Studienkolleg an der RWTH Aachen

FT3 Mathematik (Kg) **Nachklausur** **9. November 2005**

1) a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

b) Folgern Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^3 = \frac{1}{4}\,.$$

c) Zeigen Sie (mit Hilfe einer der l'Hospitalschen Regeln) für beliebiges $c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{c}{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{c}{x})}{\frac{1}{x}} = c\,.$$

d) Folgern Sie aus c):

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{c}{n})^n = e^c\,.$$

2) Es sei $a > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Wir betrachten die beiden rationalen Funktionen f und g definiert durch

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+a^2} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x^3}{x^2-a^2}\,.$$

Zeigen Sie:
a) Beide Funktionsgraphen haben die Asymptote, Nullstellen und Sattelpunkte gemeinsam.
b) Eine der Funktionen hat weder Pol- noch Extremstellen, aber drei Wendestellen; die andere hat zwei Pol- und zwei Extremstellen und nur eine Wendestelle.
c) Jede der beiden Funktionen hat genau dort horizontale Tangenten, wo die andere Wendestellen hat.
d) Skizzieren Sie die Graphen für $a = 1$.

3) Gegeben sind die Punkte $A = (3,2,1)$, $B = (4,1,0)$, $C = (5,2,3)$ sowie $D = (1,2,3)$.
   a) Zeigen Sie, dass diese 4 Punkte ein Tetraeder bilden.
   b) Bestimmen Sie eine Normalengleichung für die Ebene e durch A, B, C.
   c) Bestimmen Sie die Höhe des Tetraeders (e als Boden betrachtet).
   d) Bestimmen Sie eine Normalengleichung für die Ebene e', die parallel zur Bodenebene e durch den Punkt $E = (4,2,3)$ des Tetraeders verläuft.
   e) Wir 'zersägen' das Tetraeder längs der Ebene e'. Bestimmen Sie die neuen Eckpunkte A', B', C' sowie die Höhe des abgesägten 'Tetraederstumpfes' $ABCA'B'C'$.

Viel Erfolg!

Nachklausur — Lösungen

3) a) Die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, denn der Rang der aus diesen Vektoren gebildeten Matrix ist 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Da es sich um eine Ebene (Dimension 2) im 3-dimensionalen Raum handelt, kann man mit Hilfe des Vektorproduktes zuerst einen Normalenvektor und daraus dann eine Normalengleichung bestimmen.
Zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene sind

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen ihr Vektorprodukt

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor für e. Eine Normalgleichung für e lautet daher $x + 2y - z = d$ und wir bestimmen d durch Einsetzen eines der drei Punkte A, B, C. Setzt man $A = (3, 2, 1)$ ein, so erhält man $3+4-1 = d$ und $x+2y-z = 6$ als Normalengleichung.
c) Wir benutzen die Hessesche Abstandsformel

$$d(D, e) = \frac{|1 + 4 - 3 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{6} \approx 1{,}63\,.$$

d) Da e' zu $e = e(A, B, C)$ parallel sein soll, haben beide Ebenen dieselben Normalenvektoren, eine Gleichung für e' also auch die Form $x + 2y - z = d'$. Zur Bestimmung von d' setzen wir den Punkt $E = (4, 2, 3)$ in diese Gleichung ein:

$$4 + 4 - 3 = d' \iff d' = 5\,.$$

Eine Normalengleichung für e' ist daher $x + 2y - z - 5 = 0$.
e) Wir bestimmen die Schnittpunkte der Ebene e' mit den drei Kanten $g(D, A)$, $g(D, B)$, $g(D, C)$:

$$X = (x, y, z) \in g(D, A) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Ein solcher Punkt X liegt nun in e', wenn er die Koordinatengleichung für e' erfüllt, wenn also gilt

$$-x-2y+z+5=0 \iff -1-2t-2\cdot 2+(3-2t)+5=0 \iff -4t=-3 \iff t=\frac{3}{4}\,.$$

Damit ist der gesuchte Schnittpunkt A' gegeben durch

$$\overrightarrow{OA'}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{3}{4}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\2\\\frac{3}{2}\end{pmatrix},\quad A'=(\frac{5}{2},2,\frac{3}{2})\,.$$

