Studienkolleg an der RWTH Aachen

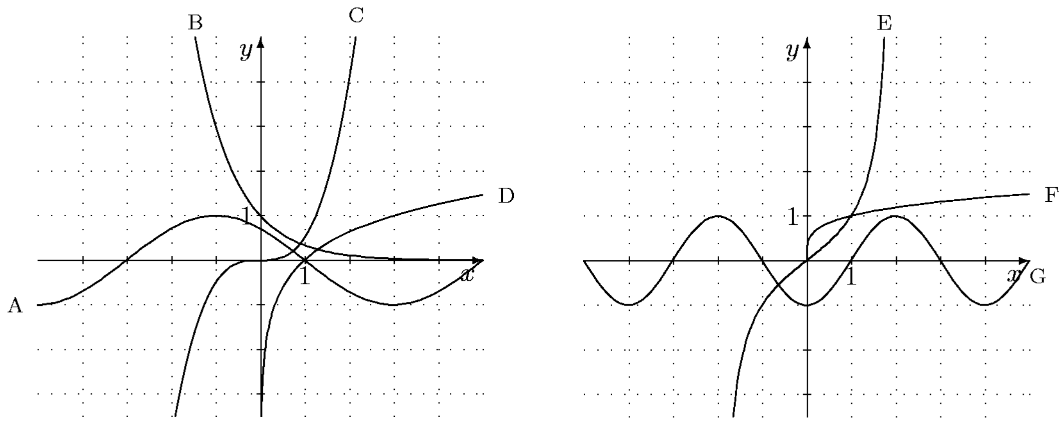
AT2 Mathematik (Kg) **2. Klausur** **21. Mai 2007**

Aufgabe 1:

Gegeben sind vier positive Zahlen a, b, c, d und 6 Funktionen $f_1, \ldots, f_6$ mit

$$f_1(x) = cx^3\,,\;\; f_2(x) = \tan(dx)\,,\;\; f_3(x) = -\cos(\frac{\pi}{2}x)\,,$$
$$f_4(x) = \sqrt[4]{x}\,,\;\; f_5(x) = \log_a x\,,\;\; f_6(x) = b^x\,.$$

Teile der Graphen dieser Funktionen sind unter den Kurven A–G in nachstehender Skizze zu finden.



a) Geben Sie für jede der Funktionen $f_1, \ldots, f_6$ an, welche der Kurven A–G ihren Graphen darstellt.

b) Nennen Sie die Eigenschaften der Funktionen $f_1, \ldots, f_6$, mit deren Hilfe Sie die Graphen identifizieren konnten.

c) Kennzeichnen Sie in der Skizze die Punkte, mit deren Hilfe man die Werte von a, b, c, d ermitteln kann. Welche Werte finden Sie?

d) Einer der Funktionsgraphen gehört zu keiner der genannten Funktionen. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm für ihn.

Aufgabe 2:

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab, und zwar bei einem Aufstieg um 100 m jeweils um 1,3%. Auf Meereshöhe beträgt der Luftdruck $p_0 = 1{,}013\,\text{bar}$.

a) Bestimmen Sie den Luftdruck p (in bar) als Funktion der Höhe h (in Metern) über dem Meeresspiegel.

b) Wie hoch ist der Luftdruck auf den Berggipfeln Zugspitze (Deutschland, 2978 m) und Montblanc (Frankreich, 4100 m)?

c) In welcher Höhe ist der Luftdruck auf die Hälfte gefallen?

d) Man benutzt die Abnahme des Luftdrucks zur *barometrischen* Höhenmessung: Aus dem gemessenen Luftdruck bestimmt man die Höhe. Leiten Sie eine Formel her, mit deren Hilfe man die Höhe h über dem Meeresspiegel aus dem Luftdruck p bestimmen kann. In welcher Höhe befinden Sie sich bei einem Luftdruck von 0,75 bar?

