Studienkolleg an der RWTH Aachen

FT3 Mathematik (Kg) **2. Klausur** **9. Oktober 2004**

1) Gegeben sind die 5 Punkte

$$A = (3, 0, 1)\,,\ B = (6, 6, 7)\,,\ C = (12, 9, 1)\,,\ D = (9, 3, -5)\,,\ E = (0, 9, -2)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass diese Punkte eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche bilden, und bestimmen Sie die Kantenlänge des Bodenquadrates.
b) Zeigen Sie, dass der Höhenfußpunkt der Pyramide der Schwerpunkt des Dreiecks ABD ist.
c) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung für die Bodenebene.
d) Bestimmen Sie alle Kanten der Pyramide, zu denen die Kante $g(A, E)$ windschief ist. Begründen Sie ihre Antwort ohne weitere Rechnungen.
e) Von B aus wird das Lot auf die Kante $g(A, E)$ gefällt. In welchem Verhältnis teilt der Lotfußpunkt die Strecke zwischen A und E?

2) Gegeben sind zwei Funktionen f, g durch

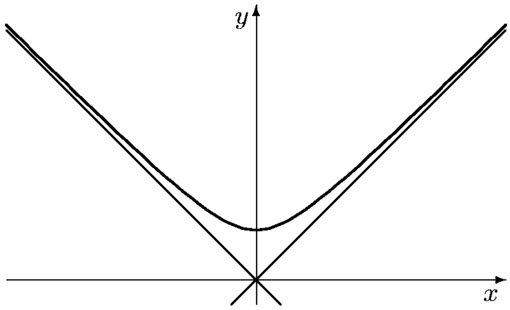
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2\,, \quad g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 9x - 2\,.$$

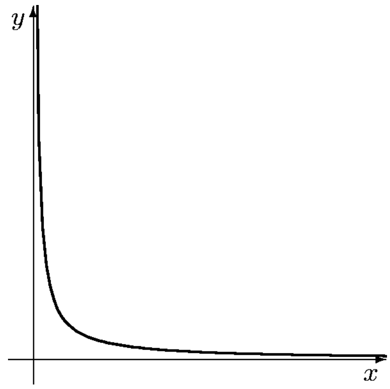
a) Zeigen Sie, dass sich die Funktionsgraphen von f und g in genau einem Punkt berühren. Bestimmen Sie den Berührpunkt.
b) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der Graphen von f und g sowie alle Stellen, an denen f und g parallele Tangenten besitzen.
c) Untersuchen Sie die Differenzfunktion $h = g - f$ auf Nullstellen und stationäre Stellen. Was fällt Ihnen auf? Haben Sie eine Erklärung?
d) Können sich zwei kubische Funktionen in zwei verschiedenen Punkten berühren? Begründen Sie Ihre Antwort.

3) Gegeben ist die rationale Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$.
a) Bestimmen Sie alle Lücken, Pole, hebbaren Lücken sowie die Vorzeichenverteilung und Asymptote von f – soweit sie existieren.
[Zur Kontrolle: Stetige Fortsetzung von f ist $\tilde{f}(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x - 3}$.]
b) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Funktion an den Rändern des Definitionsbereiches (also an den Lücken und im Unendlichen).
c) Untersuchen Sie, ob der Graph die Asymptote schneidet, und skizzieren Sie dann einen möglichen Verlauf des Graphen von $\tilde{f}$.
d) Was können Sie aufgrund Ihrer bisherigen Ergebnisse (also ohne Verwendung der Differentialrechnung) über Extrempunkte von $\tilde{f}$ sagen?
e) Begründen Sie mit Mitteln der Differentialrechnung, dass es nicht mehr als die in d) gefundenen Extremstellen geben kann.

– bitte wenden –

4) a) Die folgenden beiden Skizzen zeigen eine *Hyperbel* mit ihren Asymptoten, jedoch in verschiedenen Lagen. Nur einer der beiden Funktionsgraphen lässt sich durch eine *rationale* Funktion beschreiben. Welcher nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!





b) Skizzieren Sie die Graphen der Sinusfunktion sowie der Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$. Begründen Sie, warum diese beiden Funktionen *nicht* durch rationale Funktionsterme beschrieben werden können.

Hinweis: Die Aufgabe 4) ist vom Zeitaufwand her nicht gleichwertig mit den anderen. Verwenden Sie für diese Aufgabe nicht mehr als 15 Minuten. Die eingesparte Zeit können Sie gut für die anderen Aufgaben, insbesondere Aufgabe 3) gebrauchen.

