Studienkolleg an der RWTH Aachen

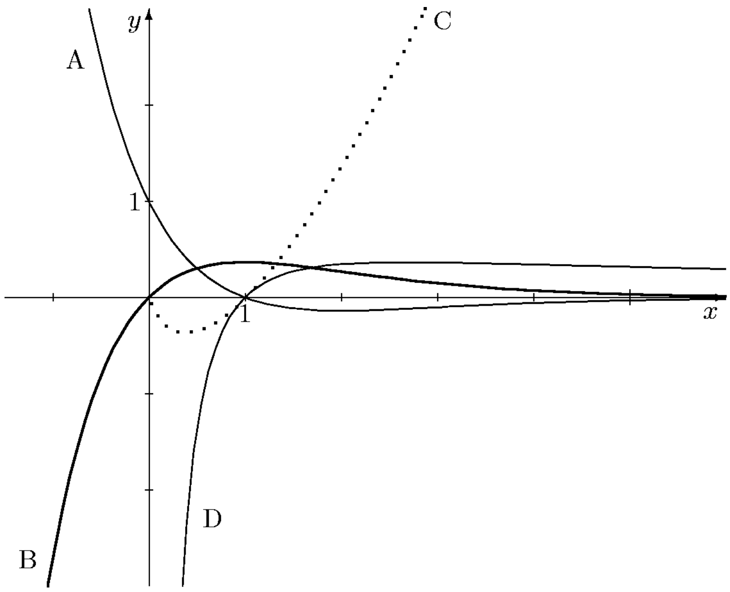
FT2 Mathematik (Kg) **2. Klausur** **27. Oktober 2006**

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen Null-, Extremstellen und Grenzwerte an den Definitionsrändern.

a) $f(x) = x \cdot \ln x$, b) $g(x) = \dfrac{x}{e^x}$, c) $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Die Graphen dieser Funktionen sind in nachfolgender Skizze enthalten. Ordnen Sie jeder Funktion ihren Graphen zu.



d) Ein Graph gehört zu keiner der obigen Funktionen. Geben Sie einen möglichen Term dafür an.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = e^{-2a^2x^2}$ $(a > 0)$.

a) Bestimmen Sie Null-, Extrem- und Wendestellen von f_a sowie die Grenzwerte an den Definitionsrändern.
[Kontrollergebnis: $f_a''(x) = 4a^2 e^{-2a^2x^2} \cdot (4a^2x^2 - 1)$.]

b) Skizzieren Sie aufgrund Ihrer Ergebnisse die Graphen von f_1 und $f_{\frac{1}{2}}$.

c) Zeigen Sie, dass die Wendepunkte aller Funktionen f_a auf einer Geraden liegen. Welcher?

d) Zwischen x-Achse und Graph der Funktion f_a $(a > 0$ fest$)$ werden achsenparallele Rechtecke eingefügt. Welches dieser Rechtecke hat maximalen Flächeninhalt? Für welches a ist dieses flächengrößte Rechteck ein Quadrat?

– bitte wenden –

Aufgabe 3:

a) Wann nennt man definitionsgemäß ein System von Vektoren $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^m$

α) linear unabhängig,

β) ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^m$,

γ) eine Basis des $\mathbb{R}^m$?

b) Charakterisieren Sie alle drei Begriffe mit Hilfe des Ranges einer geeigneten Matrix. Welche Beziehungen zwischen n und m ergeben sich daraus in den drei Fällen jeweils?

c) Gegeben sind die folgenden vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a^2 - 3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ sind diese Vektoren

α) linear unabhängig,

β) ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$,

γ) eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

d) Wählen Sie unter diesen 4 Vektoren eine Basis aus, wenn immer dies möglich ist.

Begründen Sie Ihre Antworten genau.

Viel Erfolg!

