**Studienkolleg an der RWTH Aachen**

**FT2 Mathematik (Kg)** **Ersatzklausur** **9. November 2007**

**Aufgabe 1:**

Gegeben ist die Summenfolge

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+2) \quad (n \in I\!N)\,.$$

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende explizite Beschreibung für $s_n$:

$$s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) \quad \text{für alle } n \in I\!N\,.$$

b) Zeigen Sie, dass die Folge

$$a_n = \frac{s_n}{n^3} \quad (n \in I\!N)$$

konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. Begründen Sie Ihre Antwort genau.

**Aufgabe 2:**

Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

a) Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen von $f$ sowie deren Ordnungen.

b) Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung von $f$ und skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen von $f$.

c) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$.

d) Welche Fläche schließen der Graph von $f$ und die $x$-Achse ein?

**Aufgabe 3:**

Gegeben ist ein Tetraeder mit den Eckpunkten $A = (1, 2, -2)$, $B = (1, -2, -1)$, $C = (-1, -2, -2)$ und $D = (3, -10, 5)$

a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt $S$ dieses Tetraeders.

b) Wo liegt der Fußpunkt $F$ des Lotes von $S$ in der 'Bodenebene' $e(A, B, C)$? Kann das Tetraeder auf der Seitenfläche $ABC$ stabil stehen?

c) Fertigen Sie eine *maßstabsgetreue* (!) Zeichnung (Längeneinheit 1 cm) des Bodendreiecks $ABC$ an und markieren Sie darin die genaue Position des Lotfußpunktes $F$. Erläutern Sie, wie Sie Ihre Zeichnung erstellt haben.

*Viel Erfolg!*

**Ersatzklausur — Lösungen**

1) a) Induktionsanfang $n = 1$: Es ist $s_1 = \sum_{k=1}^{1} k(k+2) = 1 \cdot 3 = 3$ und $\frac{1\cdot 2\cdot 9}{6} = 3$; für $n = 1$ ist die Behauptung bewiesen.
Induktionsschritt $n \to n+1$:
Sei $n \in \mathbb{N}$ fest.
Induktionsvoraussetzung: $s_n = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.
Induktionsbehauptung: $s_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+9)}{6}$.
Induktionsbeweis:

$$
\begin{aligned}
s_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+2) + (n+1)(n+3) \\
&\underset{(\text{Ind.Vor.})}{=} \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} + (n+1)(n+3) = (n+1) \cdot \frac{2n^2 + 7n + 6n + 18}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 13n + 18)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+9)}{6}\,.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen und die Induktion vollständig.
b) Nach a) erhalten wir

$$
a_n = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6n^3} = \frac{n+1}{6n} \cdot \frac{2n+7}{n} = (\frac{1}{6} + \frac{1}{6n}) \cdot (2 + \frac{7}{n})\,.
$$

Aufgrund der Grenzwertsätze folgt

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = (\frac{1}{6} + 0)(2+0) = \frac{1}{3}\,.
$$

3) a) Der Schwerpunkt ergibt sich durch Mittelung der Ortsvektoren: $S = (1, -3, 0)$.
b) Es sei $F \in e(A, B, C)$ der Lotfußpunkt, also

$$
\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \quad \text{mit } \overrightarrow{SF} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\,.
$$

Nun gilt

$$
\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Also

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{SF} \perp \overrightarrow{AB} &\iff \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff -22 + 17r + 16s = 0
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{SF} \perp \overrightarrow{AC} &\iff \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff -20 + 16r + 20s = 0\,.
\end{aligned}
$$

Man erhält

$$\begin{bmatrix} 17r & +16s & = & 22 \\ 16r & +20s & = & 20 \end{bmatrix} \iff r = \frac{10}{7} \ \wedge \ s = -\frac{1}{7} \,.$$

Daraus ergibt sich für $F$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \frac{10}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{7}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{10}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ -\frac{15}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix} .$$

Da $s < 0$ ist, liegt der Lotfußpunkt *nicht* im Innern des Bodendreiecks. (Ebenso zeigt sich dies an $r > 1$.) Das Tetraeder kann also nicht stabil auf der Seitenfläche $ABC$ stehen.