Aufgabe 3:

a) Erläutern Sie, was man unter dem Rang einer Matrix versteht und welche Bedeutung er für lineare Gleichungssysteme hat.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Rang einer Matrix und der linearen Unabhängigkeit der Spaltenvektoren?

c) Begründen Sie auf der Basis von b) die folgende Tatsache:
Vier Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ des $\mathbb{R}^3$ müssen linear abhängig sein.

d) Für welche Werte von a sind die Vektoren

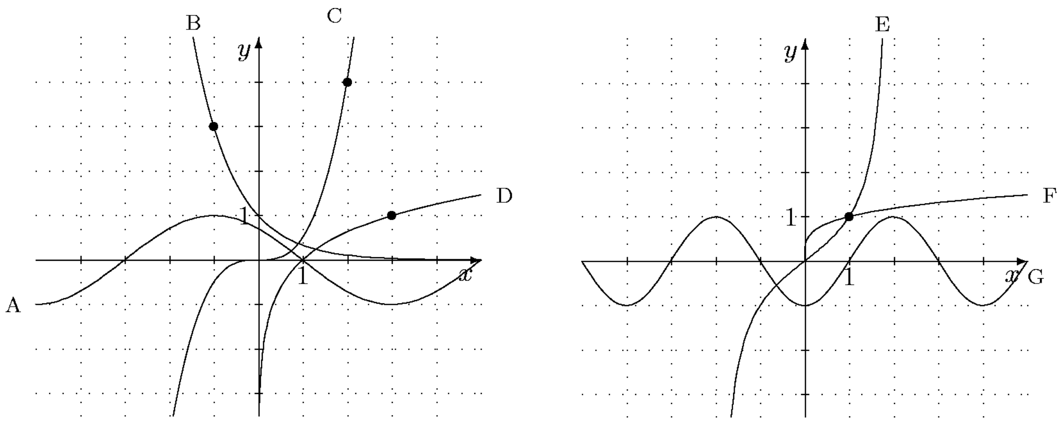
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} , \ \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4a-1 \end{pmatrix} , \ \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a+1 \end{pmatrix} .$$

linear abhängig?

Viel Erfolg!

2. Klausur — Lösungen

1) a)/b) f_1 hat den Graphen C (Graph verläuft durch den Koordinatenursprung und berührt die x-Achse)
f_2 hat den Graphen E (Graph verläuft durch den Koordinatenursprung und berührt nicht die x-Achse)
f_3 hat den Graphen G (Graph ist periodisch, Periode 4)
f_4 hat den Graphen F (Graph verläuft durch Koordinatenursprung und Definitionsbereich ist $[0, \infty[$).
f_5 hat den Graphen D (Graph verläuft durch $(1, 0)$ und steigt monoton)
f_6 hat den Graphen B (Graph verläuft durch $(0, 1)$)
c) Die entscheidenden Punkte sind markiert:



$(-1, 3) \in B \implies 3 = f_6(-1) = b^{-1} \implies b = \frac{1}{3}$.
$(3, 1) \in D \implies 1 = f_5(3) = \log_a(3) \implies a = 3$.
$(2, 4) \in C \implies 4 = f_1(2) = c \cdot 2^3 \implies c = \frac{1}{2}$.
$(1, 1) \in E \implies 1 = f_2(1) = \tan(d) \implies d = \frac{\pi}{4}$.

d) Nicht erfasst ist der Graph A. Dieser erscheint periodisch mit der Periode 8 und der Amplitude 1. Ansatz $f(x) = \cos(\frac{\pi}{4}(x + a))$. Die kleinste positive Nullstelle liegt bei 1, also $\frac{\pi}{4}(1 + a) = \frac{\pi}{2} \iff a = 1$. Also: $f(x) = \cos(\frac{\pi}{4}(x + 1))$. [Alternativ ist natürlich auch ein Ansatz $\sin(\frac{\pi}{4}(x + b))$ möglich.]

2) a) Da der Luftdruck eine feste Abnahmerate hat, ist die Funktion $p(h)$ eine Exponentialfunktion:

$$p = p_0 \cdot a^h = 1{,}013 \cdot a^h\,.$$

Die Abnahmerate pro 100 m ist 1,3%, also

$$p_0 \cdot (1 - 0{,}013) = 1{,}013 \cdot a^{100} \iff a = 0{,}987^{1/100}$$

und damit

$$p(h) = 1{,}013 \cdot 0{,}987^{h/100}\,.$$

b) $p(2978) = 1{,}013 \cdot 0{,}987^{29{,}78} = 0{,}686$, und $p(4100) = 1{,}013 \cdot 0{,}987^{41} = 0{,}592$.