Viel Erfolg!

2. Klausur — Lösungen

1) a) Die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ sind orthogonal:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 18 + 18 - 36 = 0$$

und haben gleiche Länge

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{9 + 36 + 36} = 9\,.$$

Wegen $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ ist damit $ABCD$ ein Quadrat der Kantenlänge 9.

Der Punkt E gehört nicht zu der Bodenebene (siehe c)).

b) Der Schwerpunkt $S_{ABD} = (6, 3, 1)$ ergibt sich aus der bekannten Formel

$$\overrightarrow{OS_{ABD}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

S_{ABD} ist der Lotfußpunkt, denn

$$\overrightarrow{S_{ABD}E} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

c) Mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{HE} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ muss die Normalengleichung lauten $-2x + 2y - z = d$. Da $A = (3, 0, 1)$ zur Bodenebene gehört, muss gelten $-2 \cdot 3 - 1 = d \iff d = -7$. Eine Koordinatengleichung für e ist also $-2x + 2y - z = -7$. Diese Gleichung erfüllt E nicht, E liegt also nicht in der Bodenebene.

d) Die Kante $g(A, E)$ schneidet alle die Kanten, die durch E oder durch A verlaufen, kann also nur zu den beiden Kanten $g(B, C)$ und $g(D, C)$ windschief sein. Wären die Geraden $g(A, E)$ und $g(B, C)$ nicht windschief, so lägen die Punkte A, B, C, E in einer Ebene und $ABCDE$ wäre keine Pyramide. Genauso argumentiert man für $g(D, C)$.

e) Gesucht ist der Punkt $F \in g(A, E)$ mit $\overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{AE}$. Also

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + r\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\iff -27 + r99 = 0 \iff r = \frac{3}{11}\,.$$

Damit teilt der Lotfußpunkt die Strecke von A nach E im Verhältnis $3:8$.

2) a) Zwei Graphen berühren sich an einer Stelle, wenn sie dort dieselbe Tangente haben, d. h. Berührstellen sind Schnittstellen, an denen die Anstiege beider Funktionen übereinstimmen:

$$x \text{ Berührstelle} \iff f(x) = g(x) \ \wedge \ f'(x) = g'(x)\,.$$

Wir lösen zunächst die (einfachere) Gleichung $f'(x) = g'(x)$ und überprüfen dann, welche der Lösungen auch die Bedingung $f(x) = g(x)$ erfüllen.

$$f'(x) = g'(x) \iff 3x^2 - 6x = 6x^2 - 18x + 9 \iff 3x^2 - 12x + 9 = 0 \iff$$
$$3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-3)(x-1) = 0 \iff x = 3 \ \vee \ x = 1\,.$$

Wir überprüfen für diese beiden Lösungen, ob dies Schnittstellen sind:

$$f(1) = 0\,, \ g(1) = 0\,, \ f(3) = 2\,, \ g(3) = -40\,.$$

Damit ist $+1$ die einzige Berührstelle und $(1,0)$ der einzige Berührpunkt beider Graphen.

b) Die Stellen, an denen f und g parallele Tangente, d. h. gleichen Anstieg haben, sind die Lösungen von $f'(x) = g'(x)$. Diese sind soeben bestimmt worden: $+1$ und $+3$.

Die Schnittstellen beider Funktionen sind die Lösungen von $f(x) = g(x) \iff x^3 - 6x^2 + 9x - 4$. Eine ist bereits bekannt: $+1$. Durch Polynomdivision erhält man

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)(x^2 - 5x + 4) = (x-1)(x-4)(x-1) = (x-1)^2(x-4)\,.$$

Damit sind die Schnittstellen von f und g bestimmt: $+1$ und $+4$. Die zugehörigen Schnittpunkte sind $(1,0)$ und $(4,18)$.

c) Die Differenzfunktion ist $h(x) = g(x) - f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, für die wir bereits in b) eine vollständige Zerlegung in Linearfaktoren erhalten haben:

$$h(x) = (x-1)^2(x-4)\,.$$

Die Nullstellen von h sind also $+1$ und $+4$.

Die stationären Stellen von h sind die Nullstellen von $h'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Dafür wurde bereits in a) eine Faktorisierung gefunden:

$$h'(x) = 3(x-3)(x-1)\,.$$

Damit sind $+1$ und $+3$ die stationären Stellen von h.