c) Mit Zirkel: Wir bestimmen die drei Seitenlängen des Dreiecks, zeichnen eine Seite (etwa $AB$) und schlagen mit dem Zirkel Kreise um die Eckpunkte mit den anderen Kantenlängen:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{17} \approx 4{,}12 \,, \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{20} \approx 4{,}47 \,, \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5} \approx 2{,}24 \,, .$$

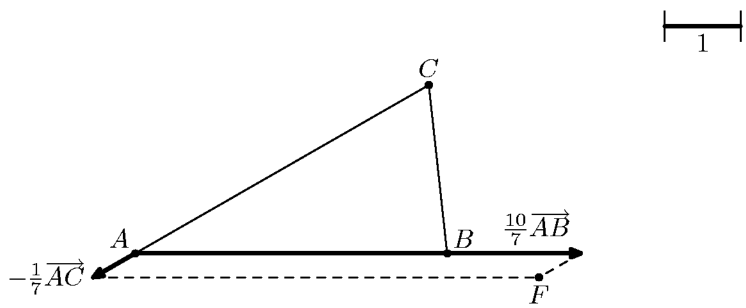
Mit Geodreieck/Winkelmesser: Wir bestimmen einen Winkel, etwa

$$\cos\alpha = \cos\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{16}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{20}} \approx 0{,}87 \,,$$

$$\alpha = \arccos \frac{16}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{20}} \approx 29{,}8^0 \,.$$

Wir zeichnen diesen Winkel und tragen auf den beiden Schenkeln die oben berechneten Abstände $d(A, B)$ und $d(A, C)$ ab.

Aus der Parameterdarstellung $\overrightarrow{AF} = \frac{10}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$ kann man dann die Lage von $F$ relativ zu $ABC$ bestimmen:



**Studienkolleg an der RWTH Aachen**

**FT2 Mathematik (Kg)** **2. Klausur** **27. Oktober 2007**

**Aufgabe 1:**

a) Führen Sie für die rationale Funktion $f$ mit dem Funktionsterm

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 9x + 10}{2x^2 - 2x - 12}$$

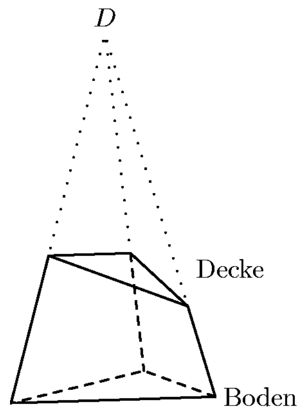
eine vollständige Funktionsuntersuchung durch (Pole, hebbare Lücken, Nullstellen, Asymptote, Randgrenzwerte, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte) und skizzieren auf der Basis Ihrer Ergebnisse den Verlauf des Graphen in einem Koordinatensystem.
b) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt von Polgerade und Asymptote genau der Mittelpunkt zwischen den Extrempunkten von $f$ ist. Welche Bedeutung hat Ihrer Meinung nach dieser Punkt für den Graphen?

**Aufgabe 2:**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \ln^2 x$.
a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Randgrenzwerte von $f$. Begründen Sie die Grenzwertberechnung genau und formulieren Sie die dabei benutzte Regel.
b) Untersuchen Sie den Graphen von $f$ auf Null-, Extrem- und Wendestellen und skizzieren Sie auf der Basis Ihrer Ergebnisse den Graphen von $f$.
c) Zeigen Sie, dass die Verbindungsgerade von Koordinatenursprung und Wendepunkt den Graphen rechtwinklig schneidet.

**Aufgabe 3:**

Gegeben sind 6 Punkte $A = (3, 2, 2)$, $B = (-2, 5, 6)$, $C = (1, 0, 5)$ sowie $A' = (5, 2, 1)$, $B' = (-3, 6, 7)$ und $C' = (1, -1, 6)$.
a) Zeigen Sie, dass diese 6 Punkte einen Tetraederstumpf (siehe nebenstehende Skizze) bilden und bestimmen Sie die fehlende Spitze $D$. Welches der Dreiecke $ABC$ bzw. $A'B'C'$ bildet die Bodenfläche? (Ergänzen Sie die Skizze!)
[Kontrollergebnis: $D = (1, 2, 3)$, Bodendreieck $A'B'C'$.]
b) Welcher der Punkte $A, B, C$ hat den größten Abstand von der Bodenebene?
c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Seitenfläche $A'B'BA$ des Stumpfes sowie den Winkel zwischen dieser Seitenfläche und dem Boden.
d) Welches Volumen hat der Tetraederstumpf?




