Studienkolleg an der RWTH Aachen

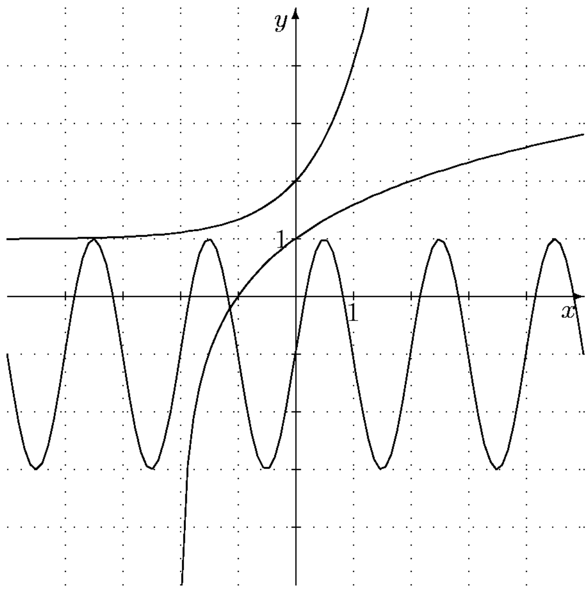
AT3 Mathematik (Kg) **Ersatzklausur** **23. Juni 2005**

Aufgabe 1:

Es seien $a, b, c, d, e, f, A, p, \varphi \in \mathbb{R}$ mit $a, d, A, p > 0$. In nachfolgender Skizze sind die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = \log_a(x + b) + c\,, \quad f_2(x) = d^{x+e} + f\,, \quad f_3(x) = A\sin(px + \varphi)$$

skizziert.



a) Welcher Graph gehört zu welcher Funktion?

b) Zeichnen Sie in dieselbe Skizze die Graphen der zugehörigen Grundfunktionen

$$g_1(x) = \log_a(x)\,, \quad g_2(x) = d^x\,, \quad g_3(x) = \sin px.$$

c) Bestimmen Sie aus den Skizzen Werte für die Parameter $a, b, c, d, e, f, A, p, \varphi$. Markieren Sie Hilfslinien und Punkte, mit deren Hilfe Sie diese Werte ermitteln.

Aufgabe 2:

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab, und zwar bei einem Aufstieg von 250 m um (etwa) 3,15%. Auf Meereshöhe herrsche der Luftdruck $p_0 = 1013\,\text{hPa}$.

a) Wie hoch ist der Luftdruck auf den Berggipfeln Zugspitze (Deutschland, 2978 m) und Montblanc (Frankreich, 4100 m)?

b) In welcher Höhe ist der Luftdruck auf die Hälfte gefallen?

c) Man benutzt die genannte Tatsache zur *barometrischen* Höhenmessung. Aus dem gemessenen Luftdruck bestimmt man die Höhe. Leiten Sie eine Formel her, mit deren Hilfe man die Höhe h über dem Meeresspiegel aus dem Luftdruck p bestimmen kann. In welcher Höhe befinden Sie sich bei einem Luftdruck von 730 hPa?

– bitte wenden –

Aufgabe 3:

Auf dem Flachdach eines Hochhauses befindet sich eine 5 m hohe Antenne für das Handy-Funknetz. Ein Beobachter sieht den Fuß der Antenne unter dem Blickwinkel $\alpha = 30^0$ zur Horizontalen, während die Antennenspitze unter dem Winkel $\beta = 32^0$ zu sehen ist.

a) Bestimmen Sie die Höhe des Hochhauses.

b) In welcher Entfernung vom Hochhaus befindet sich der Beobachter?

Aufgabe 4:

a) Was versteht man unter dem Rang eines linearen Gleichungssystems? Unter welcher Bedingung an den Rang ist ein lineares Gleichungssystem *universell* lösbar? Was bedeutet das?

b) Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ sowie ein unbekannter dritter Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Welche Bedingung muss $\vec{w}$ erfüllen, damit die drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig sind?

c) Begründen Sie ohne weitergehende Rechnung mit Hilfe des Ranges: Sind $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig, so ist jeder weitere Vektor des $\mathbb{R}^3$ eine Linearkombination dieser drei.