Was fällt auf? 1. Die Schnittstellen von f und g sind gerade die Nullstellen von h; dies ist selbstverständlich wegen $h(x) = g(x) - f(x)$.

2. Die stationären Stellen von h sind gerade die Stellen, an denen f und g parallele Tangenten, d. h. gleichen Anstieg haben. Auch dies ist klar, da $h' = g' - f'$ ist, also die Nullstellen von h' die Schnittstellen von f' und g' sind.

3. Die Berührstelle von f und g ist mehrfache Nullstelle von h. Dies ist allgemein richtig, denn wie im Unterricht erwähnt, sinkt die Nullstellenordnung beim Ableiten um 1, so dass gemeinsame Nullstellen von h und h' notwendig mindestens doppelte

Nullstellen von h sind.

d) Nein. Als kubische Funktion kann h keine zwei doppelten Nullstellen besitzen.

3) a/b) Wir bestimmen zunächst die Definitionslücken, das sind die Nullstellen des Nenners. Man erkennt an den Koeffizienten $(1, -3, -1, 3)$ des Nennerpolynoms, dass $+1$ eine Nullstelle ist und erhält durch Polynomdivision: $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x^2-2x-3)$. Durch Zerlegung nach Vieta ergibt sich schließlich die folgende Faktorisierung des Nenners: $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x+1)(x-3)$. f hat also drei Lücken: ± 1 und $+3$. Von diesen ist nur $+1$ eine Nullstelle des Zählers, so dass -1 und $+3$ Pole von f sind, und zwar einfache Pole, also mit VZW. Dagegen lässt sich der Linearfaktor $x-1$ auch im Zähler abspalten und nach dem Kürzen ist $+1$ keine Nullstelle des Nenners mehr: $+1$ ist eine hebbare Lücke.

Wir 'beheben' die Lücke durch Faktorisierung des Zählers: $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(x^2+2)$. Da x^2+2 nur positive Werte hat, ist dies die vollständige Faktorisierung des Zählers. Durch Kürzen mit dem Linearfaktor erhält man als stetige Fortsetzung von f (wie angegeben)

$$\tilde{f}(x) = \frac{x^2+2}{(x+1)(x-3)}\,.$$

Der Grenzwert von f an der hebbaren Lücke $+1$ ist wegen der Stetigkeit von $\tilde{f}$ an der Stelle $+1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(1) = -\frac{3}{4}\,.$$

Da Zähler- und Nennergrad von $\tilde{f}$ übereinstimmen, hat $\tilde{f}$ und damit f eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = 1$ (Quotient der führenden Koeffizienten). Insbesondere sind die Grenzwerte im Unendlichen

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \tilde{f}(x) = +1\,.$$

Insbesondere ist f schließlich positiv. Da die Funktion $\tilde{f}$ keine Nullstellen besitzt, hat sie nur an den beiden einfachen Polen einen VZW. Damit erhält man die folgenden Grenzwerte an den Polen $+3$ und -1:

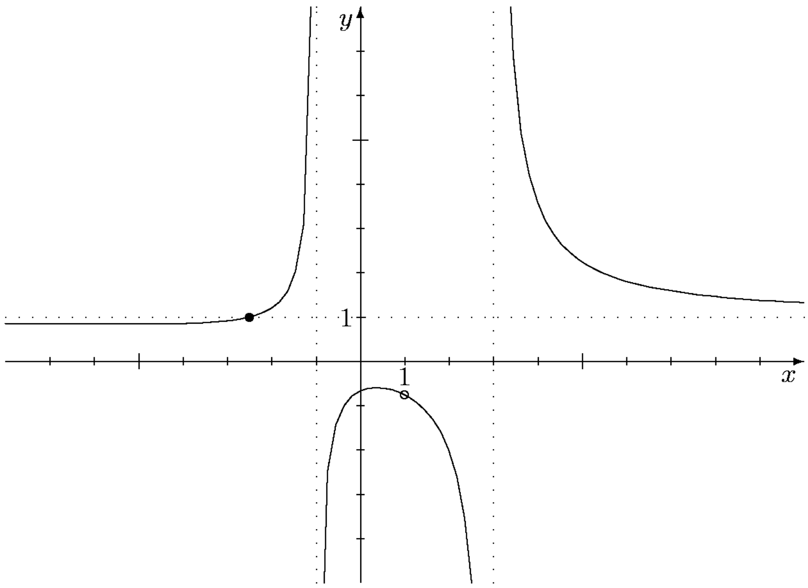
$$\lim_{x\searrow 3} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\nearrow 3} f(x) = -\infty\,,$$
$$\lim_{x\searrow -1} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\nearrow -1} f(x) = +\infty\,.$$

c) Die Schnittstellen mit der Asymptote sind die Lösungen der Gleichung

$$\tilde{f}(x) = 1 \iff x^2 + 2 = x^2 - 2x - 3 \iff 2x = -5 \iff x = -\frac{5}{2}\,.$$

Ein mit den bisherigen Ergebnissen verträglicher Verlauf von $\tilde{f}$ ist in nachfolgender

Skizze dargestellt:



Der Schnittpunkt $(-\frac{5}{2}, 1)$ mit der Asymptote und die Unterbrechung des Graphen von f im Punkt $(1, -\frac{3}{4})$ sind gekennzeichnet.
d) Der Graph von f muss zwischen beiden Polstellen mindestens einen Extrempunkt, und zwar Hochpunkt, besitzen, da in diesem Bereich die Grenzwerte an beiden Rändern gleich $-\infty$ sind.
Da der Graph von f die Asymptote bei $-\frac{5}{2}$ schneidet und sich dann aber an sie anschmiegt, muss im Bereich $x < -\frac{5}{2}$ wiederum mindestens ein Extrempunkt liegen, und zwar ein Tiefpunkt.
e) Wir berechnen mit der Quotientenregel die Ableitung von$\tilde{f}(x)$:

$$\tilde{f}'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 2x - 3) - (x^2 + 2) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x - 3)^2} = \frac{-2x^2 - 10x + 4}{(x^2 - 2x - 3)^2} .$$

Als Nullstellen von $\tilde{f}'$ und damit einzig mögliche Extremstellen kommen nur die Nullstellen des quadratischen Zählers in Frage, also höchstens zwei. Damit ist e) bestätigt.

4) a) Der linke Graph kann nicht durch eine rationale Funktion dargestellt werden, da er für die beiden Grenzübergänge $x \to \pm\infty$ *verschiedene* Schmiegegeraden besitzt, während rationale Funktionen für beide Grenzübergänge dieselbe Asymptote haben – vorausgesetzt es gibt überhaupt eine Asymptote.
Der rechte Graph könnte durch einen rationalen Funktionsterm dargestellt werden, da hier die x-Achse Asymptote ist und die andere Schmiegerade eine Polgerade ist. (In der Tat, die Hyperbel rechts ist der (halbe) Funktionsgraph von $f(x) = \frac{1}{x}$).
b) Die Sinusfunktion hat unendlich viele Nullstellen. Die Nullstellen einer rationalen Funktion sind sämtlich Nullstellen des Zählers. Es gibt also nur endlich viele Nullstellen, nämlich höchstens soviele wie der Grad des Zählers angibt. Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen können niemals rational sein.
Exponentialfunktionen (wie $f(x) = 2^x$) haben überhaupt keine Nullstellen. Dennoch können auch sie nicht rational sein, da sie für $x \to -\infty$ zwar eine Asymptote besitzen, für $x \to +\infty$ aber keine (oder zumindest nicht dieselbe).

Studienkolleg an der RWTH Aachen

FT3 Mathematik (Kg) **1. Klausur** **3. September 2004**

1) Wir betrachten die rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$a_0 = 1\,,\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}\,.$$

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Folge nach oben durch 2 beschränkt ist.
b) Zeigen Sie dann, dass die Folge monoton wächst.
c) Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Begründen Sie Ihre Antworten genau.

2) Wir betrachten die Folge

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Berechnen Sie die ersten 4 Folgenglieder und leiten Sie daraus eine Vermutung für eine explizite Definition von s_n ab.
b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion $s_n = \dfrac{n}{n+1}$.
c) Begründen Sie die Konvergenz der Folge s_n und bestimmen Sie den Grenzwert

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}\,.$$

3) a) Begründen Sie, dass ein Polynomterm vom Grade n höchstens n Nullstellen besitzen kann. Worauf beruht diese Tatsache? Wie kann man diese Aussage verschärfen, wenn man die Vielfachheiten der Nullstellen berücksichtigt?
b) Bestimmen Sie für den Polynomterm $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ alle Nullstellen sowie deren Vielfachheiten. Welche Information über den Graphen von f kann man aus diesen Vielfachheiten ablesen?
c) Schraffieren Sie möglichst große Bereiche der Koordinatenebene, in denen der Graph von f *nicht* verlaufen kann, und skizzieren Sie auf der Basis Ihrer Ergebnisse einen mögliche Verlauf des Graphen von f.

– bitte wenden –

4) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 3 & -9 \\ -1 & -6 & -9 & 18 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

a) Bestimmen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix.
b) Erläutern Sie allgemein, wie der Rang definiert ist und welche Bedeutung er für die Lösbarkeit und die Lösungsvielfalt eines linearen Gleichungssystems hat. Was können Sie damit *ohne weitere Rechnung* über die Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystem aussagen?
c) Lösen Sie nun das gegebene Gleichungssystem. Beschreiben Sie die Lösungsmenge geometrisch.
d) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Rang und linearer Unabhängigkeit. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die 4 Spaltenvektoren der obigen erweiterten Matrix in einer Ebene liegen.

Viel Erfolg!

1. Klausur — Lösungen

1) a) Behauptung: $a_n \le 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Induktionsanfang: $a_0 = 1 \le 2$ ist offensichtlich wahr.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ fest und es gelte die
Induktionsvoraussetzung: $a_n \le 2$.
Induktionsbehauptung: $a_{n+1} \le 2$.
Beweis:

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a_n}\,.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $a_n \le 2$ und daraus folgt dann

$$a_n \le 2 \implies \sqrt{a_n} \le \sqrt{2} \implies a_{n+1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a_n} \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \le 2\,.$$

Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen und die Induktion vollständig.
b) Aufgrund der Definition gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also

$$a_n \le a_{n+1} \iff \frac{a_n}{a_{n+1}} \le 1 \iff \frac{a_n}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a_n}} = \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{2}} \le 1 \iff \sqrt{a_n} \le \sqrt{2}\,.$$

Gemäß a) ist die letzte Abschätzung $\sqrt{a_n} \le \sqrt{2}$ allgemeingültig. Damit ist die Folge a_n monoton wachsend.
c) Nach dem Monotoniekriterium folgt aus a) und b), dass der Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$ existiert. Wegen der Monotonie muss $a > 0$ sein! Aus der Rekursion ergibt sich durch Grenzübergang mit Hilfe der Grenzwertsätze (hier für die Wurzelfunktion):

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \implies a = \sqrt{2a} = \sqrt{2}\sqrt{a} \iff \sqrt{a} = \sqrt{2} \iff a = 2\,.$$

Damit ist schließlich gezeigt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

2) a) Es ist

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}\,,\\
s_2 &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = s_1 + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\,,\\
s_3 &= s_2 + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}\,,\\
s_4 &= s_3 + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}\,,\\
s_5 &= s_4 + \frac{1}{5\cdot 6} = \frac{4}{5} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}\,.
\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse legen die in b) behauptete Formel nahe.
b) Für die ersten fünf Folgenglieder ist die Formel von b) bereits bestätigt. Insbesondere ist damit der Induktionsanfang bereits nachgewiesen.
Wir führen nun den Induktionsschritt $n \to n+1$ durch und setzen für ein festes $n \ge 1$ die Induktionsvoraussetzung voraus:

$$s_n = \frac{n}{n+1}\,.$$

Die Induktionsbehauptung lautet dann:

$$s_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\,.$$

Wir berechnen nach Definition

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{\text{(Ind.Vor.)}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2}$$
$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}\,.$$

Damit ist die Induktionsbehauptung nachgewiesen.

c) Es ist definitionsgemäß

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n\,,$$

so dass sich aus b) ergibt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1\,.$$

3) a) Aufgrund der Polynomdivision wissen wir: Hat ein Polynomterm $f(x)$ eine Nullstelle a, so lässt sich der Linearfaktor $x-a$ multiplikativ abspalten. Da ein Polynomterm vom Grade n Produkt von höchstens n linearen Faktoren sein kann, kann es auch nur höchstens n Nullstellen geben.