Genauso geht man für die beiden anderen Kanten vor. Man erhält ebenfalls jeweils den Parameterwert $t=\frac{3}{4}$ (wenn man die Parameterdarstellungen in gleicher Weise mit dem Basispunkt D aufstellt).
Die gesuchten Punkte sind dann $B'=(\frac{13}{4},\frac{5}{4},\frac{3}{4})$ und $C'=(4,2,3)$.
Die Höhe des verkürzten Tetraeders ermittelt man wieder mit der Hesseschen Abstandsformel

$$h=d(D,e')=\frac{|1+4-3-5|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{1}{2}\sqrt{6}\approx 1{,}22\,.$$

Die Höhe des abgesägten Tetraederstumpfes ist damit

$$\frac{2}{3}\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{6}=\frac{1}{6}\sqrt{6}\approx 0{,}41\,.$$

Studienkolleg an der RWTH Aachen

FT3 Mathematik (Kg) **Nachklausur** **9. November 2005**

1) Wir definieren die Funktion f durch

$$f(x) = \ln(\frac{2+x}{2-x}).$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $I\!D$ von f und zeigen Sie, dass für alle $x \in I\!D$ gilt $f(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x)$. Achten Sie auf genaue Begründungen.
b) Untersuchen Sie f auf Symmetrie, Monotonie und bestimmen Sie die Grenzwerte von f an den Rändern des Definitionsintervalls.
c) Bestimmen Sie die Wendetangente und skizzieren Sie mit ihrer Hilfe dann den Graphen von f.
d) Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion p vom Grade 3, deren Funktions- und höhere Ableitungswerte an der Stelle 0 mit den entsprechenden Werten von f übereinstimmen:

$$p(0) = f(0)\,, \quad p'(0) = f'(0)\,, \quad p''(0) = f''(0)\,, \quad p'''(0) = f'''(0)\,.$$

[Zur Kontrolle: $f'''(x) = 2(2+x)^{-3} + 2(2-x)^{-3}$.]
Vergleichen Sie die Werte von f und p an der Stelle $\frac{2}{3}$ (exakte und gerundete Werte).

2) Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = e^{-a^2x^2}$ $(a > 0)$.
a) Bestimmen Sie Null-, Extrem- und Wendestellen von f_a sowie die Grenzwerte an den Definitionsrändern.
[Kontrollergebnis: $f_a''(x) = 2a^2e^{-a^2x^2} \cdot (2a^2x^2 - 1)$.]
b) Skizzieren Sie aufgrund Ihrer Ergebnisse die Graphen von f_1 und $f_{\frac{1}{2}}$.
c) Zeigen Sie, dass die Wendepunkte aller Funktionen f_a auf einer Geraden liegen. Welcher?
d) Zwischen x-Achse und Graph der Funktion f_a $(a > 0$ fest) werden achsenparallele Rechtecke eingefügt. Welches dieser Rechtecke hat maximalen Flächeninhalt? Für welches a ist dieses flächengrößte Rechteck ein Quadrat?

3) Gegeben sind die Punkte $A = (3, 2, 1)$, $B = (4, 1, 0)$, $C = (5, 2, 3)$ sowie $D = (1, 2, 3)$.
a) Zeigen Sie, dass diese 4 Punkte ein Tetraeder bilden.
b) Bestimmen Sie eine Normalengleichung für die Ebene e durch A, B, C.
c) Bestimmen Sie die Höhe des Tetraeders (e als Boden betrachtet).
d) Bestimmen Sie eine Normalengleichung für die Ebene e', die parallel zur Bodenebene e durch den Punkt $E = (4, 2, 3)$ des Tetraeders verläuft.
e) Wir 'zersägen' das Tetraeder längs der Ebene e'. Bestimmen Sie die neuen Eckpunkte A', B', C' sowie die Höhe des abgesägten 'Tetraederstumpfes' $ABCA'B'C'$.

Viel Erfolg!