Studienkolleg an der RWTH Aachen

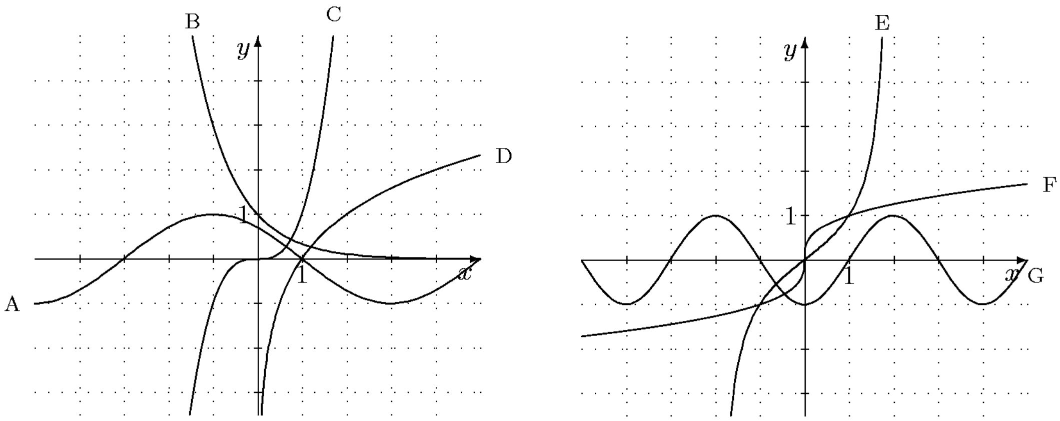
AT3 Mathematik (Kg) **2. Klausur** **10. Juni 2005**

Aufgabe 1:

Gegeben sind drei positive Zahlen a, b, c und 6 Funktionen $f_1, \ldots, f_6$ mit

$$f_1(x) = x^3\,,\ f_2(x) = \tan(cx)\,,\ f_3(x) = -\cos(\frac{\pi}{2}x)\,,$$
$$f_4(x) = \sqrt[3]{x}\,,\ f_5(x) = \log_a x\,,\ f_6(x) = b^x\,.$$

Teile der Graphen dieser Funktionen sind unter den Kurven A–G in nachstehender Skizze zu finden.



a) Geben Sie für jede der Funktionen $f_1, \ldots, f_6$ an, welche der Kurven A–G ihren Graphen darstellt.
b) Nennen Sie die Eigenschaften der Funktionen $f_1, \ldots, f_6$, mit deren Hilfe Sie die Graphen identifizieren konnten.
c) Kennzeichnen Sie in der Skizze die Punkte, mit deren Hilfe man die Werte von a, b, c ermitteln kann. Welche Werte finden Sie?
d) Einer der Funktionsgraphen gehört zu keiner der genannten Funktionen. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm für ihn.

Aufgabe 2:

^{14}C ist ein radioaktives Isotop des Kohlenstoffes, das mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren in Stickstoff ^{14}N zerfällt.
a) Was versteht man unter der Halbwertszeit? Welche Funktionen haben eine konstante Halbwertszeit? Bestimmen Sie einen Funktionsterm, der den radioaktiven Zerfall dieses Isotops beschreibt. Wie groß ist die Zerfallsrate pro 100 Jahre? [Zur Kontrolle: 1,2%.]
b) Durch den ständigen Stoffwechsel ist in *lebenden* Organismen (Pflanzen, Tiere) der ^{14}C-Gehalt konstant gleich

$$4 \cdot 10^5 \text{ Atome } ^{14}\text{C in } 1\,\text{mg Kohlenstoff}.$$

Stirbt der Organismus und hört damit der Stoffwechsel auf, so reduziert sich der ^{14}C-Anteil durch radioaktiven Zerfall.
In einem Gletscher in den österreichischen Alpen wurde die mumifizierte Leiche eines eiszeitlichen Jägers, genannt ‘Ötzi’, gefunden. Bei diesem wies man in einer Kohlenstoffprobe von 1 mg insgesamt