2. Klausur — Lösungen

1) a) $f(x) = x \cdot \ln x$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f =]0, \infty[$, da ln nur für positive Argumente definiert ist. Für $x > 0$ gilt dann aber

$$f(x) = 0 \iff x \ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1\,.$$

Einzige Nullstelle liegt bei $x = 1$.
Mit der Produktregel erhalten wir $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$. Es gilt

$$f'(x) = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}\,.$$

Die Stelle $x = \frac{1}{e}$ ist eine Extremstelle, da $f'(x) = 1 + \ln x$ wegen seiner Montonie dort das Vorzeichen wechseln muss.
Grenzwerte an den Definitionsrändern 0 und ∞:
Wegen $\ln x \to \infty$ für $x \to \infty$ erhält man erst recht

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln x = \infty\,.$$

Für den Grenzübergang $x \to 0$ wenden wir die Regel von de l'Hospital an:

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0\,.$$

Der Graph von f ist C.
b) $g(x) = \frac{x}{e^x} = xe^{-x}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat die einzige Nullstelle $x = 0$.
$g'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$ hat die einzige Nullstelle $x = 1$. Diese ist Extremstelle von g, da g' hier sein Vorzeichen wechselt (Linearfaktor $1 - x$).
Wegen $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$ folgt sofort $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$, während der andere Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

eine bekannte Folgerung aus der Regel von de l'Hospital war (e^x dominiert jede ganzrationale Funktion).
Der Graph ist B.

c) $h(x) = \dfrac{\ln x}{x} = x^{-1} \ln x$ hat (wie a) den Definitionsbereich $]0, \infty[$.
Es gilt $h(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$.

$$h'(x) = -x^{-2} \ln x + x^{-1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-\ln x + 1}{x^2} = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e\,.$$

Wegen der Monotonie von $-\ln x + 1$ ändert der Zähler von h' an der Nullstelle sein Vorzeichen, während der Nenner immer positiv ist: e ist eine Extremstelle von h.
Der Graph ist D.
d) Graph A gehört zu keiner der Funktionen. A hat eine Nullstelle bei +1 mit Vorzeichenwechsel von + zu −, also muss ein Faktor $1-x$ im Funktionsterm auftreten. Außerdem wächst die gesuchte Funktion für $x \to -\infty$ sehr stark an, daher der Faktor e^{-x}. Ein möglicher Term ist $(1 - x)e^{-x}$.

2) a) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$ und die Funktion ist (wegen des Terms x^2) achsensymmetrisch. f_a hat nur positive Werte, insbesondere keine Nullstellen.
Ableitungen:

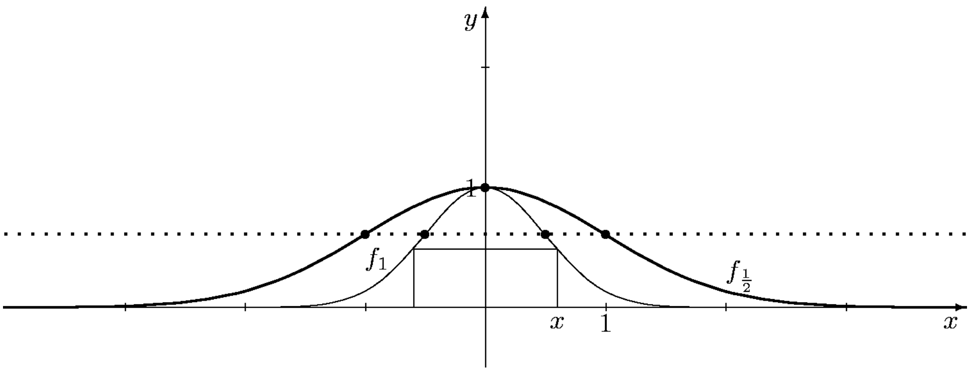
$$f_a'(x) = -4a^2xe^{-2a^2x^2}\,,$$
$$f_a''(x) = e^{-2a^2x^2}(-4a^2 + 4a^2x \cdot 4a^2x) = 4a^2(4a^2x^2 - 1)e^{-2a^2x^2}\,.$$

Einzige Nullstelle von f_a' ist 0, mit VZW, also eine Extremstelle von f_a.
f_a'' hat zwei Nullstellen $\pm\frac{1}{2a}$, beide ebenfalls mit VZW, also liegen Wendestellen vor.
Wegen der Achsensymmetrie sind die Grenzwerte im Unendlichen gleich:

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-2a^2x^2} = 0\,.$$

Wegen dieser Grenzwerte muss die einzige Extremstelle eine Maximalstelle sein.
b) Hoch- und Wendepunkte:

$$H = (0,1)\,, \qquad W_\pm = (\pm\frac{1}{2a}, e^{-2a^2\cdot\frac{1}{4a^2}}) = (\pm\frac{1}{2a}, e^{-\frac{1}{2}})\,.$$



c) Alle Wendepunkte haben dieselbe y-Koordinate $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}61$, liegen also auf der Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung $y = e^{-\frac{1}{2}}$.
d) Wegen der Symmetrie von f_a sind auch die Rechtecke achsensymmetrisch und zwei Eckpunkte liegen auf dem Graphen, zwei auf der x-Achse (siehe Skizze). Damit ist die Zielfunktion

$$A(x) = 2xf_a(x) \quad (x \geq 0)\,.$$

Wir stellen fest $A(x) = -\frac{1}{2a^2}f_a'(x)$ und daher sind die Extremstellen von A zugleich die Extremstellen von f_a', also die Wendestellen von f_a (im Bereich $x > 0$). Wegen $A(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} A(x) = 0$ muss die einzige Extremstelle bei $\frac{1}{2a}$ das absolute Maximum angeben. Die maximale Rechtecksfläche beträgt damit

$$A_{\max} = 2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a\sqrt{e}}\,.$$

Die Maße dieser maximalen Rechtecke sind $2x = \frac{1}{a}$ und $A(x) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Ein Quadrat liegt also genau dann vor, wenn

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{e}} \iff a = \sqrt{e}\,.$$

Das flächengrößte Rechteck ist ein Quadrat genau für $a = \sqrt{e} \approx 1{,}65$.

3) a) Die Vektoren $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^m$ sind
α) linear unabhängig, wenn keiner der Vektoren eine Linearkombination der übrigen ist,
β) ein Erzeugendensystem, wenn jeder Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$ als Lineakombination der $\vec{u}_i$ dargestellt werden kann,
γ) eine Basis, wenn sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem bilden.
b) Es sei r der Rang der Matrix mit den gegebenen Vektoren als Spalten. Dann gilt:

$$\alpha) \iff r = n\,, \quad \beta) \iff r = m\,, \quad \gamma) \iff r = m = n\,.$$

Da immer $r \leq m$ und $r \leq n$ gilt, folgt:

$$\alpha) \implies n \leq m\,, \quad \beta) \implies m \leq n\,, \quad \gamma) \implies m = n\,.$$

c) Vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ können in keinem Fall linear unabhängig, also auch keine Basis bilden. Um Frage β) zu beantworten, bestimmen wir den Rang durch Gauß-Umformungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ -8 & 2 & -6 & a^2-3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 10 & a^2+5 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$$

Man erkennt, dass für $a^2 - 1 = 0$ der Rang $r = 2$ ist, und somit kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ vorliegt.
Ist dagegen $a^2 - 1 \neq 0$, so ist der Rang der Matrix 3 und die Vektoren bilden ein Erzeugendensystem.
d) Aber auch die Matrix, in der der dritte Vektor gestrichen wird, hat den Rang 3, also bilden auch die Vektoren u_1, u_2, u_4 ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$. Da ihre Anzahl genau 3 ist, sind sie auch eine Basis des $\mathbb{R}^3$ (falls $a \neq \pm 1$). Im Falle $a = \pm 1$ kann man keine Teilbasis auswählen, da die Vektoren ja noch nicht einmal ein Erzeugendensystem bilden.

