Studienkolleg an der RWTH Aachen

AT2 Mathematik (Kg) **2. Klausur** **19. Mai 2006**

Aufgabe 1:

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab, und zwar bei einem Aufstieg von 250 m um jeweils 3,15%. Auf Meereshöhe herrsche der Luftdruck $p_0 = 1013\,\text{hPa}$.

a) Welche Eigenschaft ist charakteristisch für Exponentialfunktionen? Welche Formulierung der Aufgabenstellung zeigt Ihnen, dass der Luftdruck $p(h)$ in der Höhe h durch eine Exponentialfunktion $p(h) = p_0 \cdot a^h$ beschrieben werden kann? Bestimmen Sie a (exakt).

b) Wie hoch ist der Luftdruck auf den Berggipfeln Zugspitze (Deutschland, 2978 m) und Montblanc (Frankreich, 4100 m)?

c) In welcher Höhe ist der Luftdruck auf die Hälfte gefallen?

d) Man benutzt die genannte Tatsache zur *barometrischen* Höhenmessung. Aus dem gemessenen Luftdruck bestimmt man die Höhe. Leiten Sie eine Formel her, mit deren Hilfe man die Höhe h über dem Meeresspiegel aus dem Luftdruck p bestimmen kann. In welcher Höhe befinden Sie sich bei einem Luftdruck von 730 hPa?

Aufgabe 2:

Auf dem Dach eines Hochhauses befindet sich eine 5 m hohe Antenne für das Handy-Funknetz. Ein Beobachter sieht den Fuß der Antenne unter dem Blickwinkel $\alpha = 30^0$ zur Horizontalen, während die Antennenspitze unter dem Winkel $\beta = 32^0$ zu sehen ist.

a) Bestimmen Sie die Höhe des Hochhauses.

b) In welcher Entfernung vom Hochhaus befindet sich der Beobachter?

Aufgabe 3:

a) Was versteht man unter dem Rang einer Matrix? Welche besondere Eigenschaft hat ein lineares Gleichungssystem, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich der Zahl der Gleichungen ist?

b) Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ sowie ein dritter Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Welche Bedingung müssen die Koordinaten von $\vec{w}$ erfüllen, damit die drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig sind?

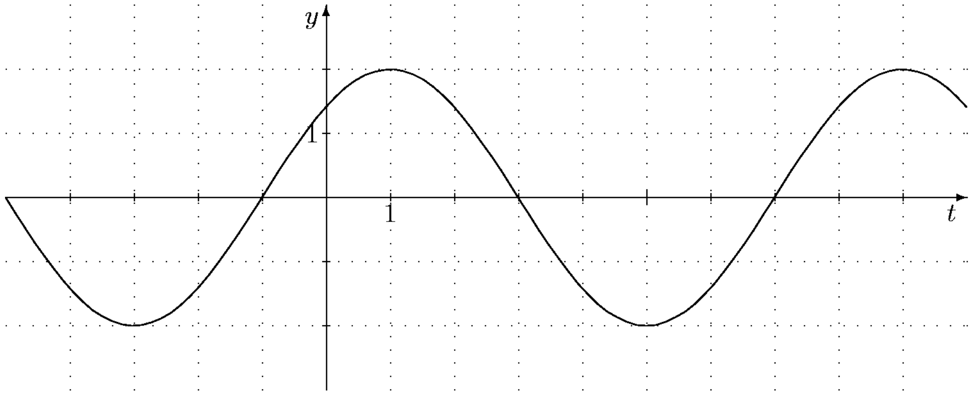
c) Begründen Sie ohne weitergehende Rechnung mit Hilfe des Ranges: Sind $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ beliebige linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$, so ist *jeder* Vektor des $\mathbb{R}^3$ eine Linearkombination von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

– bitte wenden –

Aufgabe 4:

Harmonische Schwingungen werden durch Funktionen der Form $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ beschrieben ($A > 0$, $\omega > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$).

a) Welche Bedeutungen haben die Parameter A, ω und φ? Wie bestimmt man daraus die Periode T von f?



b) Entnehmen Sie der vorstehenden Skizze des Graphen von f die Parameter A, ω und φ. Stellen Sie $f(t)$ in der Form einer Linearkombination dar:

$$f(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t\,.$$

Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen dem sog. Zeiger(vektor) $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und den Parametern A, φ an einer geeigneten Skizze.

c) Zeigen Sie, dass auch durch

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\sin\omega t - \cos\omega t)$$

eine harmonische Schwingungsfunktion gegeben ist, indem Sie A' sowie φ' bestimmen mit

$$g(t) = A'\sin(\omega t + \varphi')\,.$$

Skizzieren Sie den Graphen von g im obigen Koordinatensystem (mit demselben ω wie für f).

d) Berechnen Sie die Amplitude für die Überlagerung $f(t) + g(t)$ der beiden Schwingungen.

Additionstheoreme:

$$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \qquad \sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

Viel Erfolg!

2. Klausur — Lösungen

1) a) Exponentialfunktionen ändern ihre Werte in gleichen Abschnitten um denselben *Faktor.* Das entscheidende Wort ist *jeweils:* Da sich der Luftdruck bei gleichen Höhenunterschieden jeweils auf denselben Bruchteil reduziert, wird der Luftdruck $p(h)$ in der Höhe h durch eine Exponentialfunktion beschrieben: $p(h) = p_0 \cdot a^h$. Dabei gilt $p_0 = 1013$ und $p(250) = (1 - 0{,}0315)p_0 = 0{,}9685 \cdot p_0$. Also

$$a^{250} = 0{,}9685 \iff a = 0{,}9685^{1/250}\,,\ p(h) = p_0 \cdot a^{h/250}\,.$$

b) Dies ergibt konkret

$$p(2978) = 1013 \cdot 0{,}9685^{2978/250} \approx 691{,}9\,,$$
$$p(4100) = 1013 \cdot 0{,}9685^{4100/250} \approx 599{,}3\,.$$

c) Gesucht ist h mit

$$\frac{p_0}{2} = p_0 \cdot 0{,}9685^{h/250} \iff \log 0{,}5 = \frac{h}{250} \cdot \log 0{,}9685$$
$$\iff h = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}9685} \cdot 250 \approx 5414\,.$$

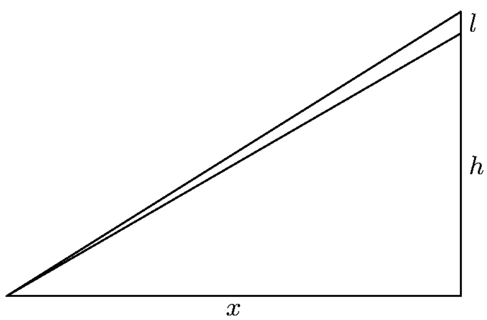
d) Gesucht ist h mit

$$p = p_0 \cdot 0{,}9685^{h/250} \iff \log p = \log p_0 + \frac{h}{250} \cdot \log 0{,}9685$$
$$\iff h = \frac{\log p - \log p_0}{\log 0{,}9685} \cdot 250\,.$$

Für $p = 730$ erhält man

$$h = \frac{\log 730 - \log 1013}{\log 0{,}9685} \cdot 250 \approx 2559\,.$$

2)



Mit den Bezeichnungen der obigen Skizze gilt

$$\frac{h}{x} = \tan\alpha\,, \quad \frac{h+l}{x} = \tan\beta$$
$$\iff \frac{h}{x} = \tan\alpha\,, \quad \frac{h}{x} + \frac{l}{x} = \tan\beta$$
$$\implies \frac{l}{x} = \tan\beta - \tan\alpha$$
$$\implies x = \frac{l}{\tan\beta - \tan\alpha} = \frac{5}{\tan 32^0 - \tan 30^0} \approx 105{,}2$$

Daraus ergibt sich für h:

$$h = x \tan\alpha \approx 105{,}2 \cdot \tan 30^0 \approx 60{,}7\,.$$

3) a) Der Rang einer Matrix ist die Anzahl der Nicht-Nullzeilen nach Beendigung des Gauß-Verfahrens. Wenn der Rang r gleich der Anzahl m der Gleichungen ist, sind nach Beendigung des Gauß-Verfahrens alle Zeilen Nicht-Nullzeilen, es gibt also keine Nullzeile und damit keine Bedingung für die Lösbarkeit: das System ist *universell,* d. h. bei jeder rechten Seite, lösbar.
b) Wir bestimmen den Rang der Matrix