*Viel Erfolg!*

## 2. Klausur — Lösungen

1) a) Lücken sind die Nullstellen des Nenners:

$$2x^2 - 2x - 12 = 0 \iff x^2 - x - 6 = 0 \iff (x-3)(x+2) = 0\,.$$

Damit hat $f$ die Definitionslücken $+3$ und $-2$.
$+3$ ist keine Nullstelle des Zählers, also Pol von $f$. $-2$ ist Nullstelle des Zählers, also führen wir Polynomdivision durch $x+2$ durch:

$$(2x^3 - 3x^2 - 9x + 10) : (x+2) = 2x^2 - 7x + 5 = (2x-5)(x-1)\,.$$

Wir erhalten so die folgende Faktorisierung von $f(x)$

$$f(x) = \frac{(2x-5)(x-1)(x+2)}{2(x-3)(x+2)} = \frac{(2x-5)(x-1)}{2(x-3)} =: \tilde{f}(x)\ (x \in \mathbb{D}_f)\,.$$

Damit ist $-2$ eine hebbare Lücke und es gilt

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(-2) = -\frac{27}{10} = -2{,}7\,.$$

Wir sehen, dass $f$ zwei einfache Nullstellen besitzt ($\frac{5}{2}$ und $+1$, jeweils mit VZW) und dass $+3$ ein einfacher Pol ist (ebenfalls mit VZW).
Da der Zählergrad um genau 1 größer ist als der Nennergrad, hat $f$ ein schräge Asymptote; wir bestimmen eine Gleichung für sie durch Polynomdivision. Wir gehen von $\tilde{f}$ aus (da $f$ und $\tilde{f}$ sich nur an einer Stelle unterscheiden, haben sie ansonsten dieselben Eigenschaften).

$$(2x^2 - 7x + 5) : (2x - 6) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x-3}\,.$$

Die Gerade mit der Gleichung $y = x - \frac{1}{2}$ ist damit Asymptote für $f$ für den Grenzübergang $x \to \pm\infty$. Wir erkennen, dass der Graph die Asymptote *nicht* schneidet und für $x > 3$ *oberhalb* der Asymptote verläuft, ansonsten unterhalb.
Wir berechnen nun (ausgehend von der Asymptotenform) die Ableitungen von $f$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{1}{2} + (x-3)^{-1}\,, \\ f'(x) &= 1 - (x-3)^{-2}\,, \\ f''(x) &= 2(x-3)^{-3}\,. \end{aligned}$$

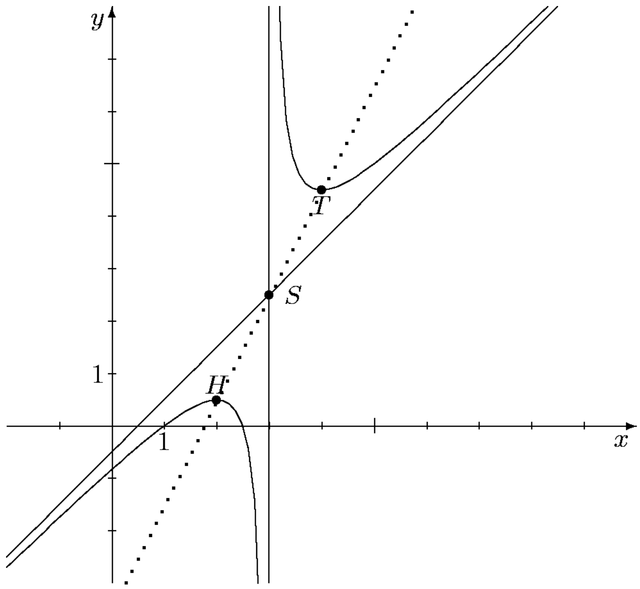
Wir erkennen, dass $f''$ keine Nullstellen, $f$ also keine Wendestellen hat. Außerdem gilt $f''(x) > 0 \iff x > 3$, also ist $f$ für $x > 3$ linksgekrümmt, ansonsten rechtsgekrümmt. (Der Krümmungswechsel findet an der Polstelle statt, daher gibt es keine Wendestelle.)
Extremstellen sind Nullstellen von $f'$ mit VZW:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 0 = 1 - \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{(x-3)^2 - 1}{(x-3)^2} \\ &\iff (x-3)^2 = 1 \iff x - 3 = \pm 1 \iff x = 4 \ \vee\ x = 2\,. \end{aligned}$$