Nachklausur — Lösungen

2) In der Lösung $k = a^2$.

a) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$ und die Funktion ist (wegen des Terms x^2) achsensymmetrisch.
f_k hat nur positive Werte, insbesondere keine Nullstellen. Ableitungen:

$$f_k'(x) = -2kxe^{-kx^2}\,, \quad f_k''(x) = e^{-kx^2}(-2k + 2kx \cdot 2kx) = 2k(2kx^2 - 1)e^{-kx^2}\,.$$

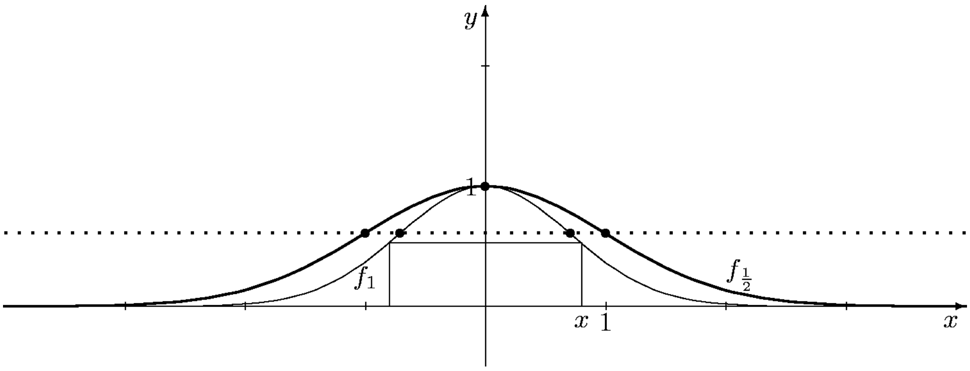
Einzige Nullstelle von f_k' ist 0, mit VZW, also eine Extremstelle von f_k.
f_k'' hat zwei Nullstellen $\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}$, beide ebenfalls mit VZW also liegen Wendestellen vor.
Wegen der Achsensymmetrie sind die Grenzwerte im Unendlichen gleich:

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-kx^2} = 0\,.$$

Wegen dieser Grenzwerte muss die einzige Extremstelle eine Maximalstelle sein.

b) Hoch- und Wendepunkte:

$$H = (0, 1)\,, \qquad W_\pm = (\pm\frac{1}{\sqrt{2k}}, e^{-k\cdot\frac{1}{2k}}) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2k}}, e^{-\frac{1}{2}})\,.$$



c) Alle Wendepunkte haben dieselbe y-Koordinate $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}61$, liegen also auf der Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung $y = e^{-\frac{1}{2}}$.

d) Wegen der Symmetrie von f_k sind auch die Rechtecke achsensymmetrisch und zwei Eckpunkte liegen auf dem Graphen, zwei auf der x-Achse (siehe Skizze). Damit ist die Zielfunktion

$$A(x) = 2xf_k(x) \quad (x \geq 0)\,.$$

Wir stellen fest $A(x) = -\frac{1}{k}f_k'(x)$ und daher sind die Extremstellen von A zugleich die Extremstellen von f_k', also die Wendestellen von f_k (im Bereich $x > 0$). Wegen $A(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} A(x) = 0$, muss die einzige Extremstelle bei $\frac{1}{\sqrt{2k}}$ das absolute Maximum angeben. Die maximale Rechtecksfläche beträgt damit

$$A_{\max} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2k}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{ke}}\,.$$

Die Maße dieser maximalen Rechtecke sind $2x = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2k}} = \sqrt{\frac{2}{k}}$ und $A(x) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Ein Quadrat liegt also genau dann vor, wenn

$$\sqrt{\frac{2}{k}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \iff k = 2e\,.$$

Das flächengrößte Rechteck ist ein Quadrat genau für $k = 2e \approx 7{,}39$.

3) Siehe Nachklausur Odinikaeze.

Studienkolleg an der RWTH Aachen

FT3 Mathematik (Kg) **2. Klausur** **2. November 2005**

1) Wir definieren die Funktion f durch

$$f(x) = \ln(\frac{4-x}{4+x}) .$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f und zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt $f(x) = \ln(4-x) - \ln(4+x)$. Achten Sie auf genaue Begründungen.
b) Untersuchen Sie f auf Symmetrie, Monotonie und bestimmen Sie die Grenzwerte von f an den Rändern des Definitionsintervalls.
c) Bestimmen Sie die Wendetangente und skizzieren Sie mit ihrer Hilfe dann den Graphen von f.
d) Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion p vom Grade 3, deren Funktions- und höhere Ableitungswerte an der Stelle 0 mit den entsprechenden Werten von f übereinstimmen:

$$p(0) = f(0) , \quad p'(0) = f'(0) , \quad p''(0) = f''(0) , \quad p'''(0) = f'''(0) .$$

[Zur Kontrolle: $f'''(x) = -2(4-x)^{-3} - 2(4+x)^{-3}$.]
Vergleichen Sie die Werte von f und p an der Stelle $\frac{4}{3}$ (exakte und gerundete Werte).

2) Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = e^{-kx^2}$ $(k > 0)$.
a) Bestimmen Sie Null-, Extrem- und Wendestellen von f_k sowie die Grenzwerte an den Definitionsrändern.
[Kontrollergebnis: $f_k''(x) = 2ke^{-kx^2} \cdot (2kx^2 - 1)$.]
b) Skizzieren Sie aufgrund Ihrer Ergebnisse die Graphen von f_1 und $f_{\frac{1}{2}}$.
c) Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte dieser Funktionen f_k auf einer Geraden liegen. Welcher?
d) Zwischen x-Achse und Graph von f_k werden achsenparallele Rechtecke eingefügt. Welches dieser Rechtecke hat maximalen Flächeninhalt? Für welches k ist dieses flächengrößte Rechteck ein Quadrat?

3) Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $A = (4, -1)$, $B = (20, 7)$ und $C = (2, 13)$. Lösen Sie die folgenden Aufgaben rechnerisch. Fertigen Sie parallel zu den Rechnungen eine saubere Zeichnung an.
a) Zeigen Sie, dass sich alle drei Höhen in einem Punkt H schneiden und bestimmen Sie diesen.
b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r des Umkreises von ABC.
[Zur Kontrolle: $M = (10, 7)$.]
c) Bestätigen Sie an dem gegebenen Dreieck den folgenden allgemeingültigen Sachverhalt: *Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ABC liegen auf einer Geraden, der sog. Euler'schen Geraden.*

Viel Erfolg!

2. Klausur — Lösungen

1) a) Definitionsbereich von f:

$$x \in \mathbb{D}_f \iff \frac{4-x}{4+x} > 0 \iff (4-x)(4+x) > 0$$
$$\iff 16 - x^2 > 0 \iff x^2 < 16 \iff -4 < x < 4\,.$$

Über dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f =]-4, +4[$ sind $4+x$ und $4-x$ stets positiv, also ist sind $\ln(4+x)$ und $\ln(4-x)$ definiert und es gilt $\ln(4-x) - \ln(4+x) = \ln\frac{4-x}{4+x} = f(x)$.

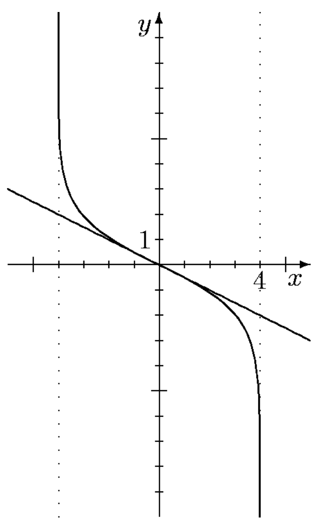
b) Daraus ergibt sich unmittelbar die Punktsymmetrie von f: $f(-x) = \ln(4+x) - \ln(4-x) = -f(x)$. Einzige Nullstelle von f ist 0, denn

$$f(x) = 0 \iff \ln(4-x) = \ln(4-x) \iff 4+x = 4-x \iff x = 0\,.$$

Die Darstellung $f(x) = \ln(4-x) - \ln(4+x)$ erleichtert die Berechnung der Ableitungen:

$$f'(x) = -\frac{1}{4-x} - \frac{1}{4+x}\,,\ f''(x) = -(4-x)^{-2} + (4-x)^{-2}\,.$$

Offenbar hat f' nur negative Werte, f ist also monoton fallend: Es existieren keine Extremstellen.