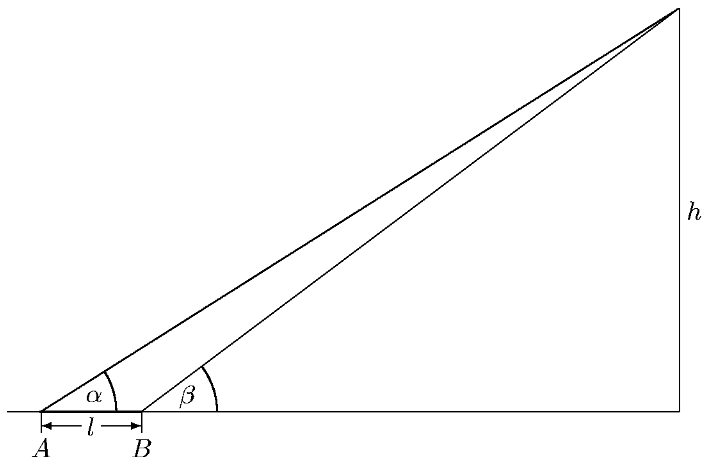
$$2{,}3 \cdot 10^5 \text{ Atome } ^{14}\text{C}$$

nach. Bestimmen Sie das Alter von ‘Ötzi’.

– bitte wenden –

Aufgabe 3:

a) Um die Höhe h hoher Bauwerke oder eines Berges zu bestimmen, wird die Spitze von den Enden einer auf das Objekt zulaufenden Standlinie der Länge l anvisiert und die Blickwinkel α, β ermittelt. Bestimmen Sie die Höhe h in Abhängigkeit von α, β, l.
b) Bei der Vermessung des Kölner Doms ermittelte man bei einer Länge $l = 20{,}75\,\mathrm{m}$ die Winkel $\alpha = 30^0$ und $\beta = 32^0$. Wie hoch ist der Kölner Dom?



Aufgabe 4:

Gegeben sind drei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^4$.
a) Was versteht man unter dem Rang einer Matrix? Welche Bedeutung hat er für die lineare Unabhängigkeit der Spaltenvektoren?
b) Untersuchen Sie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ auf lineare Unabhängigkeit.
c) Welche Bedingung muss ein Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

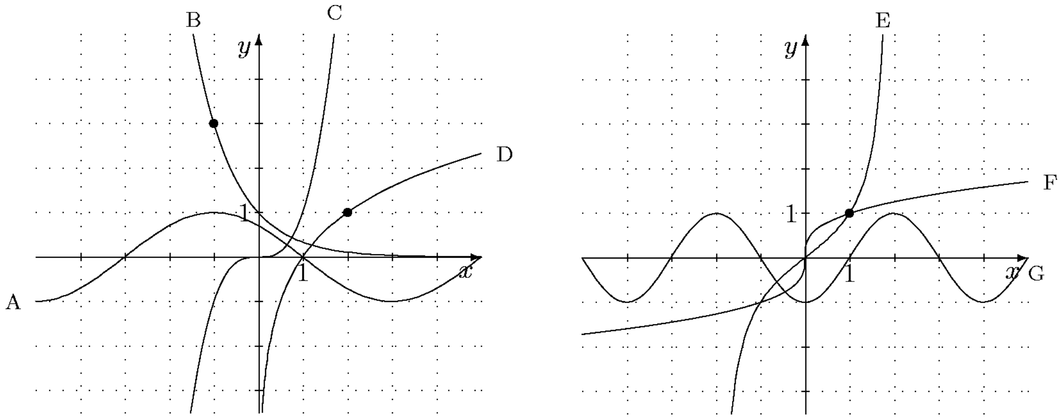
erfüllen, damit er eine Linearkombination von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ist?
d) Es sei A ein Punkt im R^4. Wir betrachten die Menge M aller Punkte $X \in \mathbb{R}^4$ für die gilt

$$\overrightarrow{AX} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} \quad (r, s, t \in \mathbb{R})\,.$$

Was für ein geometrisches Objekt ist diese Menge M?

2. Klausur — Lösungen

1) a)/b) f_1 hat den Graphen C (Graph verläuft durch den Koordinatenursprung und berührt die x-Achse)
f_2 hat den Graphen E (Graph verläuft durch den Koordinatenursprung und berührt nicht die x-Achse)
f_3 hat den Graphen G (Graph ist periodisch, Periode 4)
f_4 hat den Graphen F (Graph verläuft durch Koordinatenursprung und berührt die y-Achse)
f_5 hat den Graphen D (Graph verläuft durch $(1,0)$ und steigt monoton)
f_6 hat den Graphen B (Graph verläuft durch $(0,1)$)
c) Die entscheidenden Punkte sind markiert:



$(-1,3) \in B \implies 3 = f_6(-1) = b^{-1} \implies b = \frac{1}{3}$.
$(2,1) \in D \implies 1 = f_5(2) = \log_a(2) \implies a = 2$.
$(1,1) \in E \implies 1 = f_2(1) = \tan(c) \implies c = \frac{\pi}{4}$.

