Studienkolleg an der RWTH Aachen

AT3 Mathematik (Kn) **2. Klausur** **11. Juni 2004**

1) Gegeben sind ein Dreieck mit den Eckpunkten $A = (2, 8, 0)$, $B = (2, 3, 5)$ und $C = (6, 6, 0)$ sowie die Punkte $D = (4, 7, 3)$ und $E = (-6, 23, 7)$
a) Berechnen Sie den Winkel $\angle BAC$ des Dreiecks, d. h. den Winkel, den die Seiten AB und AC einschließen.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
c) Zeigen Sie, dass das Tetraeder $ABCD$ (mit D als Spitze und ABC als Boden) ein *gerades* Tetraeder ist. Begründen Sie allgemein, warum ein solches Tetraeder auf der Bodenfläche ABC stabil steht.
d) Untersuchen Sie, ob auch das Tetraeder $ABCE$ mit der Spitze E (statt D) auf der Bodenfläche ABC stabil steht. Sollte es umkippen, in welche Richtung kippt es dann?

2) Die folgende Tabelle enthält die Bevölkerungszahl N der Erde, gemessen in Milliarden. Es bezeichnet t die Maßzahl der Zeit, gemessen in Jahren, beginnend mit $t = 0$ im Jahr 2000.

t	1	2	3
N	6,104	6,190	6,276

a) Es wird behauptet, dass die Bevölkerungszahl exponentiell wächst. Überprüfen Sie diese Behauptung und bestimmen Sie einen Funktionsterm $f(t)$, der das Wachstum der Erdbevölkerung beschreibt. (Runden Sie auf 3 Stellen nach dem Komma.)
b) Wann ungefähr wird sich die Bevölkerungszahl des Jahres 2000 verdoppelt haben?
c) Wie viele Menschen leben voraussichtlich im Jahr 2080 auf der Erde?

3) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\,.$$

a) Bestimmen Sie Definitions- und Wertemenge von f. Geben Sie alle Asymptoten an. In welchen Punkten schneidet der Graph von f die Koordinatenachsen?
b) Zeichnen Sie den Graphen von f in ein geeignetes Koordinatensystem.
c) Begründen Sie, dass die Funktion f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt und bestimmen Sie einen Funktionsterm für f^{-1}. Geben Sie auch die Definitions- und Wertemenge an.
d) Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} in das Koordinatensystem aus Teil b).

4) Gegeben ist eine Logarithmusfunktion f mit dem Funktionsterm

$$f(x) = \log_a[b(x+c)]\,.$$

Der Graph $G(f)$ dieser Funktion hat an der Stelle $x = 5$ eine vertikale (senkrechte) Asymptote. Außerdem verläuft er durch die Punkte $P_1 = (1, 2)$ und $P_2 = (-3, 4)$.
a) Bestimmen Sie den Funktionsterm dieser Funktion und geben Sie ihre Definitions- und Wertemenge an.
Falls Sie a) nicht lösen können, benutzen Sie für die Aufgabenteile b), c) und d) den Funktionsterm $f_1(x) = \log_{\sqrt{3}}[(-\frac{1}{3})(x-4)]$.
b) In welchen Punkten schneidet der Graph $G(f)$ die x- bzw. die y-Achse?
c) Skizzieren Sie den Graphen in einem geeigneten Koordinatensystem und geben Sie sein Monotonieverhalten an.
d) Für welche x-Werte sind die Funktionswerte kleiner als -2?

2. Klausur — Lösungen

1) a) Es ist $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\angle BAC = \arccos \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \arccos \frac{10}{\sqrt{50}\sqrt{20}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} = 71{,}57^0 .$$

b) Mit dem in a) berechneten Winkel α kann man die Höhe durch C berechnen: $h_C = |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$, und dann die Fläche

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{50}\sqrt{20} \cdot \sin 71{,}57^0 = 15 .$$

Exakte Rechung mit

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \sqrt{0{,}9} = \frac{3}{\sqrt{10}} .$$

c) Man muss zeigen, dass der Verbindungsvektor von D zum Schwerpunkt S_{ABC} des Bodendreiecks orthogonal zur Bodenebene, also zu zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren, etwa $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist. Wir berechnen durch Mittelung der Ortsvektoren von A, B und C

$$\overrightarrow{OS_{ABC}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DS_{ABC}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

und dann

$$\overrightarrow{DS_{ABC}} \bullet \vec{u} = \frac{20}{3} - \frac{20}{3} = 0 , \quad \overrightarrow{DS_{ABC}} \bullet \vec{v} = -\frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 0 .$$