Studienkolleg an der RWTH Aachen

FT2 Mathematik (Kg) **1. Klausur** **25. August 2006**

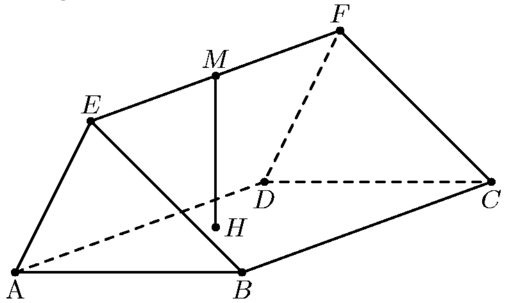
1) Auf einem Maisfeld werden wöchentlich einmal 200 kg Dünger ausgestreut. Während ihrer Wachstumszeit nehmen die Pflanzen 75% des im Boden vorhandenen Düngers in ihren Stoffwechsel auf.
a) Bestimmen Sie eine rekursive Beschreibung für den Düngergehalt a_n im Boden (gemessen in kg unmittelbar vor der n-ten Düngung).
[Wenn Sie die Rekursion nicht bestimmen können, arbeiten Sie in den folgenden Aufgabenteilen mit $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 50$.]
b) Beweisen Sie, dass sich der Düngergehalt im Boden langfristig bei einem bestimmten Wert stabilisiert. Bestimmen Sie ihn.
Begründen Sie ihre Überlegungen genau.

2) Gegeben ist die rationale Funktion f mit dem Funktionsterm

$$f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 5x - 25}{3x^3 + 29x^2 + 65x - 25}$$

a) Nennen Sie ohne weitere Rechnung alle *möglichen rationalen Lücken* von f. Zeigen Sie, dass f im Bereich $0 < x < 1$ einen Pol hat.
b) Bestimmen Sie alle Pole und evtl. hebbaren Lücken von f.
[Zur Kontrolle: $\tilde{f}(x) = \dfrac{x^2 - 5}{3x^2 + 14x - 5}$.]
c) Bestimmen Sie alle Stellen, an denen f sein Vorzeichen wechselt und schraffieren Sie möglichst große Bereiche der Koordinatenebene, in denen der Graph von f *nicht* verlaufen kann.
d) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Asymptoten.
e) Skizzieren Sie auf der Basis Ihrer Ergebnisse einen möglichen Verlauf des Graphen von f.

3) a) Zeigen Sie, dass die Punkte $A = (0, 0, 0)$, $B = (-2, 4, -4)$, $C = (4, 10, -1)$ drei Eckpunkte eines Rechtecks sind, und bestimmen Sie den vierten Eckpunkt D, die Kantenlängen sowie die Fläche des Rechtecks.
b) Das Rechteck $ABCD$ ist Teil eines Hausdaches (siehe Skizze) mit $E = (2, 0, -4)$ und $F = (8, 6, -1)$. Zeigen Sie, dass auch die Dachflächen Rechtecke sind und



bestimmen Sie die Neigungswinkel beider Dachflächen.
c) Bestimmen Sie die Höhe des Dachfirstes EF über der Bodenfläche $e = e(A, B, C)$.
d) Zur Sicherung des Daches muss der Balken EF in der Mitte M unterstützt werden. Bestimmen Sie den Auflagepunkt H des Stützbalkens auf dem Boden.

Viel Erfolg!

1. Klausur — Lösungen

1) a) Es ist $a_1 = 0$. Unmittelbar vor der n-ten Düngung beträgt der Düngergehalt a_n, unmittelbar danach $a_n + 200$. Nach Ablauf der Woche sind 75% verbraucht, also noch 25% vorhanden, also ist der Gehalt vor der nächsten Düngung

$$a_{n+1} = (a_n + 200) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}a_n + 50\,.$$

b) Wir untersuchen die rekursive Folge a_n auf Konvergenz. Wir bestimmen zunächst aus der Rekursion die *möglichen* Grenzwerte: *Wenn* a Grenzwert von a_n ist, muss gelten

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} a_n + 50 = \frac{1}{4}a + 50 \iff \frac{3}{4}a = 50 \iff a = \frac{200}{3}\,.$$

Damit kommt nur dieser Wert als Grenzwert in Frage. Zum Nachweis der Konvergenz verwenden wir das Monotoniekriterium und zeigen, dass die Folge beschränkt und monoton ist.