c) Wir lösen die Gleichung

$$0{,}5 \cdot p_0 = p_0 \cdot 0{,}987^{h/100} \iff 0{,}5 = 0{,}987^{h/100}$$
$$\iff \frac{h}{100} \log 0{,}987 = -\log 2$$
$$\iff h = 100 \cdot \frac{\log 2}{-\log 0{,}987} \approx 5297\,.$$

d) Wir lösen die folgende Gleichung nach h auf:

$$p = p_0 \cdot 0{,}987^{h/100} \iff \frac{h}{100} \log 0{,}987 = \log \frac{p}{p_0} = \log p - \log p_0$$
$$\iff h = 100 \cdot \frac{\log p - \log 1{,}013}{\log 0{,}987}$$

Für $p = 0{,}75$ ergibt dies

$$h = 100 \cdot \frac{\log 0{,}75 - \log 1{,}013}{\log 0{,}987} \approx 2297\,.$$

Bei einem Luftdruck von 0,75 bar befindet man sich etwa in 2300 m Höhe über dem Meeresspiegel.

3) a) Der Rang einer Matrix ist die Anzahl der Nicht-Nullzeilen *nach* Beendigung des Gauß-Verfahrens.
Ist m die Anzahl der Gleichungen und n die Anzahl der Unbekannten eines linearen Gleichunggsystems und r der Rang der Koeffizientenmatrix, so gilt:
1. $m - r$ ist die Anzahl der Lösbarkeitsbedingungen.
2. Ist das System lösbar, so ist $d = n - r$ die Anzahl der freien Parameter in der Parameterdarstellung für die Lösungsmenge, also die Dimension der Lösungsmenge.
Speziell: $r = m$ bedeutet, dass das System universell lösbar ist. $r = n$ bedeutet, dass das System keine oder genau eine Lösung hat.
b) Die Spalten einer Matrix sind genau dann linear unabhängig, wenn der Rang r gleich der Anzahl der Spalten ist.
c) Die aus den vier Vektoren gebildete Matrix hat 4 Spalten und 3 Zeilen (wegen $\vec{u}_i \in \mathbb{R}^3$). Dann kann der Rang höchstens 3 sein, insbesondere gilt $r \neq n = 4$, so dass die Vektoren linear abhängig sind.
d) Wir setzen die drei Vektoren zu einer Matrix zusammen und bestimmen den Rang:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 4a-1 & a+1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 3a+1 \\ 0 & 4a & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 3a+1 \\ 0 & 0 & 1-4a(3a+1) \end{pmatrix}$$

Damit ist das Gauß-Verfahren beendet und man erkennt: Der Rang der Matrix ist mindestens 2, und er ist gleich 2 genau dann, wenn der Term in der untersten rechten Ecke der Matrix gleich 0 ist:

$$0 = 1 - 4a(3a+1) = 1 - 12a^2 - 4a \iff a^2 + \frac{1}{3}a - \frac{1}{12} = 0$$
$$\iff a = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{12}} = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{4}{36}}$$
$$\iff a = -\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \ \vee \ a = -\frac{1}{6} - \frac{2}{6} = -\frac{1}{2}\,.$$

Die drei Vektoren sind nur für $a = \frac{1}{6}$ und $a = -\frac{1}{2}$ linear abhängig, in allen anderen Fällen sind sie linear unabhängig.

Studienkolleg an der RWTH Aachen

AT2 Mathematik (Kg) **1. Klausur** **16. März 2007**

Aufgabe 1:

Richtig oder falsch? (In dieser Aufgabe sind Begründungen nicht erforderlich.)

a) Bei Äquivalenzumformungen einer Gleichung ...
   i) ... ändern sich die Werte auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens nicht.
   ii) ... ändert sich der Wahrheitswert der Gleichung nicht.
   iii) ... ändern sich die Terme auf beiden Seiten nicht.
   iv) ... ändert sich die Lösungsmenge nicht.

b) Eine Gleichung lösen bedeutet, ...
   i) ... eine Lösung bestimmen.
   ii) ... den Wert von x bestimmen.
   iii) ... alle Lösungen bestimmen.
   iv) ... die Lösungsmenge bestimmen.

c) Es gibt Gleichungen, die ...
   i) ... keine Lösungsmenge haben.
   ii) ... keine Lösung haben.
   iii) ... unlösbar sind.
   iv) ... allgemeingültig sind.

d) Beispiele für Äquivalenzumformungen sind:
   i) Multiplikation der beiden Seiten einer Gleichung mit einer beliebigen Zahl.
   ii) Addition eines beliebigen Terms auf beiden Seiten einer Ungleichung.
   iii) Quadrieren beider Seiten einer Gleichung.
   iv) Ausführung derselben Rechenoperation auf beiden Seiten einer Gleichung.