Damit ist gezeigt, dass die Schwerelinie durch D zugleich Höhe ist. Da auf jeder Schwerelinie der Schwerpunkt S_{ABCD} des Tetraeders liegt, ist die Schwerelinie auch das Lot von S_{ABCD} auf die Bodenebene $e(A, B, C)$. Der Lotfußpunkt ist daher der Schwerpunkt S_{ABC} des Bodendreiecks, der bekanntlich im Innern des Dreiecks liegt.

d) In diesem Falle muss man das Lot vom Schwerpunkt S_{ABCE} auf die Bodenebene ermitteln. Zunächst ergibt sich durch Mittelung der Ortsvektoren von A, B, C, E der Schwerpunkt $S = S_{ABCE} = (1, 10, 3)$ des Tetraeders $ABCE$.
Es sei H der Lotfußpunkt, also

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\vec{u} + s\vec{v} \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{SH} \bullet \vec{u} = 0 = \overrightarrow{SH} \bullet \vec{v} .$$

Mit $\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ergeben sich die beiden linearen Gleichungen für r, s:

$$0 = \overrightarrow{SA} \bullet \vec{u} + r\vec{u} \bullet \vec{u} + s\vec{v} \bullet \vec{u} = -5 + 50r + 10s \iff 10r + 2s = 1\,,$$
$$0 = \overrightarrow{SA} \bullet \vec{v} + r\vec{u} \bullet \vec{v} + s\vec{v} \bullet \vec{v} = 8 + 10r + 20s \iff 10r + 20s = -8\,.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass zumindest eine der Zahlen r, s negativ sein muss: Das Tetraeder kippt um. Genauer ergibt sich durch Elimination von r zunächst $18s = 9 \iff s = -\frac{1}{2}$ und dann $r = \frac{1}{5}$. Da der zu $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ gehörige Parameter $s < 0$ ist, während $0 < r < 1$ ist, kippt das Tetraeder über die Kante AB um.

2) Es wird unterstellt, dass die Weltbevölkerung *exponentiell* wächst, d. h. $f(t) = c \cdot a^t$ ist.

a) Mit den angegebenen Daten erhält man $f(1) = c \cdot a = 6{,}104$, $f(2) = c \cdot a^2 = 6{,}190$ und $f(3) = c \cdot a^3 = 6{,}276$. Durch Division eliminiert man c und erhält für a (auf 3 Stellen gerundet):

$$a = \frac{f(2)}{f(1)} \approx 1{,}014\,.$$

Für c erhält man dann

$$c = \frac{f(1)}{a} = 6{,}02\,.$$

Mit diesen Werten bestätigt sich

$$f(2) = c \cdot a^2 = 6{,}19\,.$$

b) Man löst die Gleichung

$$2f(0) = f(t) \iff 2c = c \cdot a^t \iff t = \frac{\log 2}{\log a} = \frac{\log 2}{\log 1{,}014} = 49{,}86 \approx 50\,.$$

c) Man setzt $t = 80$ ein: $f(80) = 6{,}02 \cdot 1{,}014^{80} = 18{,}308$. Im Jahr 2080 beträgt die Weltbevölkerung (bei diesem Ansatz für f) etwa 18 Milliarden.

3) a,c) Es ist $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Die Umkehr*relation* von f ist gegeben durch

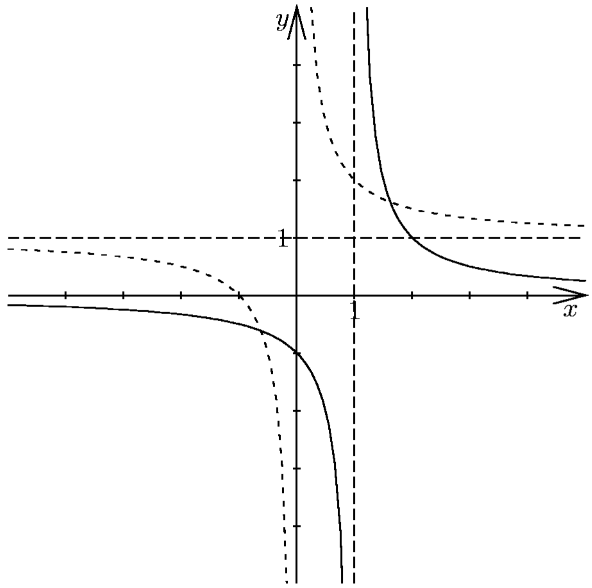
$$x = f(y) \iff x = \frac{1}{y-1} \iff y - 1 = \frac{1}{x} \iff y = 1 + \frac{1}{x} \quad (x \neq 0\,,\ y \neq 1)\,.$$

Die Umkehrrelation ist eine Funktion, da sie äquivalent ist zu einer Funktionsgleichung. Ihr Funktionsterm ist $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{x}$ und es gilt:

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \text{und} \quad \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{W}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Asymptote von f für $x \to \pm\infty$ ist die x-Achse, Polgerade ist die Gerade mit der Gleichung $x = 1$.

$f(0) = -1 \implies S_y = (0, -1)$. Ein Schnittpunkt mit der x-Achse existiert nicht.
b,d) Skizzen:



4) a) f hat eine vertikale Asymptote an seinem im Endlichen liegenden Definitionsrand. Dieser ist die Nullstelle des inneren Terms, also $-c$. Damit ist $c = -5$.
Zur Bestimmung von b und a ($a > 0$, $a \neq 1$) werten wir die Funktionswerte aus:

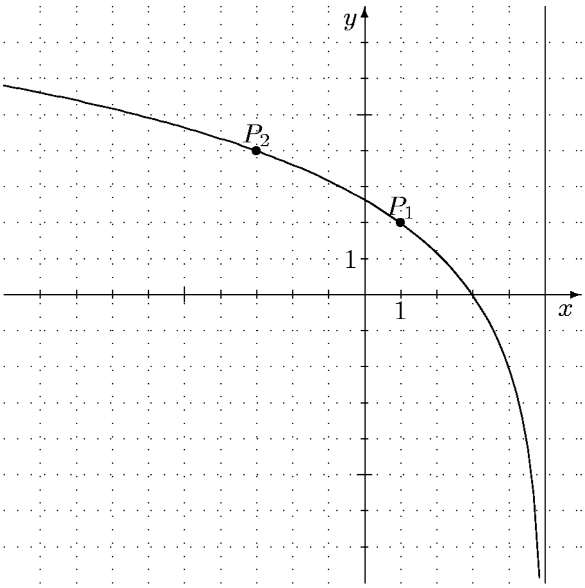
$$2 = f(1) = \log_a[b(-4)] \iff a^2 = -4b\,,$$
$$4 = f(-3) = \log_a[b(-8)] \iff a^4 = -8b$$

Daraus erhält man durch Division ($a \neq 0!$): $a^2 = 2$, $a = \sqrt{2}$, und dann $2 = a^2 = -4b \iff b = -\frac{1}{2}$. Insgesamt ergibt sich schließlich $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(\dfrac{1}{2}(5-x))$.
b) $f(0) = \log_{\sqrt{2}} \dfrac{5}{2} = \dfrac{\log 2{,}5}{\log \sqrt{2}} \approx 2{,}64$. Damit ist $(0; 2{,}64)$ der Schnittpunkt mit der y-Achse.
Die Schnittpunkte mit der x-Achse werden durch die Nullstellen bestimmt:

$$0 = f(x) = \log_a[b(x+c)] \iff 1 = b(x+c) = -\frac{1}{2}(x-5) \iff x = -2+5 = 3\,.$$

Schnittpunkt mit der x-Achse ist $(3, 0)$.
c) Da $a > 1$ ist, sind $\log_a$ und folglich $\log_a[\frac{1}{2}(x-5)]$ monoton wachsend.
Dann ist $\log_a[-\frac{1}{2}(x-5)]$ monoton fallend.

Skizze:



d) Da $a = \sqrt{2} > 1$ ist, ist die Exponentialfunktion $\exp_a$ streng monton wachsend, so dass ihre Anwendung eine Äquivalenzumformung für Gleichungen und Ungleichungen ist:

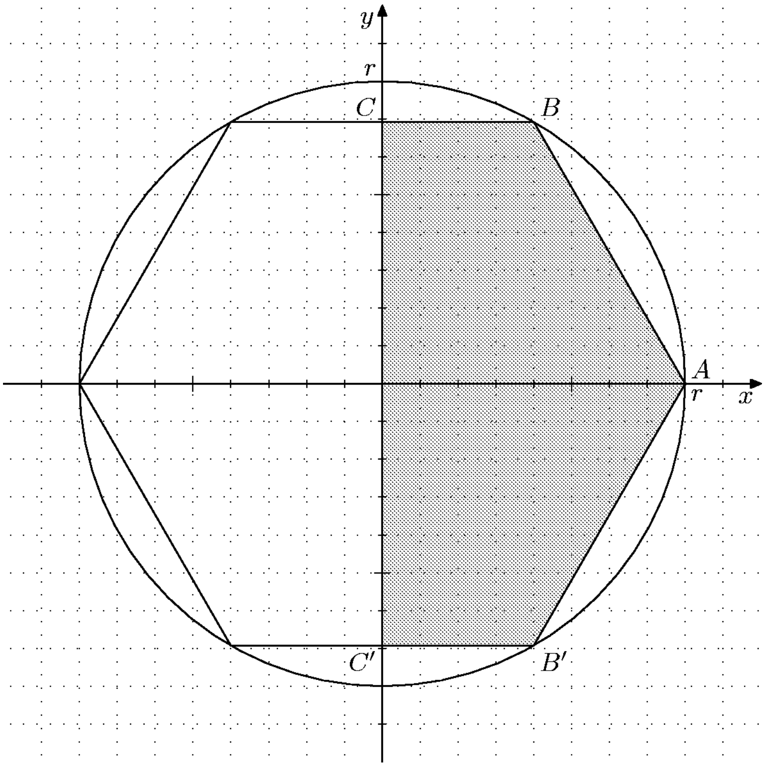
$$\begin{aligned} f(x) < -2 &\iff \log_a\left(\frac{1}{2}(5-x)\right) < -2 \\ &\iff \frac{1}{2}(5-x) < a^{-2} = \sqrt{2}^{-2} = \frac{1}{2} \iff 5 - x < 1 \iff x > 4\,. \end{aligned}$$

1) a) Beschreiben Sie in Worten, was es bedeutet, wenn zwei Aussagen äquivalent sind.
   b) Was bedeutet die Äquivalenz von Aussageformen für deren Lösungsmengen?
   c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$2 - 4x > \frac{18}{2x - 7}$$

   α) in der Grundmenge $\mathbb{N}$ und
   β) in der Grundmenge $\mathbb{R}$.

2) Gegeben ist ein regelmäßiges Sechseck mit seinem Umkreis vom Radius r sowie zwei Eckpunkten $A = (r, 0)$ und $B = \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)$.

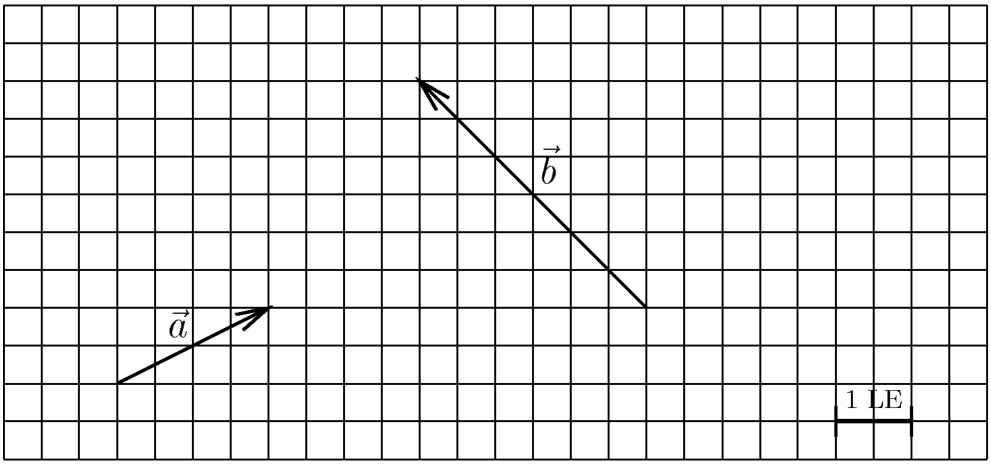


a) Bestimmen Sie Gleichungen für die 5 Geraden, die das Fünfeck $ABCC'B'$ begrenzen.
b) Beschreiben Sie das schraffierte Innere durch eine Relation.

3) Bei einer Umfrage unter 100 Personen wurden folgende Leserzahlen ermittelt:
Stern: 37 Spiegel: 27 Computer-Bild: 36
Stern und Spiegel: 11; Stern und Computer-Bild: 6
Spiegel und Computer-Bild: 9; alle drei Zeitschriften: 4.
   a) Erstellen Sie ein Venndiagramm.
   b) Beantworten Sie die folgenden Fragen. Begründen Sie Ihre Antworten.
      1. Wie viele Personen lasen keine der drei Zeitschriften?
      2. Wie viele Personen lasen Computer-Bild als einzige Zeitschrift?
      3. Wie viele Personen lasen genau eine Zeitung?

bitte wenden!

4) a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:



a$_1$) Bestimmen Sie zeichnerisch den Vektor $\vec{c} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. Entnehmen Sie Ihrer Skizze die Koordinaten von $\vec{c}$.

a$_2$) Geben Sie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Koordinatenschreibweise an und bestimmen Sie daraus rechnerisch die Koordinaten des Vektors $\vec{c} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

b) Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C.
Es sei $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
D teile die Strecke $\overline{AB}$ von A aus gesehen im Verhältnis 2:3.
E teile die Strecke $\overline{BC}$ von B aus gesehen im Verhältnis 4:1.
F sei der Mittelpunkt zwischen D und E.

b$_1$) Fertigen Sie eine Skizze an.

b$_2$) Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{AF}$ als Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ dar.

1. Klausur — Lösungen

1) a) Zwei Aussagen sind äquivalent, wenn sie denselben Wahrheitswert haben, d. h. wenn entweder beide falsch oder beide wahr sind.
b) Zwei Aussageformen sind genau dann äquivalent (über einer Grundmenge G), wenn ihre Lösungsmengen (über G) gleich sind.
c) Der Definitionsbereich der Ungleichung ist

$$\mathbb{D} = G \setminus \{x \in G \mid 2x - 7 = 0\} = G \setminus \{\frac{7}{2}\}$$

also im Fall β): $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{7}{2}\}$ und im Falle α) $\mathbb{D} = \mathbb{N}$.
Über $\mathbb{D}$ gelten nun die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
2 - 4x > \frac{18}{2x-7} \iff & \Big[2x - 7 > 0 \ \wedge \ (2-4x)(2x-7) > 18\Big] \\
& \vee \Big[2x - 7 < 0 \ \wedge \ (2-4x)(2x-7) < 18\Big] \\
\iff & \Big[x > \frac{7}{2} \ \wedge \ -8x^2 + 32x - 32 > 0\Big] \ \vee \ \Big[x < \frac{7}{2} \ \wedge \ -8x^2 + 32x - 32 < 0\Big] \\
\iff & \Big[x > \frac{7}{2} \ \wedge \ x^2 - 4x + 4 < 0\Big] \ \vee \ \Big[x < \frac{7}{2} \ \wedge \ x^2 - 4x + 4 > 0\Big] \\
\iff & \Big[x > \frac{7}{2} \ \wedge \ (x-2)^2 < 0\Big] \ \vee \ \Big[x < \frac{7}{2} \ \wedge \ (x-2)^2 > 0\Big] \\
\iff & x < \frac{7}{2} \ \wedge \ x - 2 \neq 0 \,,
\end{aligned}$$

da $(x-2)^2 < 0$ immer falsch ist und $(x-2)^2 > 0$ außer für $x - 2 = 0$ immer wahr ist.
α) $G = \mathbb{N}$: In diesem Falle ist $\mathbb{L} = \{1, 3\}$.
β) $G = \mathbb{R}$: Hier gilt $\mathbb{L} = \,]-\infty, \frac{7}{2}[\, \setminus \{2\} = \,]-\infty, 2[\, \cup \,]2, \frac{7}{2}[$.

2) a) Die Gerade $g(A,B)$ durch A, B hat den Anstieg

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{r}{2}\sqrt{3} - 0}{\frac{r}{2} - r} = \frac{\frac{r}{2}\sqrt{3}}{-\frac{r}{2}} = -\sqrt{3}\,,$$

und der y-Achsenabschnitt ist

$$b = y_A - a \cdot x_A = 0 - (-\sqrt{3}) \cdot r = r\sqrt{3}\,.$$

Damit hat $g(A,B)$ die Gleichung $y = -\sqrt{3}x + r\sqrt{3} = -\sqrt{3}(x - r)$.
Aufgrund der Symmetrie des regelmäßigen Sechsecks zur y-Achse ist die Gerade $g(B,C)$ parallel zur x-Achse, hat also die Gleichung $y = \frac{r}{2}\sqrt{3}$.
Die Gerade $g(C, C')$ ist die y-Achse mit der Gleichung $x = 0$.
Die Geraden $g(B', C')$ und $g(A', B')$ entstehen aus den Geraden $g(B,C)$ bzw. $g(A,B)$ durch Spiegelung an der x-Achse. Ihre Gleichungen sind daher

$$g(B', C'): \quad y = -\frac{r}{2}\sqrt{3}\,, \qquad g(A,B): \quad y = \sqrt{3} \cdot (x - r)\,.$$

b) Das schraffierte Innere des Fünfecks $ABCC'B'$ ist der Durchschnitt von 5 Halbebenen mit den obigen Geraden als Begrenzung. Daher wird das Innere beschrieben durch die Relation

$$y < -\sqrt{3}(x-r) \ \wedge \ y < \frac{r}{2}\sqrt{3} \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ y > -\frac{r}{2}\sqrt{3} \ \wedge \ y > \sqrt{3}(x-r) \, .$$

Diese kann wegen $y < A \ \wedge \ y > -A \iff y < A \ \wedge \ -y < A \iff |y| < A$ vereinfacht werden zu

$$|y| < \frac{r}{2}\sqrt{3} \ \wedge \ |y| < -\sqrt{3}(x-r) \ \wedge \ x > 0 \, .$$

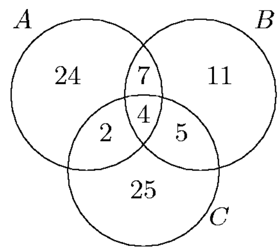
3) a) Es bezeichne A, B, C die Mengen der Befragten, die die Zeitschrift Stern, Spiegel bzw. Computerbild lasen. Mit der Kombination mehrerer Buchstaben bezeichnen wir die jeweiligen Durchschnitte: $AB = A \cap B$.
Dann ist aufgrund der Umfrage bekannt

$$\# AB = 11 \, , \ \# AC = 6 \, , \ \# BC = 9 \, , \ \# ABC = 4 \, .$$

Daraus ergibt sich wegen $\# M \setminus N = \# M \setminus (M \cap N) = \# M - \# M \cap N$:

$$\begin{aligned} &\# AB \setminus C = \# AB - \# ABC = 11 - 4 = 7 \, , \\ &\# AC \setminus B = 6 - 4 = 2 \, , \\ &\# BC \setminus A = 9 - 4 = 5 \, . \end{aligned}$$

Damit erhält man die inneren Anzahlen im nachstehenden Venn-Diagramm:



Mit den angegebenen Gesamtleserzahlen

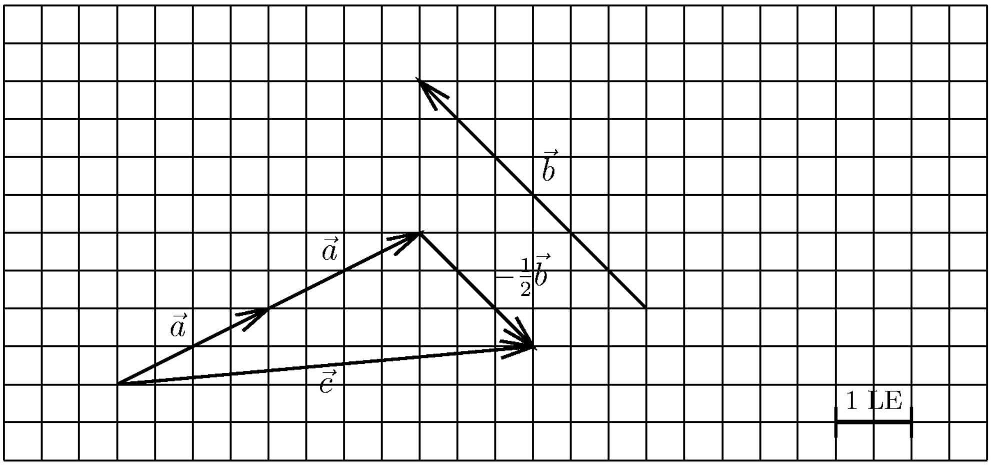
$$\# A = 37 \, , \ \# B = 27 \, , \ \# C = 36 \, ,$$

ergeben sich dann die Zahlen der Leser nur einer der drei Zeitschriften (äußerer Kranz von Anzahlen im Venn-Diagramm):

$$\begin{aligned} \text{Nur Stern:} \quad & \# A \setminus (B \cup C) = 37 - 7 - 2 - 4 = 24 \, , \\ \text{Nur Spiegel:} \quad & \# B \setminus (A \cup C) = 27 - 7 - 5 - 4 = 11 \, , \\ \text{Nur Computer-Bild:} \quad & \# C \setminus (A \cup B) = 36 - 2 - 5 - 4 = 25 \, . \end{aligned}$$

1. Die Zahl der Befragten, die wenigstens eine Zeitschrift lasen, ist damit $24 + 11 + 25 + 7 + 2 + 5 + 4 = 78$ und die Zahl der Nicht-Leser folglich $100 - 78 = 22$.
2. Die Menge der Befragten, die nur Computer-Bild lasen, ist 25 (s.o.).
3. Die Zahl der Leser nur einer der Zeitungen ist $24 + 11 + 25 = 60$.

4) a$_1$) Skizze:



Aus der Skizze entnimmt man als Koordinaten von $\vec{c}$: $\begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

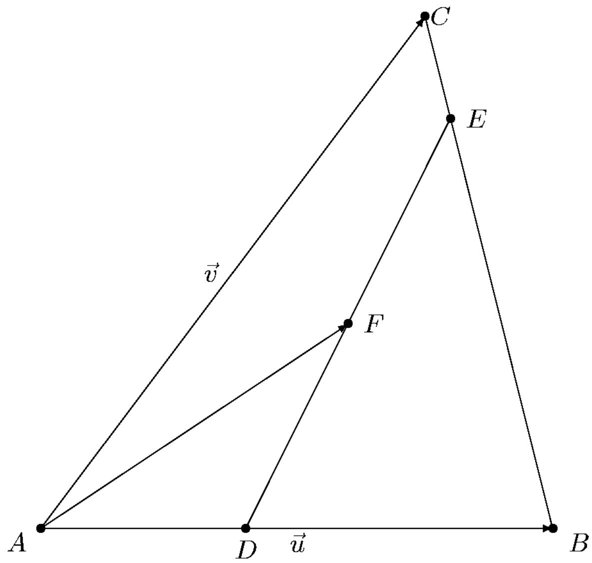
a$_2$) Man liest ab

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und damit berechnet man dann

$$\vec{c} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \frac{3}{2} \\ 2 - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b$_1$) Skizze:



b$_2$) Es gilt nach Voraussetzung

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\vec{u}, \quad \overrightarrow{BE} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{4}{5} \cdot (-\vec{u} + \vec{v}),$$
$$\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \cdot \big(\frac{3}{5}\vec{u} - \frac{4}{5}\vec{u} + \frac{4}{5}\vec{v}\big) = -\frac{1}{10}\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{v}.$$

Damit erhalten wir

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \frac{2}{5}\vec{u} - \frac{1}{10}\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{v} = \frac{3}{10}\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{v}\,.$$

AT3 Mathematik (Kg) **Name:** ____________________

Test **11. März 2004**

1) a) Erläutern Sie die Begriffe: Äquivalenz und Äquivalenzumformung.
   b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Äquivalenz und Lösungsmengen bei Aussageformen?
   c) Nennen Sie verschiedene Äquivalenzumformungen für Gleichungen und Ungleichungen.

2) a) Formulieren Sie mindestens zwei der Potenzgesetze.
   b) Zeigen Sie damit $4^{-20} - 2 \cdot 4^{-21} = 2^{-41}$.
   c) Berechnen Sie $(4^{-2001} - 4^{-2000})(4^{1999} + 4^{2000}) =$

3) Lösen Sie die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen mit der Unbekannten x. Geben Sie die Lösungsmengen an!
   a) $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 2x - 1$,
   b) $8(x + 1)^2 + 2(x - 4) < (4x + 3)(2x + 3)$,
   c) $(x - a)(a + 2) + 4a = 2(x - a)$.

4) Lösen Sie die nachfolgenden Bruch(un)gleichungen durch Äquivalenzumformungen:
   a) $\dfrac{5x-1}{6x-15} - \dfrac{7x+5}{10x-25} = \dfrac{8}{5} - \dfrac{3x+1}{4x-10}$
   b) $\dfrac{3}{x+4} + \dfrac{2}{4-x} < \dfrac{5x-4}{x^2-16}$