d) Nicht erfasst ist der Graph A. Dieser erscheint periodisch mit der Periode 8 und der Amplitude 1. Ansatz $f(x) = \cos(\frac{\pi}{4}(x+a))$. Die kleinste positive Nullstelle liegt bei 1, also $\frac{\pi}{4}(1+a) = \frac{\pi}{2} \iff a = 1$. Also: $f(x) = \cos(\frac{\pi}{4}(x+1))$. [Alternativ ist natürlich auch ein Ansatz $\sin(\frac{\pi}{4}(x+b))$ möglich.]

2) a) Unter der Halbwertszeit versteht man die Zeit, in der sich eine Größe regelmäßig halbiert:

$$f(t+T) = \frac{f(t)}{2} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\,.$$

Monoton fallende Vielfache von Exponentialfunktionen ca^{-t} $(a > 1)$ haben eine konstante (positive) Halbwertszeit. Wir setzen an (mit t als Zeit in Jahren)

$$N(t) = N_0 \cdot a^t \quad \text{mit} \quad \frac{1}{2} = \frac{N(5730)}{N_0} = a^{5730} \iff a = (\frac{1}{2})^{1/5730} = 2^{-1/5730}\,.$$

Dies ergibt $N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/5730}$. Der Zerfall pro 100 Jahre beträgt

$$1 - \frac{N(t+100)}{N(t)} = 1 - 2^{-100/5730} \approx 1{,}2\%\,.$$

b) Es sei $N(t)$ die Zahl der ^{14}C-Atome in 1 mg Kohlenstoff zur Zeit t (in Jahren) nach dem Tode des Ötzi. Gemäß Aufgabenstellung gilt $N_0 = 4 \cdot 10^5$ und für den Untersuchungszeitpunkt $N(t) = 2{,}3 \cdot 10^5$. Also

$$2{,}3 \cdot 10^5 = 4 \cdot 10^5 \cdot 2^{-t/5730} \iff -\frac{t}{5730} \log 2 = \log 2{,}3 - \log 4$$
$$\iff t = 5730 \cdot \frac{\log 4 - \log 2{,}3}{\log 2} \approx 4575\,.$$

Ötzi ist somit etwa 4600 Jahre alt.

3) a) Das Dreieck mit der Seitenlänge l hat die Winkel α und $180^0 - \beta$. Der gegenüber l liegende Winkel ist dann $\beta - \alpha$. Mit dem Sinussatz erhalten wir

$$\frac{l}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{a}{\sin \alpha}\,.$$

Für die Höhe h ergibt sich dann

$$\frac{h}{a} = \sin \beta \iff h = a \sin \beta = \frac{l \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} \sin \beta\,.$$

b) Für die Vermessung des Kölner Doms erhält man damit

$$h = 20{,}75\,\mathrm{m} \cdot \frac{\sin 30^0 \sin 32^0}{\sin 2^0} = 157{,}54\,\mathrm{m}\,.$$

4) a) Der Rang einer Matrix ist die Zahl der Nicht-Nullzeilen nach Ende der Gauß-Elimination. Er gibt die maximale Zahl linear unabhängiger Spaltenvektoren an.
b) Wir bestimmen den Rang der aus den Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ gebildeten Matrix. Rechnung zusammen mit c).
c) Wir untersuchen das lineare Gleichungssystem

$$\vec{x} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}$$

mit den Unbekannten $r, s, t \in I\!R$ auf Lösbarkeit. Dazu führen wir mit der erweiterten Matrix das Gaußsche Eliminationsverfahren durch:

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ -1 & 2 & 1 & x_2 \\ 2 & -1 & 4 & x_3 \\ -2 & 1 & -4 & x_4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & 2 & x_3 - 2x_1 \\ 0 & -1 & -2 & x_4 + 2x_1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - 2x_1 - (x_2 + x_1) \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + 2x_1 + (x_2 + x_1) \end{array}\right)$$

Die Koeffizientenmatrix hat also den Rang 2: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sind linear abhängig. Man erkennt zugleich, dass $\vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig sind.
Damit $\vec{x}$ eine Linearkombination von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ist, müssen die folgenden beiden linearen Gleichungen erfüllt sein:

$$-3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \;\wedge\; 3x_1 + x_2 + x_4 = 0\,.$$

Eine einfachere äquivalente Form ist

$$x_3 = 3x_1 + x_2 = -x_4\,.$$

d) Da $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linear abhängig, $\vec{u}, \vec{v}$ aber linear unabhängig sind, ist $\vec{w}$ eine Linearkombination von $\vec{u}, \vec{v}$ und M ist die Ebene durch A mit $\vec{u}, \vec{v}$ als linear unabhhängigen Richtungsvektoren.