$$\lim_{x\to 4} \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right) = \lim_{z\to 0} \ln(z) = -\infty\,,$$
$$\lim_{x\to -4} \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right) = \lim_{z\to \infty} \ln(z) = \infty\,.$$

c) Wir bestimmen die Wendepunkte:

$$f''(x) = 0 \iff \frac{-(4-x)^2 + (4+x)^2}{(4+x)^2(4-x)^2} = 0 \iff 4x = 0\,.$$

Damit ist 0 einfache Nullstelle von $f''(x)$, also Wendestelle von f. Als Funktionsgleichung für die Wendetangente erhalten wir so $t_0(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = -\frac{1}{2}x$. Dies ergibt die nebenstehende Skizze.

d) Mit den bereits berechneten Ableitungen von f und

$$f'''(x) = -2(4-x)^{-3} - 2(4+x)^{-3}\,,$$

erhalten wir

$$f(0) = 0\,,\ f'(0) = -\frac{1}{2}\,,\ f''(0) = 0 \text{ und } f'''(0) = -\frac{1}{16}\,.$$

Wir setzen an $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und berechnen die Ableitungen an der Stelle 0:

$$p(0) = d\,,\ p'(0) = c\,,\ p''(0) = 2b\,,\ p'''(0) = 6a\,.$$

Aus den Forderungen $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ ergibt sich unmittelbar:

$$d = b = 0\,,\ c = -\frac{1}{2}\,,\ a = -\frac{1}{96}$$

und daher $p(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{96}x^3$. Dies ergibt als Näherungswert

$$\ln 2 = f(\frac{4}{3}) \approx p(\frac{4}{3}) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{96} \cdot \frac{64}{27} = \frac{56}{81} \approx 0{,}691358\,.$$

Zum Vergleich der Näherungswert des Taschenrechners für $\ln 2 \approx 0{,}693147$.

2) a) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$ und die Funktion ist (wegen des Terms x^2) achsensymmetrisch.
f_k hat nur positive Werte, insbesondere keine Nullstellen. Ableitungen:

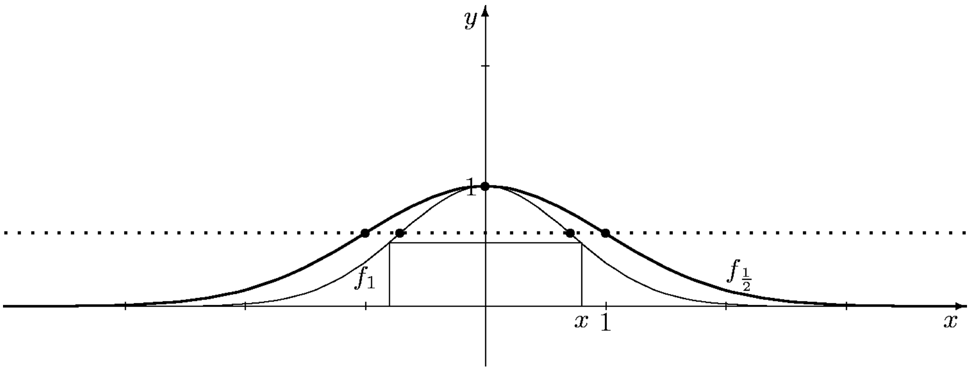
$$f_k'(x) = -2kxe^{-kx^2}\,, \quad f_k''(x) = e^{-kx^2}(-2k + 2kx \cdot 2kx) = 2k(2kx^2 - 1)e^{-kx^2}\,.$$

Einzige Nullstelle von f_k' ist 0, mit VZW, also eine Extremstelle von f_k.
f_k'' hat zwei Nullstellen $\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}$, beide ebenfalls mit VZW also liegen Wendestellen vor.
Wegen der Achsensymmetrie sind die Grenzwerte im Unendlichen gleich:

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-kx^2} = 0\,.$$

Wegen dieser Grenzwerte muss die einzige Extremstelle eine Maximalstelle sein.
b) Hoch- und Wendepunkte:

$$H = (0,1)\,, \qquad W_\pm = (\pm\frac{1}{\sqrt{2k}}, e^{-k\cdot\frac{1}{2k}}) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2k}}, e^{-\frac{1}{2}})\,.$$



c) Alle Wendepunkte haben dieselbe y-Koordinate $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}61$, liegen also auf der Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung $y = e^{-\frac{1}{2}}$.
d) Wegen der Symmetrie von f_k sind auch die Rechtecke achsensymmetrisch und zwei Eckpunkte liegen auf dem Graphen, zwei auf der x-Achse (siehe Skizze). Damit ist die Zielfunktion

$$A(x) = 2xf_k(x) \quad (x \geq 0)\,.$$

Wir stellen fest $A(x) = -\frac{1}{k} f_k'(x)$ und daher sind die Extremstellen von A zugleich die Extremstellen von f_k', also die Wendestellen von f_k (im Bereich $x > 0$). Wegen $A(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} A(x) = 0$, muss die einzige Extremstelle bei $\frac{1}{\sqrt{2k}}$ das absolute Maximum angeben. Die maximale Rechtecksfläche beträgt damit

$$A_{\max} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2k}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{ke}}\,.$$

Die Maße dieser maximalen Rechtecke sind $2x = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2k}} = \sqrt{\frac{2}{k}}$ und $A(x) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Ein Quadrat liegt also genau dann vor, wenn

$$\sqrt{\frac{2}{k}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \iff k = 2e\,.$$

Das flächengrößte Rechteck ist ein Quadrat genau für $k = 2e \approx 7{,}39$.

3) a) Die Höhen sind die Geraden durch die Ecken A, B, C, deren Richtungsvektoren Normalenvektoren zu den gegenüberliegenden Seiten sind. Normalenvektoren $\vec{n}_.$ zu den Dreiecksseiten erhält man durch

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} \perp \vec{n}_c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \\
\overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \end{pmatrix} \perp \vec{n}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\
\overrightarrow{CA} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \end{pmatrix} \perp \vec{n}_b = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Berechnung von H als Schnittpunkt zweier Höhen von ABC:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC} + s\vec{n}_c = \overrightarrow{OB} + t\vec{n}_b &\iff \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \ldots \iff s = 4 \wedge t = -2
\end{aligned}$$

Höhenschnittpunkt: $H = (6, 5)\,.$

Der Punkt H liegt auch auf der dritten Höhe, denn

b) Hat M von allen Eckpunkten denselben Abstand, so liegen die Eckpunkte auf einem Kreis um M; M ist also der Mittelpunkt des Umkreises. Diesen berechnet man als Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC. Dies sind wieder Geraden mit den Normalenvektoren als Richtungsvektoren, nur daß diese nun durch die Mitten A', B', C' der Seiten selbst verlaufen. Diese Seitenmitten sind

$$A' = (11, 10)\,,\ B' = (3, 6)\,,\ C' = (12, 3)\,.$$

Berechnung des Umkreismittelpunktes M als Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC'} + s\vec{n}_c = \overrightarrow{OB'} + t\vec{n}_b &\iff \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \ldots \iff s = -2 \wedge t = 1
\end{aligned}$$

Umkreismittelpunkt: $M = (10, 7)\,.$

Der Radius r des Umkreises ist $r = d(M, A) = \sqrt{(10-4)^2 + (7+1)^2} = 10$.

c) Der Schwerpunkt S von ABC hat als Ortsvektor das arithmetische Mittel der Ortsvektoren der Eckpunkte, also

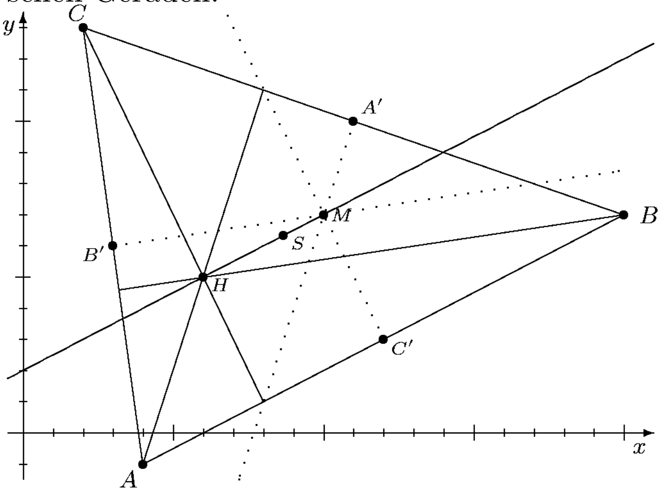
$$S = (\frac{26}{3}, \frac{19}{3}).$$

Dieser liegt auf der Geraden durch $M = (10, 7)$ und $H = (6, 5)$, da die Verbindungsvektoren

$$\overrightarrow{HM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{HS} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

Skizze der Euler'schen Geraden:



Studienkolleg an der RWTH Aachen

FT3 Mathematik (Kg) **1. Klausur** **2. September 2005**

1) Gegeben ist die Summenfolge

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende explizite Beschreibung für s_n:

$$s_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

b) Zeigen Sie, dass die Folge

$$a_n = \frac{s_n}{n^3+n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

2) Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit dem Funktionsterm

$$f(x) = 3x^3 + 29x^2 + 65x - 25\,.$$

a) Nennen Sie alle möglichen rationalen Nullstellen von f. Zeigen Sie, dass f eine rationale Nullstelle x im Bereich $0 < x < 1$ besitzt.
b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f sowie ihre Vielfachheiten. Welche Bedeutung hat die Vielfachheit (=Ordnung) einer Nullstelle für den Verlauf des Graphen von f?
c) Schraffieren Sie möglichst große Bereiche der Koordinatenebene, in denen der Graph von f *nicht* verlaufen kann und skizzieren Sie auf der Basis Ihrer Ergebnisse einen möglichen Verlauf des Graphen von f.

3) Gegeben sind die 4 Punkte $A = (2, 3, -1)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (0, -1, -1)$ und $D = (4, -9, 6)$
a) Zeigen Sie, dass diese Punkte ein Tetraeder bilden und bestimmen Sie den Schwerpunkt S.
b) Bestimmen Sie den Fußpunkt H des Lotes von S auf die 'Bodenebene' $e(A, B, C)$.
c) Kann das Tetraeder auf der Seitenfläche ABC stabil stehen?

Viel Erfolg!

1. Klausur — Lösungen

1) a) Induktionsanfang $n=1$: Es ist $s_1 = \sum_{k=1}^{1} k(k-1) = 1\cdot(1-1) = 0$ und $\frac{0\cdot 1\cdot 2}{3} = 0$; für $n=1$ ist die Behauptung bewiesen.
Induktionsschritt $n \to n+1$:
Sei $n \in \mathbb{N}$ fest.
Induktionsvoraussetzung: $s_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.
Induktionsbehauptung: $s_{n+1} = \frac{(n(n+1)(n+2)}{3}$.
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) + (n+1)\cdot n \\ &\underset{\text{(Ind.Vor.)}}{=} \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + n(n+1) = \frac{(n-1)n(n+1)+3n(n+1)}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1+3)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen und die Induktion vollständig.
b) Nach a) erhalten wir

$$a_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3(n^3+n)} = \frac{n^2-1}{3(n^2+1)} = \frac{1-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{3}{n^2}}\,.$$

Aufgrund der Grenzwertsätze folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}} = \frac{1-0}{3+0} = \frac{1}{3}\,.$$

2) a) Ist ein gekürzter Bruch $\frac{c}{d}$ ($c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}$) Nullstelle von f, so ist der Zähler c ein Teiler von 25 ($=|a_0|$) und der Nenner Teiler des führenden Koeffizienten $a_n = 3$, also sind die möglichen rationalen Nullstellen:

$$\pm 1\,,\ \pm 5\,,\ \pm 25\,,\ \pm\frac{1}{3}\,,\ \pm\frac{5}{3}\,,\ \pm\frac{25}{3}\,.$$

Im Bereich $0 < x < 1$ liegt davon nur $\frac{1}{3}$. Einsetzen dieser Zahl ergibt tatsächlich

$$f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9} + \frac{29}{9} + \frac{65}{3} - 25 = 0\,.$$