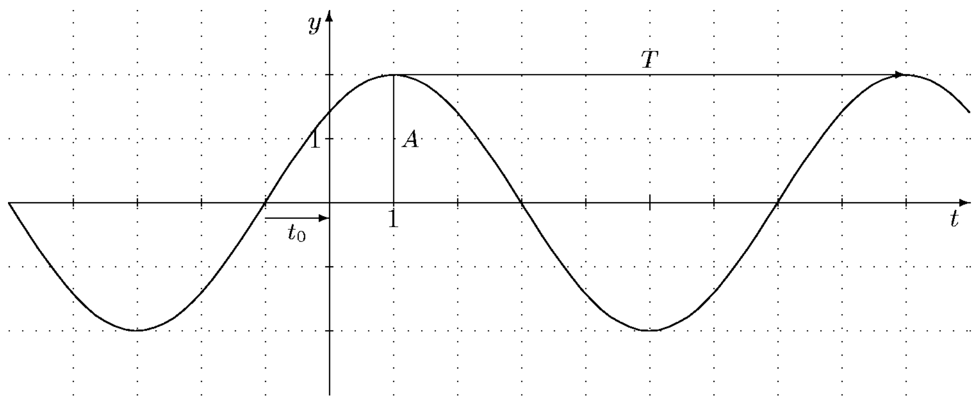
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x_1 \\ -3 & 0 & x_2 \\ 0 & 4 & x_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_1 \\ 0 & -3 & x_2 + 3x_1 \\ 0 & 4 & x_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_1 \\ 0 & -3 & x_2 + 3x_1 \\ 0 & 0 & 3x_3 + 4x_2 + 12x_1 \end{pmatrix}$$

Die drei Vektoren sind linear unabhängig, wenn der Rang dieser Matrix 3 ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn gilt

$$12x_1 + 4x_2 + 3x_3 \neq 0\,.$$

c) Sind drei Vektoren linear unabhängig, so hat die aus ihnen gebildete Matrix den Rang 3. Liegen die Vektoren im $\mathbb{R}^3$, so hat die Matrix 3 Zeilen, also $r = 3 = m$, und das Gleichungssystem $\vec{x} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}$ ist in jedem Falle, also bei jedem $\vec{x}$ lösbar: Jeder Vektor $\vec{x}$ ist eine Linearkombination der drei Vektoren.

4) a) A ist die Amplitude der Schwingung, der größte Funktionswert von f, φ ist die Phase (der Phasenwinkel) der Schwingung im Startpunkt. Schließlich ist $\omega = \frac{2\pi}{T}$ mit der Periode T.



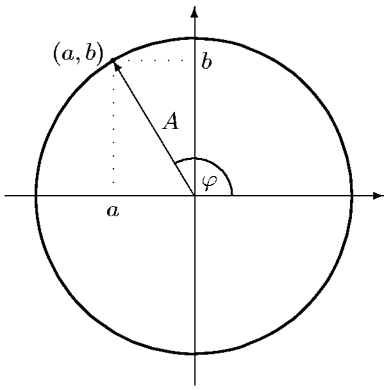
b) Aus der Skizze direkt entnimmt man die Amplitude $A = 2$ und die Periode $T = 8$. Der Graph entsteht aus dem Graphen von $A \sin\omega t$ durch Verschiebung um $t_0 = 1$ nach links, also $f(t) = A\sin(\omega(t+1)) = A\sin(\omega t + \varphi)$ mit $\varphi = \omega t_0 = \frac{\pi}{4}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos\varphi \sin\omega t + A\sin\varphi\cos\omega t \\ &= 2\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin\omega t + 2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\omega t = \sqrt{2}\sin\omega t + \sqrt{2}\cos\omega t\,. \end{aligned}$$

Fasst man die Koeffizienten a, b in obiger Darstellung von f zum sog. Zeiger(vektor) $\vec{v}_f = \binom{a}{b}$ zusammen, so erhält man

$$\vec{v}_f = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

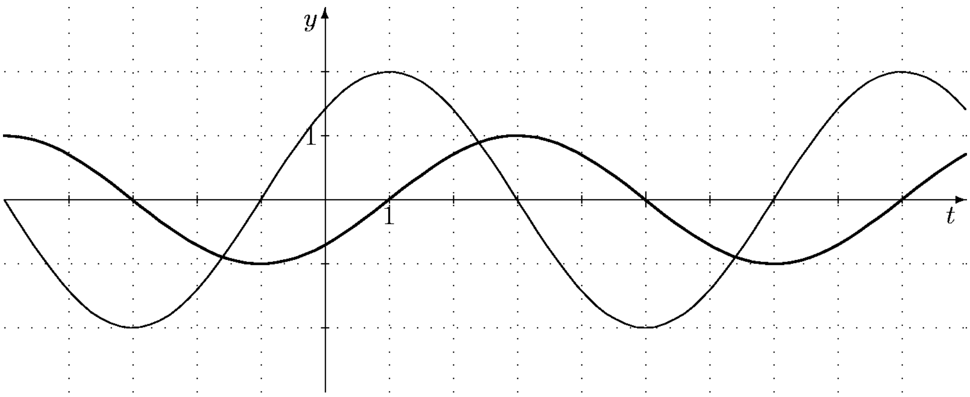
Die nachfolgende Skizze stellt diesen Vektor sowie die Zusammenhänge mit der Amplitude A und Phase φ dar:



c) Der Zeigervektor von g ist

$$\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

also $A' = |\vec{v}_g| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$ und $\cos\varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, also $\varphi' = -\frac{\pi}{4}$. Damit ist g eine harmonische Schwingungsfunktion mit der Amplitude $A' = 1$, dem Phasenwinkel $-\frac{\pi}{4}$ (und derselben Periode $T = 8$ wie f). Dies ergibt den folgenden Graphen von g (zusammen mit dem gegebenen f):



d) Die Überlagerung $f(t) + g(t)$ hat den Zeigervektor

$$\vec{v}_f + \vec{v}_g = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dessen Betrag ist die Amplitude B der Überlagerungsfunktion:

$$B^2 = 2 \cdot (\frac{9}{4} + \frac{1}{4}) = 5\,,\ B = \sqrt{5}\,.$$

Studienkolleg an der RWTH Aachen

AT2 Mathematik (Kg) **1. Klausur** **17. März 2006**

Aufgabe 1:

a) Wann nennt man zwei Aussagen äquivalent? Was bedeutet Äquivalenz von Aussageformen für deren Lösungsmengen?
Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender (Un)gleichungen:
b) $8(x+1)^2 + 2(x-4) < (4x+3)(2x+2)$,
c) $(x-a)(a+2) = x+1$,
d) $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$.

Aufgabe 2:

Seien $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ zwei beliebige Punkte in der Koordinatenebene.
a) Wie berechnet man den Anstieg der Geraden durch diese beiden Punkte? Erläutern Sie die Formel an einer geeigneten Skizze. Für welche Geraden ist der Anstieg *nicht* definiert?
b) Berechnen Sie Anstieg und y-Achsenabschnitt der Geraden durch die Punkte $P_1 = (-19, 34)$ und $P_2 = (2, -1)$.
c) Liegen die Punkte $Q_1 = (-3, 5)$ bzw. $Q_2 = (-6, 10)$ auf dieser Geraden?
d) Welche besondere Lage haben die Geraden $g(P_1, P_2)$ und $g(Q_1, Q_2)$ zueinander? Was für ein Viereck bilden die 4 Punkte $P_1P_2Q_1Q_2$?

Aufgabe 3:

a) Geben Sie die elementargeometrische Definition eines Trapezes an.
b) Gegeben sind die Punkte

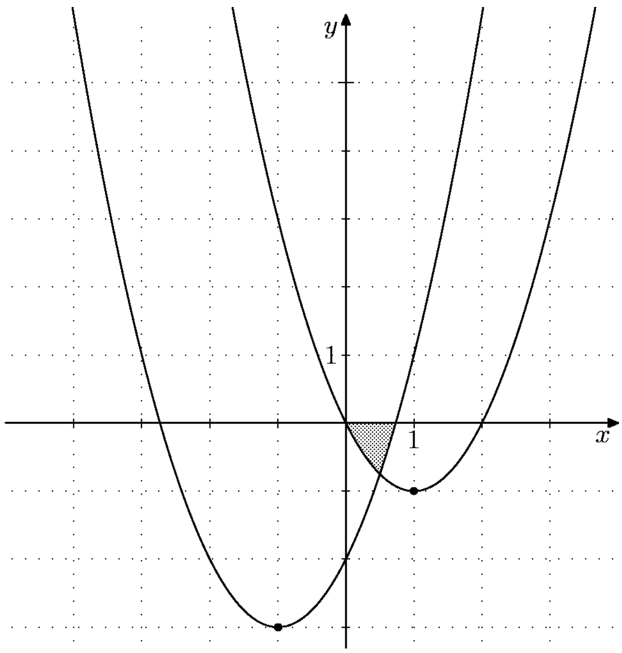
$$A = (3, 2, 0)\,,\ B = (-2, 0, -1)\,,\ C = (2, 2, 3)\,,\ D = (5, 3, 2)\,.$$

Zeigen Sie vektoriell, dass das Viereck $ABCD$ ein Trapez ist.
c) Der Punkt S teile die Diagonale $\overline{AC}$ im Verhältnis 1:2 von A aus gesehen. Bestimmen Sie S. [Zur Kontrolle: $S = (\frac{8}{3}, 2, 1)$.]
d) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die andere Diagonale $g(D, B)$ und zeigen Sie, dass S auf $g(D, B)$ liegt. In welchem Verhältnis teilt S die Strecke $\overline{DB}$? Was fällt Ihnen auf?

– bitte wenden –

Aufgabe 4:

Nachstehend sind zwei Normalparabeln skizziert. Die markierten Punkte haben ganzzahlige Koordinaten.



a) Bestimmen Sie Gleichungen für die beiden Normalparabeln.
b) Beschreiben Sie das markierte Flächenstück durch eine Relation.
c) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der beiden Parabeln.
d) Zeichnen Sie in die obige Skizze die Lösungsmenge der Relationsgleichung

$$|x + 2| + y = 4$$

ein.

Viel Erfolg!

1. Klausur — Lösungen

1) a) Zwei Aussagen sind äquivalent, wenn sie denselben Wahrheitswert haben. Äquivalenz von Aussageformen bedeutet Gleichheit ihrer Lösungsmengen.
b) Es gilt

$$\begin{aligned} & 8(x+1)^2 + 2(x-4) < (4x+3)(2x+2) \\ \iff & 8(x^2+2x+1) + 2x - 8 < 8x^2 + 14x + 6 \\ \iff & 18x < 14x + 6 \iff 4x < 6 \iff x < \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

also $\mathbb{L} = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$.
c) Hier gilt für beliebiges a

$$(a+2)x - a^2 - 2a = x + 1 \iff (a+1)x = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 .$$

Für $a+1 \neq 0$, also $a \neq -1$, ist die Division durch $a+1$ eine Äquivalenzumformung und wir erhalten als einzige Lösung $x = a+1$.
Für $a+1 = 0$ hingegen lautet die umgeformte Gleichung $0 = 0$ und ist immer wahr, also $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.
Insgesamt also:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{a+1\} & \text{falls } a \neq -1, \\ \mathbb{Q} & \text{falls } a = -1. \end{cases}$$

d) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1\}$. Wir faktorisieren und kürzen:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} \iff \frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} .$$

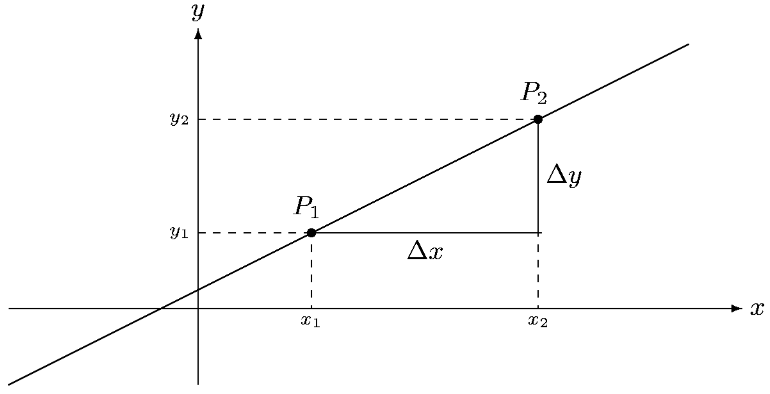
Über $\mathbb{D}$ ist die Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x+1)^2$ eine Äquivalenzumformung und wir erhalten

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1} \iff x^2+1 = (x-1)(x+1) \iff x^2+1 = x^2-1 \iff 1 = -1 .$$

Die Lösungsmenge ist also leer: $\mathbb{L} = \emptyset$.

2) a) Der Anstieg ist

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} .$$



Für Parallelen zur y-Achse ist der Anstieg nicht definiert.
b) Es ist

$$a = \frac{-35}{21} = -\frac{5}{3}\,.$$

Die Geradengleichung lautet also $y = -\frac{5}{3}x + b$ mit dem noch unbekannten y-Achsenabschnitt b. Da der Punkt $P_2 = (2, -1)$ auf der Geraden liegt, erfüllt er die Gleichung, also

$$-1 = -\frac{5}{3} \cdot 2 + b \iff b = \frac{7}{3}\,.$$

Der y-Achsenabschnitt ist also $\frac{7}{3}$.
c) Wir überprüfen, ob die Punkte Q_i die Geradengleichung $y = -\frac{5}{3}x + \frac{7}{3}$ erfüllen:

$$\begin{aligned}
Q_1 = (-3, 5) \in g(P_1, P_2) &\iff 5 = -\frac{5}{3} \cdot (-3) + \frac{7}{3} \iff 0 = \frac{7}{3}\ (F)\,,\\
Q_2 = (-6, 10) \in g(P_1, P_2) &\iff 10 = -\frac{5}{3} \cdot (-6) + \frac{7}{3} \iff 0 = \frac{7}{3}\ (F)\,,
\end{aligned}$$

also liegen die beiden Punkte *nicht* auf der Geraden.
d) Beide Geraden haben denselben Anstieg, sind also parallel. Das Viereck ist ein Trapez.

3) a) Ein Trapez ist ein Viereck mit einem Paar paralleler Seiten.
b) Man muss zeigen, dass zwei der Vektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

die gleiche Richtung (nicht notwendig gleiche Orientierung) haben, also Vielfache voneinander sind. Es gilt offenbar

$$\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{AD}\,.$$

Das Viereck ist ein Trapez; die parallelen Seiten sind $g(B, C)$ und $g(A, D)$.
c) Es gilt nach Aufgabenstellung

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d) Wir bestimmen eine Parameterdarstellung für $g(D, B)$:

$$X \in g(D, B) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OD} + r\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Also gilt für den Punkt S:

$$\begin{aligned}
S \in g(D, B) \iff \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}\\
\iff \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} &= r\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \iff r = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Damit liegt S auf der anderen Diagonalen und teilt sie im Verhältnis $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1 : 2$ von D aus gesehen.
Fazit: S ist der Schnittpunkt der Diagonalen und teilt beide im gleichen Verhältnis $1 : 2$.

4) a) Da die markierten Scheitelpunkte ganzzahlige Koordinaten haben, gilt

$$S_1 = (-1, -3) \quad \text{und} \quad S_2 = (1, -1)\,.$$

Da beide Parabeln nach oben geöffnet und Normalparabeln sind, kann man Gleichungen in Scheitelpunktsform unmittelbar angeben:

$$\mathcal{P}_1 : \; y = (x+1)^2 - 3\,, \qquad \mathcal{P}_2 : \; y = (x-1)^2 - 1\,.$$

b) Das markierte Flächenstück liegt oberhalb beider Parabeln und unterhalb der x-Achse, also wird es durch die Relation

$$y > (x+1)^2 - 3 \;\wedge\; y > (x-1)^2 - 1 \;\wedge\; y < 0$$

beschrieben.
c) Für den Schnittpunkt gelten *beide* Parabelgleichungen:

$$\begin{aligned} & y = (x+1)^2 - 3 \;\wedge\; y = (x-1)^2 - 1 \\ \Longrightarrow\; & x^2 + 2x - 2 = x^2 - 2x \iff 4x = 2 \iff x = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Für die y-Koordinate erhält man

$$y = (\frac{1}{2} - 1)^2 - 1 = -\frac{3}{4}\,.$$

Der Schnittpunkt ist also $S = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$. Weitere Schnittpunkte gibt es nicht, da es nur einen möglichen x-Wert gibt (und y dann eindeutig bestimmt ist).
d) Die gegebene Relation ist äquivalent zu

$$y - 4 = -\,|x+2|\;,$$

und entsteht aus $y = -\,|x|$, indem man x durch $x+2$ und y durch $y-4$ ersetzt. Der zugehörige Graph entsteht aus dem bekannten Graphen von $y = -\,|x|$ durch Verschiebung um 2 nach links und um 4 nach oben (siehe Skizze):