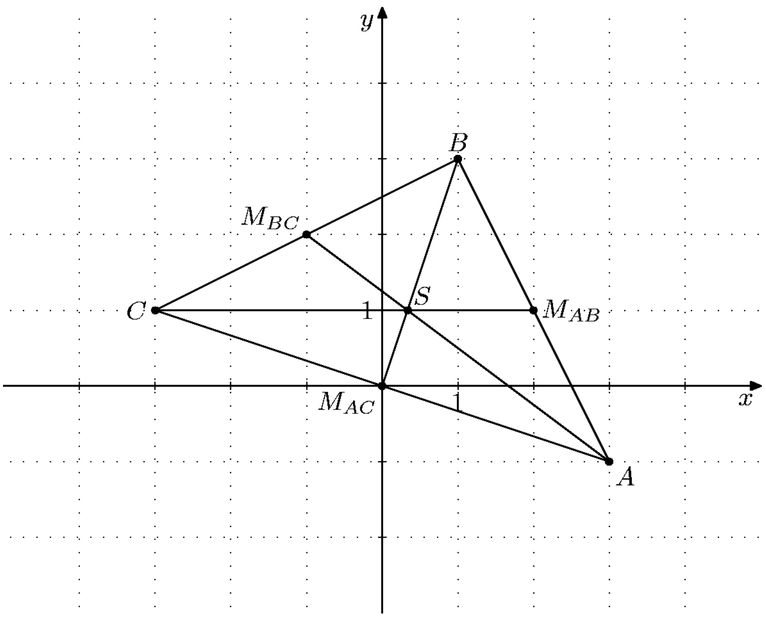
3) a) Die Koordinaten der Seitenmittelpunkte sind die Mittelwerte der Koordinaten der Endpunkte:

$$M_{AB} = (\frac{3+1}{2}\,,\ \frac{-1+3}{2}) = (2,1)\,,$$
$$M_{AC} = (\frac{3+(-3)}{2}\,,\ \frac{-1+1}{2}) = (0,0)\,,$$
$$M_{BC} = (\frac{1+(-3)}{2}\,,\ \frac{3+1}{2}) = (-1,2)\,.$$

Die Seitenhalbierenden sind die Geraden durch einen Eckpunkt und die gegenüberliegende Seitenmitte:
Seitenhalbierende s_1 durch $A = (3,-1)$ und $M_{BC} = (-1,2)$:
Anstieg $\dfrac{2-(-1)}{-1-3} = -\dfrac{3}{4}$, $b = y + \dfrac{3}{4}x = -1 + \dfrac{3}{4}\cdot 3 = \dfrac{5}{4}$, Gleichung $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}$.
Seitenhalbierende s_2 durch $B = (1,3)$ und $M_{AC} = (0,0)$:
Anstieg $\dfrac{3-0}{1-0} = 3$, y-Achsenabschnitt $b = 0$, Gleichung $y = 3x$.
Seitenhalbierende s_3 durch $C = (-3,1)$ und $M_{AB} = (2,1)$:
Anstieg $\dfrac{1-1}{2-3} = 0$, $b = 1$, Gleichung $y = 1$.
b) Wir berechnen zunächst den Schnittpunkt von *zwei* der Seitenhalbierenden, etwa von s_2 und s_3:

$$3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}\,,\quad y = 1\,,\quad S = (\frac{1}{3}\,,\,1)\,.$$

Nun überprüfen wir, dass $S = (\frac{1}{3}\,,\,1)$ die Gleichung $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ von s_1 erfüllt und also auch auf der ersten Seitenhalbierenden liegt.
c) Skizze:



4) a) Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten kann *keine, eine* oder *unendlich* viele Lösungen haben.
b) Jede einzelne Gleichung des Systems hat als Lösungsmenge eine Gerade in der

Ebene. Die Lösungsmenge des Systems ist also die Schnittmenge von Geraden. Bei zwei Gleichungen bzw. Geraden sind folgende Fälle möglich: Beide Geraden sind parallel und verschieden, also kein Schnittpunkt, keine Lösung, oder beide Geraden sind identisch, also unendlich viele Lösungspunkte, oder die Geraden sind nicht parallel und schneiden sich (in der Ebene) genau einmal.
c) i) hat genau eine Lösung, da die einzelnen Geraden unterschiedlichen Anstieg (2 bzw. -2) haben und daher nicht parallel sind.
ii) hat keine Lösung, da die Geraden parallel (Anstieg $\frac{1}{2}$), aber verschieden sind (y-Achsenabschnitte 1 bzw. -1).
iii) wie ii), da gleicher Anstieg $\frac{1}{3}$.
iv) Die zweite Gleichung ist das Doppelte der ersten, also sind beide Gleichungen äquivalent. Das Gleichungs*system* ist äquivalent zu *einer* linearen Gleichung, die Lösungsmenge also eine Gerade.

5) Ergebnisse:
a) Einziger Lösungspunkt $(-2,-10)$: $\mathbb{L} = \{(-2,-10)\}$.
b) Keine Lösung: $\mathbb{L} = \emptyset$.
c) Einziger Lösungspunkt $(2,-1,1)$: $\mathbb{L} = \{(2,-1,1)\}$.
d) Einziger Lösungspunkt $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},2)$: $\mathbb{L} = \{(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},2)\}$.

6) Siehe Unterricht 8.1.2010.
Ergebnis: 28 Jungen und 15 Mädchen nehmen am Zeltlager teil.

7) Siehe Unterricht 8.1.2010.
Ergebnis: Der Strauß des Vaters koster 25,50 EURO.

8) a) Seien x, y, z die gesuchten Zahlen. Dann muss folgendes Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{bmatrix} x & + & y & & & = 10 \\ x & & & + & z & = 11 \\ & & y & + & z & = 12 \end{bmatrix}.$$

Wir führen Gauß-Elimination durch:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-1) \\ \cdot 1 \\ \\ \end{array} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 13 \end{array}\right)$$

Wir lösen nun von unten nach oben auf:

$$\begin{aligned} 2z = 13 &\iff z = \frac{13}{2}, \\ -y + z = 1 &\implies -y + \frac{13}{2} = 1 \iff y = \frac{11}{2}, \\ x + y = 10 &\implies x + \frac{11}{2} = 10 \iff x = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

b) Seien x, y, z drei Zahlen, von denen je zwei den Mittelwert 10 haben. Das bedeutet, dass die Summe von je zwei Zahlen 20 ist. Man wird also auf ein lineares Gleichungssystem wie in a) geführt, aber mit jeweils der rechten Seite 20. Dieses löst man wie oben und findet: $x = y = z = 10$: Die drei Zahlen müssen notwendig gleich sein. Es gibt also keine verschiedenen Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.

c) Hier macht man dasselbe wie in b), nur dass die rechte Seite der Gleichungen jeweils $2m$ ist. Wieder findet man als einzige Lösung: $x = y = z = m$.