Die Extremstelle $+4$ ist eine Minimalstelle, da $f$ dort linksgekrümmt ist ($f''(4) > 0$), während bei $+2$ ein Maximum liegt. Die Extrempunkte sind

$$H = (2, f(2)) = (2, \frac{1}{2}), \quad T = (4, \frac{9}{2}).$$

Wir erhalten so den folgenden Graphen von $f$:




b) Der Schnittpunkt der Polgeraden (Gleichung $x = 3$) mit der Asymptote (Gleichung $y = x - \frac{1}{2}$) ist $S = (3, \frac{5}{2})$. Der Mittelpunkt von $H$ und $T$ ist ebenfalls $S$. Der Punkt $S$ könnte ein Symmetriepunkt für den Graphen von $f$ sein.

2) a)/b) Wegen des Logarithmusfaktors hat $f$ den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = ]0, \infty[$. Es ist also im Folgenden stets $x > 0$ und $f(x) \geq 0$. Dann gilt

$$f(x) = 0 \iff \ln^2 x = 0 \iff x = 1\,.$$

$f$ hat bei $x = 1$ ihre einzige Nullstelle. Wegen $f(x) \geq 0$ hat $f$ dort notwendig ein Minimum.
Die Definitionsränder sind 0 und $\infty$. Unmittelbar erhält man

$$\lim_{x\to\infty} x \ln^2 x = \infty$$

aus den bekannten Grenzwerten der einzelnen Faktoren, während man an der Stelle $x = 0$ die l'Hospitalsche Regel benötigt:

$$\lim_{x\to 0} x \ln^2 x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \ln x \cdot x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \ln x}{-x^{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^{-1}}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0} 2x = 0\,.$$

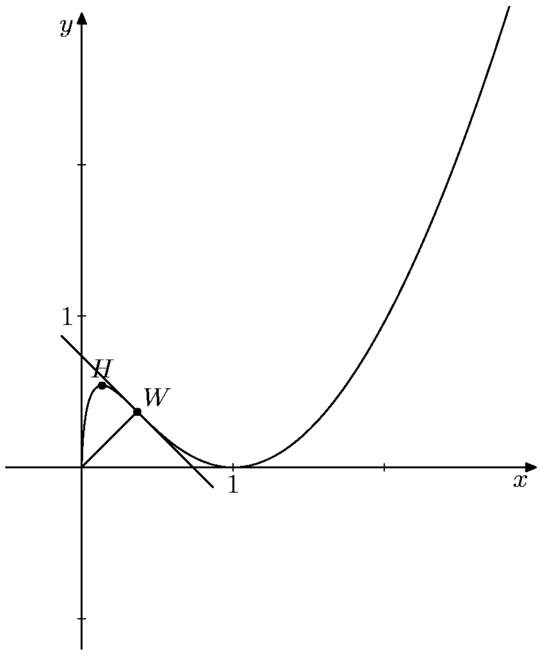
Mittels Produkt- und Kettenregel erhält man

$$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln^2 x + 2 \ln x\,,$$
$$f''(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2(\ln x + 1)}{x}\,.$$

Damit folgt für $x \in \mathbb{D}_f$

$$0 = f'(x) = \ln x(\ln x + 2) \iff x = 1 \ \vee \ x = e^{-2} \approx 0{,}14\,,$$
$$0 = f''(x) \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1} \approx 0{,}37\,.$$

$f'(x) = \ln x(\ln x + 2)$ wechselt an beiden Nullstellen das Vorzeichen, da $\ln x$ monoton ist. Da $f$ bei 1 ein Minimum hat, ist $e^{-2}$ eine Maximalstelle von $f$. Genauso begründet man, dass $f''$ an seiner Nullstelle $e^{-1}$ ebenfalls das Vorzeichen wechselt, so dass dort eine Wendestelle von $f$ vorliegt.
Man erhält so den folgenden Graphen von $f$:




c) Die Verbindungsgerade von Ursprung $(0,0)$ und Wendepunkt $W = (e^{-1}, f(e^{-1}))$ Anstieg $\frac{f(e^{-1})}{e^{-1}} = 1$. Die Wendetangente hat den Anstieg $f'(e^{-1}) = \ln e^{-1}(2 + \ln e^{-1}) = -1$. Damit schneiden sich Ursprungsgerade und Graph rechtwinklig.