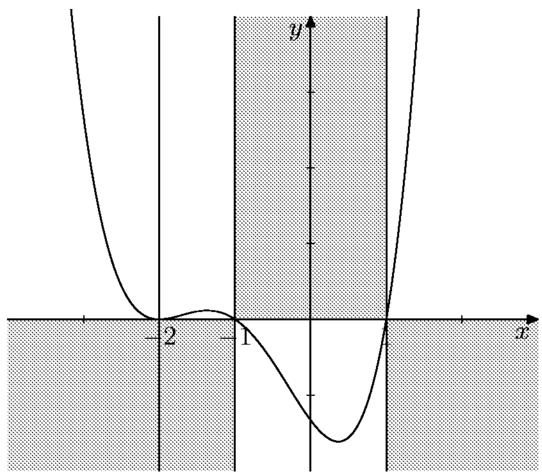
Die Vielfachheit einer Nullstelle a ist die Anzahl der Linearfaktoren $x-a$ im Polynomterm $f(x)$. Daher ist auch die Summe der Vielfachheiten der Nullstellen von $f(x)$ höchstens n.

b) Die einzig möglichen *rationalen* Nullstellen von f sind die Teiler von 4, also ±1, ±2 und ±4. Durch Einsetzen stellen wir fest, dass ±1 Nullstellen sind. Polynomdivision durch $(x+1)(x-1) = x^2-1$ ergibt

$$f(x) = x^4+4x^3+3x^2-4x-4 = (x^2-1)(x^2+4x+4) = (x+1)(x-1)(x+2)^2\,.$$

Damit hat f insgesamt die drei Nullstellen ±1 und -2. Letztere ist doppelt, die ersteren sind einfach. Damit hat f bei ±1 jeweils eine Nullstelle *mit* Vorzeichenwechsel und bei -2 eine ohne.

c) Da der führende Koeffizient positiv ist, hat f für $x > +1$ nur positive Werte. Mit Hilfe der bekannten Vorzeichenwechsel erhalten wir folgenden möglichen Verlauf des Graphen von f. In den schraffierten Bereichen kann kein Punkt des Graphen von f liegen.



4) a) Wir führen Gauß-Elimination durch:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 3 & -9 \\ -1 & -6 & -9 & 18 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & -9 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die entstandene Dreiecksmatrix enthält 1 Nullzeile und 2 Nicht-Nullzeilen. Der Rang der Koeffizientenmatrix ist also $r = 2$.

b) Der Rang einer Matrix ist die Anzahl der Nicht-Nullzeilen in der Dreiecksmatrix nach Ende der Gauß-Elimination. Der Rang r hat Bedeutung für die Lösbarkeit wie für die Lösungsmenge.

Ist m die Zahl der Gleichungen (=Zahl der Zeilen), so gibt $m - r$ die Anzahl der Bedingungsgleichungen für die Lösbarkeit: Für jede Nullzeile in der umgeformten Koeffizientenmatrix muss die rechte Seite ebenfalls 0 sein.

Ist n die Zahl der Unbekannten (=Zahl der Spalten der Koeffizientenmatrix), so gibt $n - r$ im Falle der Lösbarkeit die Dimension der Lösungsmenge an.

Da die eine Lösbarkeitsbedingung erfüllt ist (in der letzten Zeile steht auf der rechten Seite eine 0), ist die Lösungsmenge nicht leer. Da $n - r = 3 - 2 = 1$ ist, ist die Lösungsmenge 1-dimensional, eine Gerade.

c) Wir lösen nun das Gleichungssystem 'von unten nach oben' auf:

$$\begin{aligned} -3y - 6z = 9 &\iff y = -2z - 3,, \\ x + 3(-2z - 3) + 3z = -9 &\iff x = 3z \end{aligned}$$

Wir haben z als freien Parameter gewählt und erhalten die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(x, y, z) \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ -2z - 3 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R}\}.$$

Damit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ eine Gerade mit der Parameterdarstellung

$$(x, y, z) \in \mathbb{L} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{R}).$$

Die Gerade verläuft durch den Punkt $A = (0, -3, 0)$ und hat $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als einen Richtungsvektor.

d) Der Rang r einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten. Betrachtet man die gesamte (erweiterte) Matrix mit 4 Spalten, so zeigt die obige Gauß-Elimination, dass auch diese den Rang 2 hat (1 volle Nullzeile in der erweiterten Matrix). Dies bedeutet, dass 2 Spalten (die ersten beiden) linear unabhängig sind. Diese bestimmen daher eine Ebene. Die beiden anderen Spaltenvektoren müssen in dieser Ebene enthalten sein, denn andernfalls wären 3 Vektoren linear unabhängig.