Aufgabe 2:

Lösen Sie die folgenden (Un)Gleichungen:

a) $8(x+1)^2 + 2(x-4) < (4x+3)(2x+2)$,

b) $(x-a)(a+2) = x+1$,

c) $x^4 = 2x^3 + 3x^2$,

d) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x} = \dfrac{x^2-4x+2}{x^2-3x+2}$.

Aufgabe 3:

a) Geben Sie die elementargeometrische Definition eines Trapezes an.

b) Gegeben sind die Punkte

$$A = (2,1,-1)\,,\ B = (-3,-1,-2)\,,\ C = (1,1,2)\,,\ D = (4,2,1)\,.$$

Zeigen Sie vektoriell, dass das Viereck $ABCD$ ein Trapez ist. Ist $ABCD$ ein Parallelogramm?

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Diagonalen dieses Trapezes.

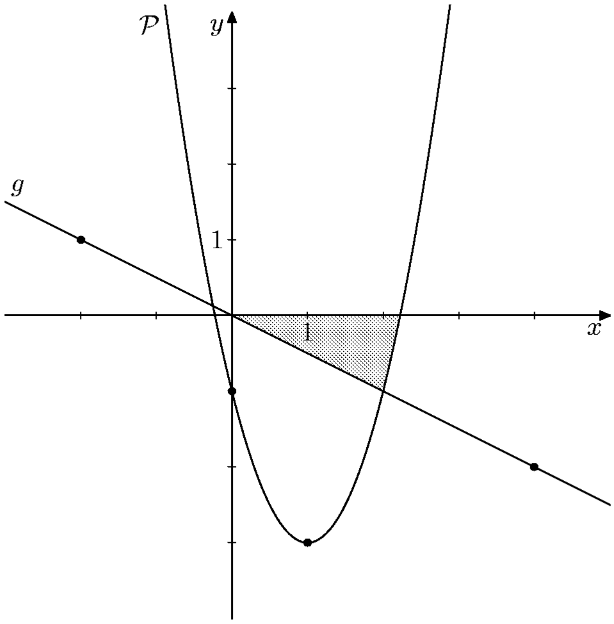
[Zur Kontrolle: $S = (\frac{5}{3}, 1, 0)$.]

d) In welchem Verhältnis teilt S die jeweilige Diagonale? Was fällt Ihnen auf? Haben Sie eine Erklärung?

– bitte wenden –

Aufgabe 4:

Die Skizze zeigt eine Gerade g und eine Parabel $\mathcal{P}$. Der Scheitelpunkt und die anderen drei markierten Punkte auf diesen Graphen haben ganzzahlige Koordinaten und können daher aus der Skizze abgelesen werden. *Alle anderen Daten sind rechnerisch zu bestimmen.* Begründen Sie Ihre Antworten und erläutern Sie die dafür notwendigen Überlegungen!



a) Bestimmen Sie Funktionsgleichungen für die Gerade und die Parabel. Vergleichen Sie die Form der Parabel mit einer Normalparabel.
b) Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittpunkte von Gerade und Parabel.
c) Beschreiben Sie den schraffierten Bereich (einschließlich Rand) durch eine Relation.
d) Skizzieren Sie die Graphen g' bzw. $\mathcal{P}'$ der Umkehrrelationen von g bzw. $\mathcal{P}$ und bestimmen Sie Relationsgleichungen dafür. Welche dieser Graphen sind Funktionsgraphen?

Viel Erfolg!

1. Klausur — Lösungen

1) r=richtig, f=falsch:
   a) i: f, ii: r, iii: f, iv: r
   b) i: f, ii: f, iii: r, iv: r
   c) i: f, ii: r, iii: r, iv: r
   d) i: f, ii: r, iii: f, iv: f
2) a) Es gilt

$$\begin{aligned} & 8(x+1)^2 + 2(x-4) < (4x+3)(2x+2) \\ \iff\ & 8(x^2+2x+1) + 2x - 8 < 8x^2 + 14x + 6 \\ \iff\ & 18x < 14x + 6 \iff 4x < 6 \iff x < \frac{3}{2}\,, \end{aligned}$$

also $\mathbb{L} = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$.
b) Hier gilt für beliebiges a

$$(a+2)x - a^2 - 2a = x + 1 \iff (a+1)x = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2\,.$$