Wir behaupten zunächst die Beschränktheit nach oben: $a_n \le \frac{200}{3}$, und beweisen dies durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang $n = 1$: $a_1 = 0 \le \frac{200}{3}$ ist wahr.

Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $n \ge 1$ beliebig, aber fest.

Induktionsvoraussetzung: Für dieses n gilt $a_n \le \frac{200}{3}$.

Induktionsbehauptung: $a_{n+1} \le \frac{200}{3}$.

Beweis:

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 50 \underset{\text{Ind.Vor.}}{\le} \frac{1}{4}\cdot\frac{200}{3} + 50 = \frac{50}{3} + 50 = \frac{200}{3}\,.$$

Wir beweisen nun die Monotonie und untersuchen das Vorzeichen von $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4}a_n + 50 - a_n = 50 - \frac{3}{4}a_n \underset{(a_n \le \frac{200}{3})}{\ge} 50 - \frac{3}{4}\cdot\frac{200}{3} = 0\,.$$

Damit ist für alle n $a_{n+1} - a_n \ge 0$, die Folge ist monoton wachsend. Insgesamt ist damit die Folge als konvergent nachgewiesen und der Grenzwert ist $\frac{200}{3}$.

Der Düngergehalt stabilisiert sich langfristig bei 66,7 kg.

2) a) Lücken sind die Nullstellen des Nennerpolynoms $N(x) = 3x^3 + 29x^2 + 65x - 25$. Dieses hat ganzzahlige Koeffizienten, daher gilt: Ist ein gekürzter Bruch $\frac{c}{d}$ ($c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}$) Nullstelle von N, so ist der Zähler c ein Teiler von 25 ($= |a_0|$) und der Nenner Teiler des führenden Koeffizienten $a_n = 3$, also sind die möglichen rationalen Nullstellen von N

$$\pm 1\,,\ \pm 5\,,\ \pm 25\,,\ \pm\frac{1}{3}\,,\ \pm\frac{5}{3}\,,\ \pm\frac{25}{3}\,.$$

Im Bereich $0 < x < 1$ liegt davon nur $\frac{1}{3}$. Einsetzen dieser Zahl ergibt tatsächlich

$$N(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9} + \frac{29}{9} + \frac{65}{3} - 25 = 0\,.$$

$\frac{1}{3}$ ist ein Pol von f, weil $\frac{1}{3}$ *keine* Nullstelle des Zählerpolynoms $Z(x) = x^3 + 5x^2 - 5x - 25$ ist.
b) Polynomdivision $N(x) : (3x-1)$ ergibt

$$N(x) = (3x-1)(x+5)^2\,.$$

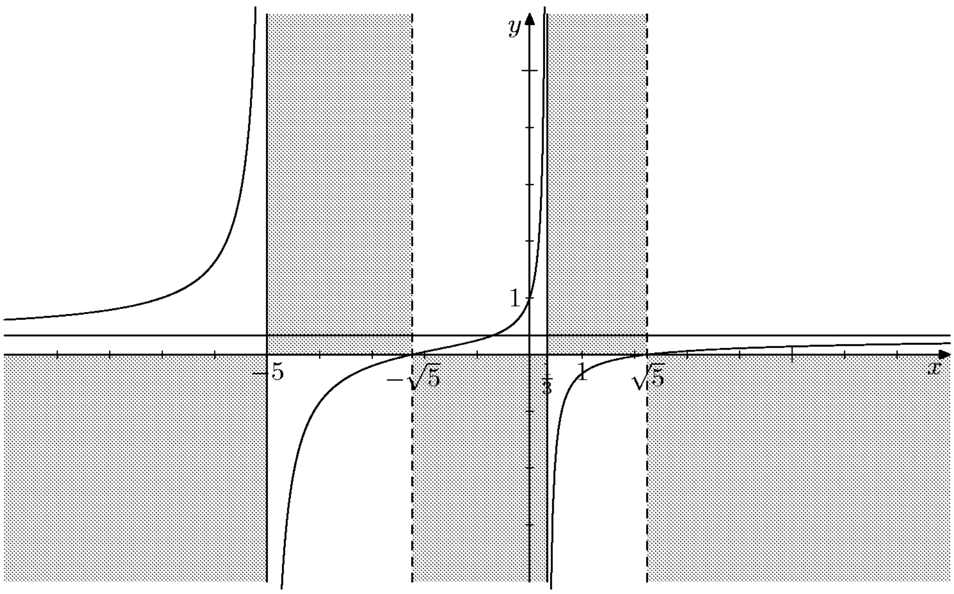
Damit hat f zwei Lücken, $\frac{1}{3}$ und -5. $\frac{1}{3}$ ist bereits als Pol erkannt. -5 ist Nullstelle des Zählers $Z(x)$. Polynomdivision durch $x+5$ ergibt

$$Z(x) = (x+5)(x^2-5)\,.$$

Damit erhält man

$$f(x) = \frac{(x+5)(x^2-5)}{(x+5)^2(3x-1)} = \frac{x^2-5}{(x+5)(3x-1)}\,.$$

Damit ist -5 ebenfalls ein Pol, wieder mit VZW.
c) Außerdem hat f noch die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{5}$, die ebenfalls einfach, also mit VZW sind. Da der Quotient der führenden Koeffizienten positiv ist, sind die Funktionswerte von f schließlich positiv, so dass sich die nachfolgende Schraffur ergibt.
d) Da Zähler- und Nennergrad gleich sind, besitzt f eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}$. Ein möglicher Verlauf des Graphen von f ist ebenfalls skizziert.



3) a) Es ist $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$, also $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$. Damit ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei B. Wir bestimmen D aus der Parallelogrammeigenschaft $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $D = (6,6,3)$. Die Kantenlängen und der Flächeninhalt des Rechtecks sind

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36} = 6\,,\ |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{81} = 9 \text{ und } A = 6 \cdot 9 = 54\,.$$

b) Wegen $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BE}$ ist die Dachfläche ein Parallelogramm und $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Gleiches gilt für die andere Dachfläche. Die Neigungswinkel sind (wegen der eben gezeigten Orthogonalität) gleich den Winkeln

$$\alpha = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}) \iff \cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{36}\sqrt{32}} = \frac{24}{24\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \iff \alpha = 45^0\,,$$

$$\beta = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \iff \cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{36}\sqrt{20}} = \frac{20}{12\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \iff \beta \approx 63^0\,.$$

c) Wir bestimmen zunächst einen Normalenvektor $\vec{n}$ zur Ebene $e(A, B, C)$ mit Hilfe des Vektorproduktes

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -18 \\ -36 \end{pmatrix} = 18\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor zu e; seine Länge ist 3. Eine Normalengleichung für $e = e(A, B, C)$ ist damit $2x - y - 2z = d$ und d bestimmt man durch Einsetzen von $A = (0, 0, 0) \in e$: $d = 0$. Damit ist $2x - y - 2z = 0$ eine Gleichung für e. Zur Bestimmung der Höhe benutzen wir die Hessesche Abstandsformel

$$d(E, e) = \frac{|2 \cdot 2 - 0 - 2 \cdot (-4)|}{\sqrt{2^2 + 1 + 2^2}} = \frac{12}{3} = 4\,.$$

d) Bestimmung des Lotfußpunktes H von $M = M_{EF} = (5, 3, -\frac{5}{2})$ mit der Hesseformel

$$\overrightarrow{HM} = r\vec{n} \quad \text{mit } r = \frac{\vec{n} \bullet \overrightarrow{OM}}{|\vec{n}|^2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}\,.$$

Also

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM} - r\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{13}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad H = (\frac{7}{3}, \frac{13}{3}, \frac{1}{6})\,.$$