3) a) Wir zeigen, dass sich die drei Geraden $g(A, A')$, $g(B, B')$ und $g(C, C')$ in einem Punkt schneiden.

$$X \in g(A, A') \iff \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$X \in g(B, B') \iff \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$X \in g(C, C') \iff \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schnittpunktsbestimmung von $g(A, A')$ und $g(C, C')$ (wegen der Nullen in den Richtungsvektoren):

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\iff 2r = -2 \ \wedge \ -t = 2 \ \wedge \ 2 - r = 5 + t$$
$$\iff r = -1 \ \wedge \ t = -2 \ \wedge \ 3 = 3\,.$$

Die beiden Geraden schneiden sich also in einem Punkt $D$ mit den Koordinaten

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen, dass $S$ auch auf der Geraden $g(B, B')$ liegt:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s = -3\,.$$

Die negativen Parameterwerte in allen drei Fällen bedeuten, dass die Punkte $A$, $B$, $C$ zwischen der Spitze $D$ und $A'B'C'$ liegen; also bildet $A'B'C'$ das Bodendreieck.
b) Wir berechnen die Abstände mit Hilfe der Hesseschen Abstandsformel. Dazu bestimmen wir zunächst eine Gleichung der Bodenebene. Einen Normalenvektor erhalten wir durch das Vektorprodukt

$$\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 19 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Eine mögliche Koordinatengleichung hat daher die Form $19x + 8y + 20z + d = 0$ und durch Einsetzen von $C'$ erhalten wir $19 - 8 + 20 \cdot 6 - d = 0 \iff d = 131$. Da in der Hesseschen Abstandsformel der Nenner unabhängig vom Punkt ist, genügt es die Zähler zu vergleichen. Diese sind die Beträge der nachfolgenden Zahlen:

$$\begin{aligned} A: &\quad 19 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 20 \cdot 2 - 131 = -18\,, \\ B: &\quad 19 \cdot (-2) + 8 \cdot 5 + 20 \cdot 6 - 131 = -9\,, \\ C: &\quad 19 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 20 \cdot 5 - 131 = -12\,. \end{aligned}$$

Damit hat $A$ den größten Abstand von der Bodenebene; er beträgt

$$d_A = \frac{|-18|}{\sqrt{19^2 + 8^2 + 20^2}} = \frac{18}{\sqrt{825}} \approx 0{,}63$$

c) Man berechnet die Fläche des Seitenvierecks $A'B'BA$ als Summe von zwei Dreiecksflächen.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'A} &= \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{BB'} \times \overrightarrow{BA} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Vierecksfläche ist daher

$$A_{A'B'BA} = \frac{1}{2}\sqrt{96} + \frac{1}{2}\sqrt{6} = \frac{5}{2}\sqrt{6}\,.$$

Der Winkel zwischen der Seitenfläche und dem Boden ist der spitze Winkel zwischen zwei Normalenvektoren. Wir haben bereits berechnet

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_{A'B'C'} = \begin{pmatrix} 19 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n}_2 = \vec{n}_{A'B'BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist der gesuchte Winkel

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} = \arccos \frac{31}{5\sqrt{33}\cdot\sqrt{6}} = \arccos 0{,}44 = 63{,}86^0\,.$$

d) Das Volumen des Tetraederstumpfes ist die Differenz zweier Tetraedervolumina. Diese betragen ein Sechstel des zugehörigen Spatvolumens und berechnen sich über das Spatprodukt bzw. die Determinante.

$$\pm V_{A'B'C'D} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}) \bullet \overrightarrow{A'D} = \frac{1}{6}\cdot 2\begin{pmatrix} 19 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -12\,,$$

$$\pm V_{ABCD} = \frac{1}{6}\det\left( \overrightarrow{AB}\middle|\overrightarrow{AC}\middle|\overrightarrow{AD} \right) = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -3\,.$$

Das Volumen des Tetraederstumpfes beträgt also $12 - 3 = 9$.

**Studienkolleg an der RWTH Aachen**

**FT2 Mathematik (Kg)** **1. Klausur** **24. August 2007**

**Aufgabe 1:**

Gegeben ist die Summenfolge

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k(k-2) \quad (n \in I\!N)\,.$$

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende explizite Beschreibung für $s_n$:

$$s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n-5) \quad \text{für alle } n \in I\!N\,.$$

b) Zeigen Sie, dass die Folge

$$a_n = \frac{s_n}{n^3 - n} \quad (n \in I\!N\,,\ n \geq 2)$$

konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. Begründen Sie Ihre Antwort genau.