Studienkolleg an der RWTH Aachen

AT3 Mathematik (Kg) **1. Klausur** **18. März 2005**

Aufgabe 1:

a) Was versteht man gemäß der Definition unter *Äquivalenzumformungen* von (Un-) Gleichungen? Welche Bedeutung haben Äquivalenzumformungen für die Lösungsmengen? Nennen Sie mindestens zwei Äquivalenzumformungen.
b) Erläutern Sie kurz die Bedeutung des Faktorisierens für das Lösen von Gleichungen?
c) Lösen Sie die nachfolgenden (Un-)Gleichungen über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ durch geeignete Äquivalenzumformungen:

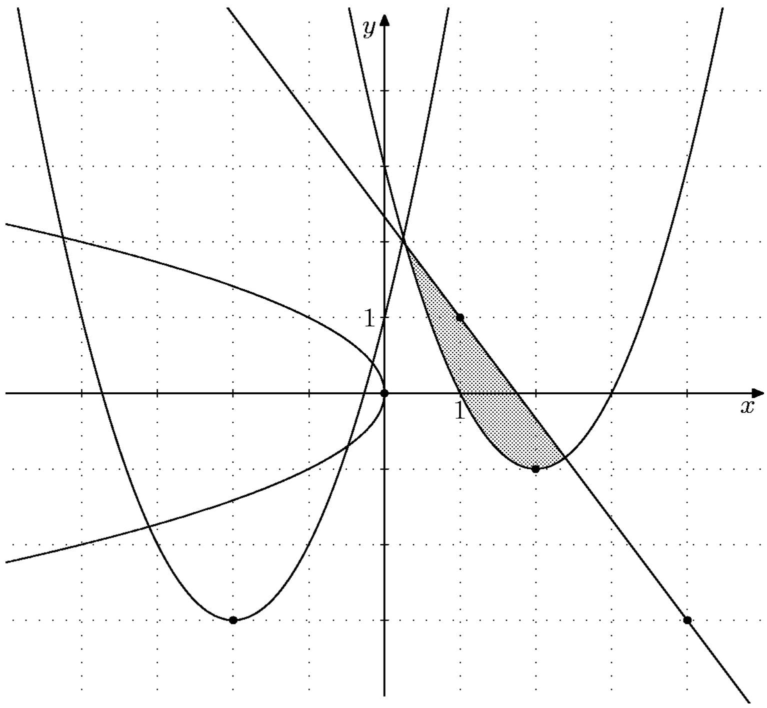
i) $3x^3 + 147x = 42x^2$,

ii) $\dfrac{3}{x+4} - \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{5x-4}{x^2-16}$,

iii) $ax - 4 < 3x + 6$.

Aufgabe 2:

Die Skizze zeigt eine Gerade und drei Normalparabeln in verschiedenen Lagen. Die markierten Punkte haben ganzzahlige Koordinaten.



a) Bestimmen Sie Relationsgleichungen für die Parabeln und die Gerade. Erläutern Sie Ihre Überlegungen.
b) Welche Parabeln sind Funktionsgraphen? Bestimmen Sie deren Schnittpunkte.
c) Beschreiben Sie den schraffierten Bereich durch eine Relation.

– bitte wenden –

Aufgabe 3:

Wir betrachten vier Relationen $R_1, \dots, R_4$:

- $R_1(x,y) \iff y = |x|$,
- $R_2(x,y) \iff y = |x-3| - 2$,
- R_3 ist die Umkehrrelation von R_1,
- der Graph von R_4 entsteht aus dem Graphen von R_3 durch Verschiebung um 1 nach links und 3 nach oben.

a) Bestimmen Sie Relationsgleichungen für R_3 und R_4.

b) Durch welche geometrischen Operationen gewinnt man die Graphen G_{R_2} bzw. G_{R_3} aus dem Graphen von R_1?

c) Skizzieren Sie die Graphen der 4 Relationen.

Aufgabe 4:

Gegeben sind die 4 Punkte

$$A = (3,0,1)\,,\ B = (6,6,7)\,,\ C = (12,9,1)\,,\quad D = (0,9,-2)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\overrightarrow{AD}$ keine Linearkombination $r.\vec{u} + s.\vec{v}$ der Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ist.

b) Wir betrachten im Tetraeder $ABCD$ die Verbindungsgeraden $g(M_{AB}, M_{CD})$ und $g(M_{AC}, M_{BD})$ der Mittelpunkte von einander gegenüberliegenden Kanten (Skizze!). Untersuchen Sie, ob sich diese Verbindungsgeraden schneiden, und bestimmen Sie ggf. den Schnittpunkt.

1. Klausur — Lösungen

1) a) Eine Äquivalenzumformung ist eine Umformung einer (Un)Gleichung, bei der sich der Wahrheitswert nicht ändert. Dies bedeutet für Aussageformen, dass die Lösungsmenge unverändert bleibt.
Beispiele für Äquivalenzumformungen sind:
die Addition/Subtraktion desselben Terms auf beiden Seiten einer (Un)Gleichung,
die Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit derselben von 0 verschiedenen Zahl.
b) Lässt sich in einer Gleichung mit rechter Seite 0 die linke Seite faktorisieren:

$$A \cdot B = 0\,,$$

so kann man die Gleichung äquivalent in *zwei* (einfachere) Gleichungen aufspalten:

$$A \cdot B = 0 \iff A = 0 \;\vee\; B = 0\,.$$

Man erhält so zwar *zwei,* aber dafür einfachere Gleichungen, die man dann getrennt weiter untersuchen kann.
c) i) Dies ist ein Beispiel für das Lösen von Gleichungen durch Faktorisieren:

$$3x^3 + 147x = 42x^2 \iff 3x^3 - 42x^2 + 147x = 0 \iff 3x(x^2 - 14x + 49) = 0$$
$$\iff 3x(x-7)^2 = 0 \iff 3x = 0 \;\vee\; (x-7) = 0 \iff x = 0 \;\vee\; x = 7\,.$$

Damit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{0, 7\}$.
ii) Die Definitionsmenge dieser Gleichung ist $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-4, +4\}$ (wie man unschwer an der Faktorisierung $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$ ablesen kann.
Über dieser Definitionsmenge $\mathbb{D}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-4}{x^2-16} \qquad | \cdot (x-4)(x+4) (\neq 0 \text{ über } \mathbb{D}\,(!)$$
$$\iff 3(x-4) - 2(x+4) = 5x - 4$$
$$\iff x - 20 = 5x - 4 \iff 4x = -16 \iff x = -4\,.$$

Daraus folgt $\mathbb{L} = \emptyset$, denn $-4 \notin \mathbb{D}$.
iii) Wir formen diese lineare Ungleichung zunächst wie üblich um:

$$ax - 4 < 3x + 6 \iff (a-3)x < 10 \qquad (*)\,.$$

Der nächste Schritt sollte nun eine Division durch $a - 3$ sein. Diese ist aber nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn $a - 3 > 0$ ist. Wir unterscheiden daher nun 3 Fälle.
1. Fall: $a - 3 > 0$, d. h. $a > 3$.
Dann erhält man: $(*) \iff x < \frac{10}{a-3}$, also $\mathbb{L} =]-\infty, \frac{10}{a-3}[$ für $a > 3$.

2. Fall: $a - 3 = 0$, d. h. $a = 3$.
Dann gilt: $(*) \iff 0 < 10$. Diese Ungleichung ist immer wahr, also $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$ für

$a = 3$.

3. Fall: $a - 3 < 0$, d. h. $a < 3$.

Da sich bei Division durch negative Zahlen das Ungleichungszeichen „umdreht“, erhält man: $(*) \iff x > \frac{10}{a-3}$, also $\mathbb{L} =]\frac{10}{a-3}, \infty[$ für $a < 3$.

2) a) Geradengleichung: Auf der Geraden liegen die markierten Punkte $P_1 = (1, 1)$ und $P_2 = (4, -3)$. Daraus entnehmen wir den Anstieg der Geraden:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 1}{4 - 1} = -\frac{4}{3}\,.$$

Die Geradengleichung lautet also $y = -\frac{4}{3}x + b$. Um den y-Achsenabschnitt b zu bestimmen, setzen wir einen der Punkte, etwa $P_1 = (1, 1)$ in die Gleichung ein und erhalten:

$$1 = -\frac{4}{3} \cdot 1 + b \iff b = \frac{7}{3}\,.$$

Damit lautet die Geradengleichung: $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{7}{3}$.

Die nach links geöffnete Normalparabel mit Scheitel $(0, 0)$ entsteht durch Spiegelung an der y-Achse aus der nach rechts geöffneten Normalparabel mit dem gleichen Scheitel, und diese hat die Gleichung $x = y^2$ (Umkehrrelation zur Standardparabel $y = x^2$). Damit hat die nach links geöffnete Parabel die Gleichung $-x = y^2$ (man ersetzt x durch $-x$).

Die beiden nach oben geöffneten Normalparabeln können durch Gleichungen in Scheitelpunktsform $y = (x - x_S)^2 + y_S$ beschrieben werden. Die Scheitelpunkte sind markiert und können der Skizze entnommen werden: $S_1 = (-2, -3)$ bzw. $S_2 = (2, -1)$. Daraus erhält man dann die Parabelgleichungen

$$\mathcal{P}_1 : \quad y = (x + 2)^2 - 3 \qquad \text{und} \qquad \mathcal{P}_2 : \quad y = (x - 2)^2 - 1\,.$$

b) Die beiden letzten Gleichungen sind Funktionsgleichungen, die Parabeln $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ also Funktionsgraphen. Die liegende Parabel kann kein Funktionsgraph sein, da Parallelen zur y-Achse sie in 2 Punkten schneiden können.

Die Schnittpunkte der beiden Parabeln $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ müssen beide Funktionsgleichungen erfüllen. Für die x-Koordinaten muss daher gelten:

$$(x+2)^2 - 3 = (x-2)^2 - 1 \iff x^2 + 4x + 1 = x^2 - 4x + 3 \iff 8x = 2 \iff x = \frac{1}{4}\,.$$

Die y-Koordinate des Schnittpunktes erhält man durch Einsetzen:

$$y = (\frac{1}{4} - 2)^2 - 1 = \frac{49}{16} - 1 = \frac{33}{16}\,.$$

Der Schnittpunkt ist damit $S = (\frac{1}{4}, \frac{33}{16}) = (0{,}25\,;\, 2{,}0625)$.

c) Der schraffierte Bereich besteht genau aus den Punkten, die *unterhalb* der Gerade ($y < -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$) und *oberhalb* der Parabel $\mathcal{P}_2$ ($y > (x - 2)^2 - 1$) liegen. Dies sind genau die Lösungspunkte der Relation

$$y < -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3} \ \wedge \ y > (x - 2)^2 - 1$$

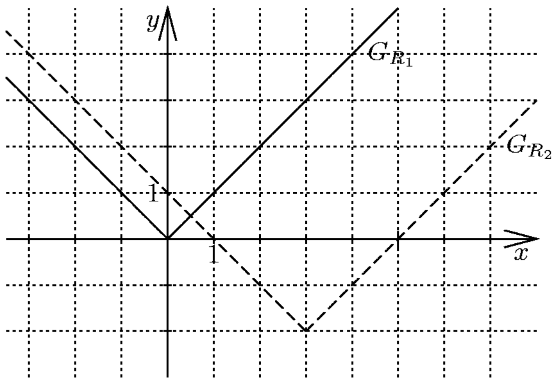
oder äquivalent

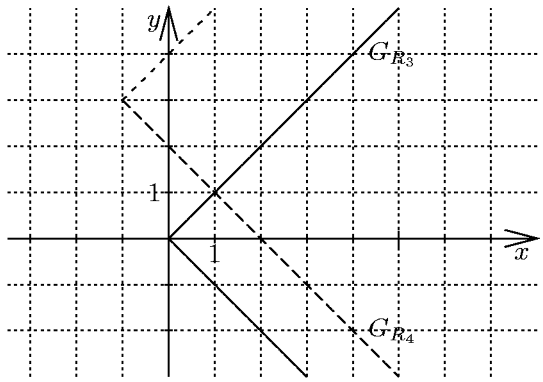
$$(x-2)^2-1<y<-\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}\,.$$

3) a) Da R_3 die Umkehrrelation von R_1 ist, entsteht R_3 aus R_1 durch Vertauschung von x und y: $R_3(x,y) \iff R_1(y,x) \iff x=|y|$.
Da R_4 aus R_3 durch Verschiebung um -1 in x- und $+3$ in y-Richtung entsteht, erhält man R_4 aus R_3, indem man x durch $x+1$ und y durch $y-3$ ersetzt:

$$R_4(x,y) \iff R_3(x+1,y-3) \iff x+1=|y-3|\ .$$

b) R_3 ist die Umkehrrelation von R_1, der Graph G_{R_3} entsteht aus G_{R_1} durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden im I./III. Quadranten.
R_2 entsteht aus R_1, indem man x durch $x-3$ und y durch $y+2$ ersetzt, also erhält man G_{R_2} aus G_{R_1} durch Verschiebung um 3 nach rechts und 2 nach unten.
c) Aus dem bekannten Graphen G_{R_1}, dem Graphen der Betragsfunktion erhält man dann die folgenden 4 Skizzen der Graphen von R_k:





4) a) Wir berechnen

$$\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-3\\9\\-3\end{pmatrix},\quad \vec{u}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix},\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}9\\9\\0\end{pmatrix}.$$

Wir lösen die Gleichung mit den reellen Unbekannten r,s:

$$\overrightarrow{AD}=r.\vec{u}+s.\vec{v} \iff \begin{pmatrix}-3\\9\\-3\end{pmatrix}=r.\begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix}+s.\begin{pmatrix}9\\9\\0\end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix}3r & + & 9s & = & -3\\6r & + & 9s & = & 9\\6r & & & = & -3\end{bmatrix}$$

Die letzte Gleichung ergibt $r=-\frac{1}{2}$ und dann die vorletzte $9s=12$, aber die erste $9s=-\frac{3}{2}$. Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine Lösung gibt: $\overrightarrow{AD}$ ist *keine* Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$.
b) Wir berechnen durch Mittelung der Koordinaten die 4 genannten Mittelpunkte:

$$M_{AB}=(\frac{9}{2},3,4)\,,\ M_{CD}=(6,9,-\frac{1}{2})\,,\quad M_{AC}=(\frac{15}{2},\frac{9}{2},1)\,,\ M_{BD}=(3,\frac{15}{2},\frac{5}{2})\,.$$

Wir erstellen Parameterdarstellungen für die beiden Geraden:

$$X \in g(M_{AB}, M_{CD}) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM_{AB}} + r.\overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r.\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 6 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix},$$

$$X \in g(M_{AC}, M_{BD}) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM_{AC}} + s.\overrightarrow{M_{AC}M_{BD}} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ \frac{9}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + s.\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Die gemeinsamen Punkte beider Geraden müssen beide Gleichungen erfüllen; wir lösen daher das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r.\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 6 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ \frac{9}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + s.\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \iff \left[\begin{array}{rcrcl} \frac{3}{2}r & + & \frac{9}{2}s & = & 3 \\ 6r & - & 3s & = & \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2}r & - & \frac{3}{2}s & = & -3 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{rcrcl} r & + & 3s & = & 2 \\ 4r & - & 2s & = & 1 \\ 3r & + & s & = & 2 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{ll} r & = 2 - 3s \\ 4(2-3s) - 2s & = 1 \\ 3(2-3s) + s & = 2 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} r & = 2 - 3s \\ -14s & = -7 \\ -8s & = -4 \end{array}\right] \iff r = s = \frac{1}{2}$$

Da das Gleichungssystem lösbar ist, schneiden sich die Geraden. Den Schnittpunkt bestimmt man, indem man den Parameterwert $r = \frac{1}{2}$ bzw. $s = \frac{1}{2}$ in die entsprechende Parameterdarstellung einsetzt. Dies ergibt den

$$\text{Schnittpunkt:} \quad S = (\frac{21}{4}, 6, \frac{7}{4}).$$

Der Schnittpunkt ist der jeweilige Mittelpunkt von M_{AB} und M_{CD} bzw. von M_{AC} und M_{BD}.
Hinweis: Aus Übung (V3), Aufgabe 2 wissen wir, dass die 4 Mittelpunkte M_{AB}, M_{BD}, M_{DC}, M_{CA} ein Parallelogramm bilden. Die Geraden $g(M_{AB}, M_{CD})$ und $g(M_{AC}, M_{BD})$ sind die Diagonalen darin; diese schneiden sich in ihrem gemeinsamen Mittelpunkt.