Für $a+1 \neq 0$, also $a \neq -1$, ist die Division durch $a+1$ eine Äquivalenzumformung und wir erhalten als einzige Lösung $x = a+1$.
Für $a+1 = 0$ hingegen lautet die umgeformte Gleichung $0 = 0$ und ist immer wahr, also $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.
Insgesamt also:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{a+1\} & \text{falls } a \neq -1, \\ \mathbb{Q} & \text{falls } a = -1. \end{cases}$$

c) Wir formen äquivalent um, klammern aus und faktorisieren nach Vieta:

$$\begin{aligned} & x^4 = 2x^3 + 3x^2 \iff 0 = x^4 - 2x^3 - 3x^2 = x^2(x^2 - 2x - 3) = x^2(x+1)(x-3) \\ \iff\ & x = 0 \ \vee\ x = -1 \ \vee\ x = 3\,. \end{aligned}$$

Damit ist $\mathbb{L} = \{-1, 0, 3\}$.
d) Wir faktorisieren die Nenner (u.a. mittels Vieta) und erhalten

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x} = \frac{x^2-2x-1}{x^2-3x+2} \iff \frac{x^2-x+1}{x(x-1)} = \frac{x^2-4x+2}{(x-1)(x-2)}\,.$$

Der Definitionsbereich ist daher $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0,1,2\}$. Wir multiplizieren mit dem Hauptnenner $x(x-1)(x-2)$ ($\neq 0$ über $\mathbb{D}$) und erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{x^2-x+1}{x(x-1)} = \frac{x^2-4x+2}{(x-1)(x-2)} \\ \iff\ & (x^2-x+1)\cdot(x-2) = (x^2-4x+2)\cdot x \\ \iff\ & x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = x^3 - 4x^2 + 2x \iff x^2 + x - 2 = 0 \\ \iff\ & (x+2)(x-1) = 0 \iff x = -2 \ \vee\ x = 1 \end{aligned}$$

Wegen $1 \notin \mathbb{D}$ erhalten wir als Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2\}$.

3) a) Ein Trapez ist ein Viereck mit (mindestens) einem Paar paralleler Seiten.
b) Man muss zeigen, dass zwei der Vektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

die gleiche Richtung (nicht notwendig gleiche Orientierung) haben, also Vielfache voneinander sind. Es gilt offenbar

$$\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{AD}\,.$$

Das Viereck ist ein Trapez; die parallelen Seiten sind $g(B,C)$ und $g(A,D)$. Das Viereck ist kein Parallelogramm, da die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AD}$ verschieden sind.
d) Wir bestimmen Parameterdarstellungen für die Diagonalen $g(A,C)$ und $g(D,B)$:

$$X \in g(A,C) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$X \in g(D,B) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OD} + s\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Schnittpunkt S muss beide Parameterdarstellungen erfüllen, also lösen wir die Vektorgleichung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \left[\begin{array}{rcrcr} -r & + & 7s & = & 2 \\ & & 3s & = & 1 \\ 3r & + & 3s & = & 2 \end{array}\right]$$

$$\iff s = \frac{1}{3} \ \wedge \ -r + \frac{7}{3} = 2 \ \wedge \ 3r + 3s = 2 \iff s = \frac{1}{3} \ \wedge \ r = \frac{1}{3} \ \wedge \ 1 + 1 = 2$$

Für den Schnittpunkt ergibt sich das Kontrollergebnis:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ S = (\frac{5}{3}, 1, 0)\,.$$

d) Die Parameterwerte $r = s = \frac{1}{3}$ zeigen, dass der Schnittpunkt beide Diagonalen im Verhältnis $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1 : 2$ teilen, wobei das kürzere Stück bei den Eckpunkten A, D, also bei der Geraden $g(A,D)$ liegt. Es fällt auf, dass das Teilverhältnis auf beiden Diagonalen gleich ist und mit dem Längenverhältnis der Vektoren $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$ übereinstimmt. Dies ist eine Folge des Strahlensatzes: In einem Trapez teilt der Diagonalenschnittpunkt die Diagonalen in demselben Verhältnis wie die Längen der angrenzenden parallelen Seiten.

4) a) Aus dem markierten Scheitelpunkt $S = (1, -3)$ erhält man die Scheitelpunktsform $y = a(x-1)^2 - 3$ für die Parabel. Da der Punkt $(0, -1)$ auf der Parabel liegt, muss $-1 = a \cdot (-1)^2 - 3 \iff a = 2$ gelten. Die Parabel hat die Funktionsgleichung $y = 2(x-1)^2 - 3$ und ist enger als eine Normalparabel.

Die Punkte $P_1 = (-2, 1)$ und $P_2 = (4, -2)$ liegen auf der Gerade, also ist der Anstieg $a = \frac{-2-1}{4+2} = -\frac{1}{2}$ und die Gleichung lautet $y = -\frac{1}{2}x + b$. Durch Einsetzen von P_1 erhalten wir für b: $1 = -\frac{1}{2} \cdot -2 + b \iff b = 0$; die Gerade verläuft durch den Ursprung.

b) Wir bestimmen die Schnittstellen von Parabel und Gerade:

$$2(x-1)^2 - 3 = -\frac{1}{2}x \iff 2x^2 - 4x + \frac{1}{2}x = 1 \iff x^2 - \frac{7}{4}x = \frac{1}{2}$$
$$\iff x^2 - \frac{7}{4}x + (\frac{7}{8})^2 = \frac{49}{64} + \frac{32}{64} \iff (x - \frac{7}{8})^2 = \frac{81}{64} = (\frac{9}{8})^2$$
$$\iff x - \frac{7}{8} = \pm\frac{9}{8} \iff x = -\frac{1}{4} \ \vee \ x = 2$$

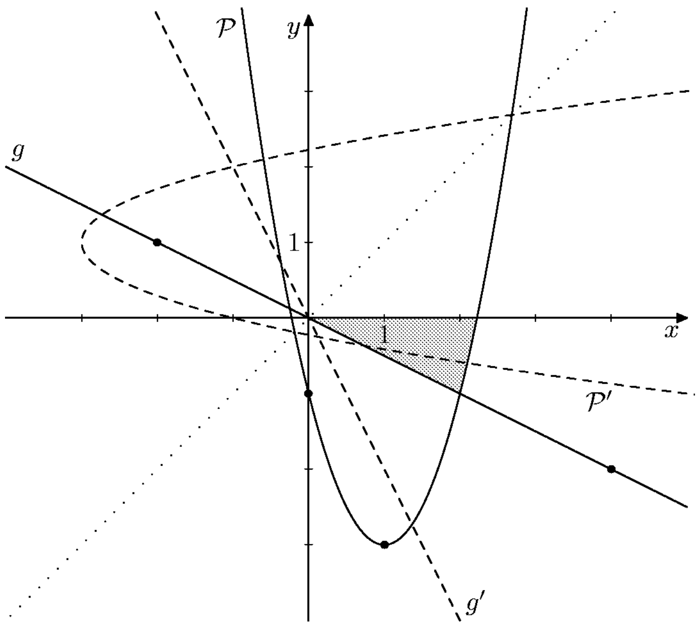
Wir setzen die gefundenen Schnittstellen in die Geradengleichung $y = -\frac{1}{2}x$ ein und erhalten die Schnitt*punkte*

$$S_1 = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}) \quad \text{und} \quad S_2 = (2, -1)\,.$$

c) Der schraffierte Bereich liegt unter der x-Achse ($y \leq 0$), oberhalb der Gerade ($y \geq -\frac{1}{2}x$) und oberhalb der Parabel ($y \geq 2(x-1)^2-3$); damit wird der schraffierte Bereich beschrieben durch die Relation

$$y \leq 0 \ \wedge \ y \geq -\frac{1}{2}x \ \wedge \ y \geq 2(x-1)^2 - 3\,.$$

d) $(x, y) \in g' \iff (y, x) \in g \iff x = -\frac{1}{2}y \iff y = -2x$ und $(x, y) \in \mathcal{P}' \iff (y, x) \in \mathcal{P} \iff x = 2(y-1)^2 - 3$. Die Graphen g' und $\mathcal{P}'$ erhält man durch Spiegelung von g und $\mathcal{P}$ an der $y = x$-Gerade:



Der Graph g' ist ein Funktionsgraph, da die Relationsgleichung äquivalent ist zu der Funktionsgleichung $y = -2x$. Der Graph $\mathcal{P}'$ ist kein Funktionsgraph, da er viele Parallelen zur y-Achse zweimal schneidet. Explizit: $(-1, 0) \in \mathcal{P}'$ und $(-1, 2) \in \mathcal{P}'$.