**Aufgabe 2:**

Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f$ mit dem Funktionsterm

$$f(x) = -3x^5 - 2x^4 + 8x^3 + 5x^2$$

a) Zeigen Sie, dass $f$ eine rationale Nullstelle $x$ im Bereich $-2 < x < -1$ besitzt.
b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f$ sowie ihre Vielfachheiten. Welche Bedeutung hat die Vielfachheit (=Ordnung) einer Nullstelle für den Verlauf des Graphen von $f$?
c) Schraffieren Sie möglichst große Bereiche der Koordinatenebene, in denen der Graph von $f$ *nicht* verlaufen kann und skizzieren Sie auf der Basis Ihrer Ergebnisse einen möglichen Verlauf des Graphen von $f$.

**Aufgabe 3:**

Gegeben ist ein Tetraeder mit den Eckpunkten $A = (2, 3, -1)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (0, -1, -1)$ und $D = (4, -9, 6)$
a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt $S$ dieses Tetraeders.
b) Wo liegt der Fußpunkt $F$ des Lotes von $S$ in der 'Bodenebene' $e(A, B, C)$? Kann das Tetraeder auf der Seitenfläche $ABC$ stabil stehen?
c) Fertigen Sie eine *maßstabsgetreue* (!) Zeichnung (Längeneinheit 1 cm) des Bodendreiecks $ABC$ an und markieren darin die genaue Position des Lotfußpunktes $F$. Erläutern Sie, wie Sie Ihre Zeichnung erstellt haben.

*Viel Erfolg!*

## 1. Klausur — Lösungen

1) a) Induktionsanfang $n = 1$: Es ist $s_1 = \sum_{k=1}^{1} k(k-2) = 1 \cdot (1-2) = -1$ und $\frac{1\cdot 2\cdot(-3)}{6} = -1$; für $n = 1$ ist die Behauptung bewiesen.
Induktionsschritt $n \to n+1$:
Sei $n \in I\!N$ fest.
Induktionsvoraussetzung: $s_n = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}$.
Induktionsbehauptung: $s_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n-3)}{6}$.
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k(k-2) = \sum_{k=1}^{n} k(k-2) + (n+1)(n-1) \\ &\underset{(\text{Ind.Vor.})}{=} \frac{n(n+1)(2n-5)}{6} + (n+1)(n-1) = (n+1) \cdot \frac{2n^2 - 5n + 6n - 6}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n - 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n-3)}{6}. \end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen und die Induktion vollständig.
b) Nach a) erhalten wir

$$a_n = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6(n^3-n)} = \frac{2n-5}{6(n-1)} = \frac{2-\frac{5}{n}}{6-\frac{6}{n}}.$$

Aufgrund der Grenzwertsätze folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2-0}{6-0} = \frac{1}{3}.$$

2) a) Wir klammern zunächst aus $f(x) = x^2(-3x^3 - 2x^2 + 8x + 5)$. Außer der doppelten Nullstelle 0 sind die möglichen rationalen Nullstellen $\pm 1, \pm 5, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}$. Im Bereich $-2 < x < -1$ liegt davon nur $-\frac{5}{3}$. Einsetzen dieser Zahl ergibt tatsächlich