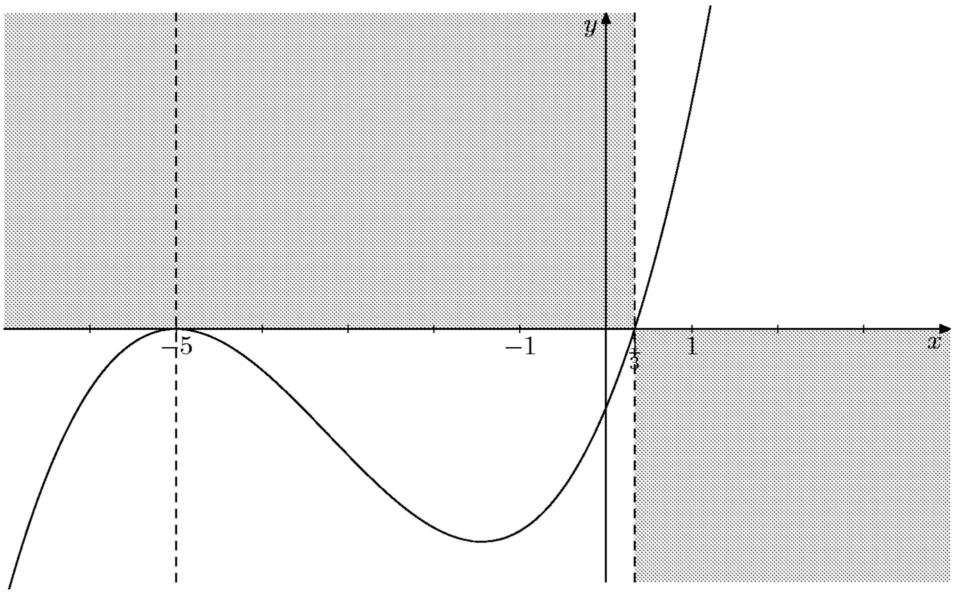
b) Polynomdivision $f(x) : (3x-1)$ ergibt

$$f(x) = (3x-1)(x+5)^2\,.$$

Damit hat f zwei Nullstellen, $\frac{1}{3}$ einfach und -5 doppelt. Ist die Vielfachheit einer Nullstelle ungerade, so hat f dort einen Vorzeichenwechsel, ist sie gerade, so liegt dort kein Vorzeichenwechsel vor. Da der führende Koeffizient von f positiv ist, hat f nach der größten Nullstelle ($\frac{1}{3}$) positives Vorzeichen. Bei $\frac{1}{3}$ findet der einzige Vorzeichenwechsel, so dass sich (von den Nullstellen abgesehen) folgende Vorzeichenverteilung ergibt:

$$f(x)\begin{cases} > 0 & \text{für } x > \frac{1}{3} \\ < 0 & \text{für } -5 < x < \frac{1}{3} \\ < 0 & \text{für } x < -5 \end{cases}$$

c) Damit kann in den nachfolgend schraffierten Bereichen kein Punkt des Graphen von f liegen, und zusammen mit den bekannten Nullstellen von f ergibt sich die skizzierte Kurve als möglicher Verlauf des Graphen:



3) a) 4 Punkte bilden ein Tetraeder, wenn sie nicht in einer Ebene liegen bzw. wenn die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ linear unabhhängig sind. Dazu bestimmt man den Rang der aus diesen Vektoren gebildeten Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -4 & -4 & -12 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 16 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Der Rang ist 3, also sind die 3 Vektoren linear unabhängig und a) gezeigt.
Der Schwerpunkt ergibt sich durch Mittelung der Ortsvektoren, also $S = (2, -2, 1)$.
b) Es sei $H \in e(A, B, C)$ der Lotfußpunkt, also

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \quad \text{mit } \overrightarrow{SH} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\,.$$

Nun gilt

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\overrightarrow{SH} \perp \overrightarrow{AB} \iff \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -22 + 17r + 16s = 0$$

und

$$\overrightarrow{SH} \perp \overrightarrow{AC} \iff \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -20 + 16r + 20s = 0\,.$$

Man erhält

$$\begin{bmatrix} 17r & +16s & = & 22 \\ 16r & +20s & = & 20 \end{bmatrix} \iff r = \frac{10}{7} \ \wedge \ s = -\frac{1}{7}\,.$$

c) Da $s < 0$ ist, liegt der Lotfußpunkt *nicht* im Innern des Bodendreiecks. (Ebenso zeigt sich dies an $r > 1$.) Das Tetraeder kann also nicht stabil auf der Seitenfläche ABC stehen.