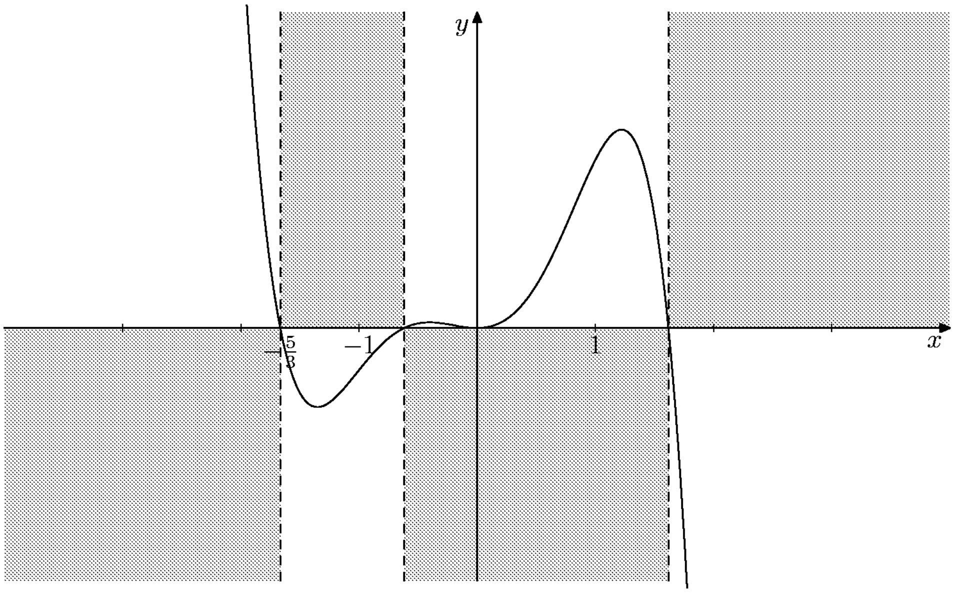
$$f(-\frac{5}{3}) = \frac{5^2}{3^2} \cdot (3 \cdot \frac{5^3}{3^3} - 2 \cdot \frac{5^2}{3^2} - 8 \cdot \frac{5}{3} + 5) = \frac{5^2}{3^2} \cdot (\frac{125}{9} - \frac{50}{9} - \frac{40}{3} + 5) = 0$$

b) Polynomdivision $f(x) : (3x+5)$ ergibt

$$f(x) = -x^2(3x+5)(x^2 - x - 1)$$

Der quadratische Faktor hat die Nullstellen $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Damit hat $f$ die Nullstellen 0 (doppelt) und drei einfache Nullstellen $-\frac{5}{3}$, $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, an denen jeweils ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Da der führende Koeffizient von $f$ negativ ist, hat $f$ nach der größten Nullstelle negatives Vorzeichen.
c) Damit kann in den nachfolgend schraffierten Bereichen kein Punkt des Graphen

von $f$ liegen, und zusammen mit den bekannten Nullstellen von $f$ ergibt sich die skizzierte Kurve als möglicher Verlauf des Graphen:




3) a) Der Schwerpunkt ergibt sich durch Mittelung der Ortsvektoren: $S = (2, -2, 1)$.
b) Es sei $F \in e(A, B, C)$ der Lotfußpunkt, also

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \quad \text{mit } \overrightarrow{SF} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\,.$$

Nun gilt

$$\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\overrightarrow{SF} \perp \overrightarrow{AB} \iff \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -22 + 17r + 16s = 0$$

und

$$\overrightarrow{SF} \perp \overrightarrow{AC} \iff \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -20 + 16r + 20s = 0\,.$$

Man erhält

$$\begin{bmatrix} 17r & +16s & = & 22 \\ 16r & +20s & = & 20 \end{bmatrix} \iff r = \frac{10}{7} \ \wedge \ s = -\frac{1}{7}\,.$$

Daraus ergibt sich für $F$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \frac{10}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{7}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{10}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ -\frac{15}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Da $s < 0$ ist, liegt der Lotfußpunkt *nicht* im Innern des Bodendreiecks. (Ebenso zeigt sich dies an $r > 1$.) Das Tetraeder kann also nicht stabil auf der Seitenfläche $ABC$ stehen.
c) Mit Zirkel: Wir bestimmen die drei Seitenlängen des Dreiecks, zeichnen eine Seite (etwa $AB$) und schlagen mit dem Zirkel Kreise um die Eckpunkte mit den anderen Kantenlängen:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{17} \approx 4{,}12\,, \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{20} \approx 4{,}47\,, \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5} \approx 2{,}24\,,.$$

Mit Geodreieck/Winkelmesser: Wir bestimmen einen Winkel, etwa

$$\cos\alpha = \cos\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{16}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{20}} \approx 0{,}87\,,$$
$$\alpha = \arccos\frac{16}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{20}} \approx 29{,}8^0\,.$$

Wir zeichnen diesen Winkel und tragen auf den beiden Schenkeln die oben berechneten Abstände $d(A,B)$ und $d(A,C)$ ab.
Aus der Parameterdarstellung $\overrightarrow{AF} = \frac{10}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$ kann man dann die Lage von $F$ relativ zu $ABC$ bestimmen: