

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 1/e} \frac{\ln x + 1}{ex - 1}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{x^2 + 1})}{x^2}$, c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{c}{x}\right)^x$.

Begründen Sie Ihre Überlegungen genau.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2x^2 - 3x + 2)e^x$.

a) Untersuchen Sie f auf Null-, Extrem- und Wendestellen sowie Grenzwerte an den Definitionsrändern und fertigen Sie auf der Basis Ihrer Ergebnisse eine Skizze des Graphen an.

b) Die fallende Wendetangente und die zugehörige Normale bilden mit der x -Achse ein Dreieck. Bestimmen Sie dessen Flächeninhalt.

Aufgabe 3:

Gegeben ist eine Schar rationaler Funktionen f_a definiert durch

$$f_a(x) = \frac{x^2 + a}{x} \quad (a \neq 0).$$

- a) Bestimmen Sie Definitionsbereich, Null-, Extrem-, Wendestellen und Asymptote dieser Funktionen. (Beachten Sie die notwendigen Fallunterscheidungen hinsichtlich a .) Skizzieren Sie den Verlauf der Graphen von f_4 und f_{-4} .
- b) An welcher Stelle hat der Graph von f_a den geringsten Abstand vom Koordinatenursprung? Markieren Sie für f_4 und f_{-4} diese Abstände in Ihrer Skizze.

Aufgabe 4:

Gegeben sind die 5 Punkte

$$A = (3, 0, 1), \quad B = (6, 6, 7), \quad C = (12, 9, 1), \quad D = (9, 3, -5), \quad E = (0, 9, -2).$$

- a) Zeigen Sie, dass diese Punkte eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche bilden, und bestimmen Sie die Kantenlänge des Bodenquadrates.
- b) Zeigen Sie, dass der Höhenfußpunkt H der Pyramide auf einer Diagonale des Bodenquadrates $ABCD$ liegt. Skizzieren Sie maßstabsgerecht das Bodenquadrat und die Lage von H darin.
- c) Wir betrachten das Lot von B auf die Kante $g(A, E)$. In welchem Verhältnis teilt der Lotfußpunkt die Strecke zwischen A und E ?

Viel Erfolg!

Ersatzklausur — Lösungen

- 1) a) Zähler und Nenner konvergieren gegen 0, also kann man die 1. Regel von de l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 1/e} \frac{\ln x + 1}{ex - 1} = \lim_{x \rightarrow 1/e} \frac{1/x}{e} = 1.$$

- b) Auch dies ist ein Grenzwert des unbestimmten Typs " $\frac{0}{0}$ ", den man mit der ersten Regel von de l'Hospital bestimmt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{x^2 + 1})}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

- c) Zunächst stellen wir diesen exponentiellen Ausdruck als Potenz von e dar:

$$\left(1 - \frac{c}{x}\right)^x = e^{x \ln(1 - \frac{c}{x})}$$

und untersuchen den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 - \frac{c}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{c}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Dies ist ein Grenzwert des unbestimmten Typs " $\frac{0}{0}$ ", den wir mit der ersten Regel von de l'Hospital bestimmen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{c}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1 - \frac{c}{x}}\right)\left(\frac{c}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = -c \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x - c} = -c.$$

Wegen der Stetigkeit der e -Funktion ist der gesuchte Grenzwert e^{-c} .

- 2) a) Die Funktion ist überall definiert und hat keine Nullstellen, da der Exponentialfaktor e^x nie den Wert 0 annimmt und für den quadratischen Faktor gilt

$$2x^2 - 3x + 2 = 0 \iff x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0 \iff x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - 1}: \quad \text{keine Lösung.}$$

Zur Bestimmung der Extrem- und Wendestellen berechnen wir die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x - 3) \cdot e^x + (2x^2 - 3x + 2)e^x = (2x^2 + x - 1)e^x, \\ f''(x) &= (4x + 1)e^x + (2x^2 + x - 1)e^x = (2x^2 + 5x)e^x. \end{aligned}$$

Es gilt

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \iff x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}.$$

f' hat also zwei Nullstellen: -1 und $\frac{1}{2}$. Wegen $f''(-1) < 0$ ist -1 eine Maximalstelle, und entsprechend folgt aus $f''(\frac{1}{2}) > 0$, dass bei $\frac{1}{2}$ ein Minimum vorliegt. Die Extrempunkte sind $T = (\frac{1}{2}, \sqrt{e}) \approx (0,5; 1,65)$ und $H = (-1, \frac{7}{e}) \approx (-1; 2,58)$.

Die Wendestellen erhält man aus der faktorisierten Form der zweiten Ableitung (Ausklammern!): $f''(x) = x(2x + 5)e^x$. Damit sind 0 und $-\frac{5}{2}$ die einzigen Nullstellen von f'' ; beide sind einfach (Linearfaktoren!) und folglich Wendestellen von f .

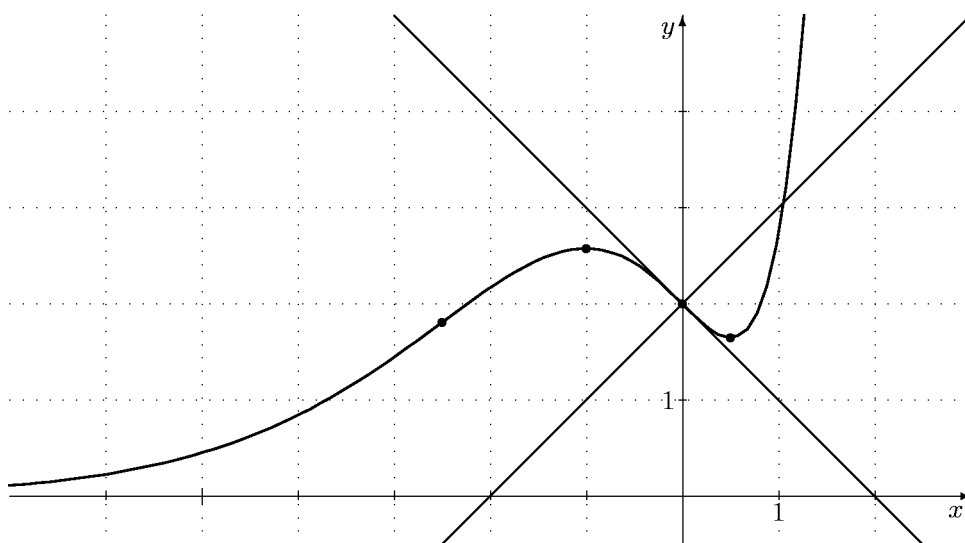
Die Wendepunkte sind $W_1 = (0, 2)$ und $W_2 = (-\frac{5}{2}, 22e^{-\frac{5}{2}}) \approx (-2,5; 1,81)$.

Schließlich bestimmen wir die Grenzwerte im Unendlichen:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x + 2)e^x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 3x + 2)e^x = \infty.$$

Damit erhält man die folgende Skizze des Graphen von f :



b) Die Wendetangente an der Wendestelle 0 hat den Anstieg $f'(0) = -1$, während an der Wendestelle $-\frac{5}{2}$ der Anstieg $f'(-\frac{5}{2}) > 0$ ist. Die in b) betrachtete Wendetangente ist also die an der Stelle 0 ; sie hat den Anstieg -1 und ihr y -Achsenabschnitt ist 2 (da sie ja durch den Wendepunkt $W_1 = (0, 2)$ verlaufen muss). Damit ist $y = -x + 2$ die Gleichung der Wendetangente bei 0 . Die Normale hat den Anstieg 1 (das Negative des Kehrwertes des Tangentenanstiegs -1) und ebenfalls den y -Achsenabschnitt 2 . Damit ist die Normalengleichung $y = x + 2$. Beide Geraden sind schon in obiger Skizze eingezeichnet.

Die Schnittstellen mit der x -Achse sind 2 für die Tangente und -2 für die Normale. Das entstehende Dreieck hat also eine Grundlinie der Länge 4 und die Höhe 2 , die Fläche ist also $A = 4$.

- 3) a) Die Funktionen sind sämtlich punktsymmetrisch (zum Koordinatenursprung), denn $f_a(-x) = -f_a(x)$ für alle x .

Der Nenner x hat die einzige Nullstelle 0 , also ist 0 einzige Lücke von f_a . Wegen $a \neq 0$ ist diese keine Nullstelle des Zählers, also liegt bei 0 ein einfacher Pol vor. Als Asymptotenform für f_a erhält man (durch Polynomdivision bzw. hier durch einfache Aufspaltung des Bruches) $f_a(x) = \frac{x^2 + a}{x} = x + \frac{a}{x}$. Damit ist $y = x$ eine Gleichung für die Asymptote; die Asymptote ist die Winkelhalbierende im I./III.

Quadranten.

Nullstellen von f sind die Lösungen von $x^2 + a = 0 \iff x^2 = -a$. Für $a < 0$ besitzt f_a also die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{-a}$, während für $a > 0$ f_a keine Nullstellen hat.

Zur Berechnung der Ableitungen benutzt man am besten die Asymptotenform $f_a(x) = x + \frac{a}{x} = x + ax^{-1}$ und erhält:

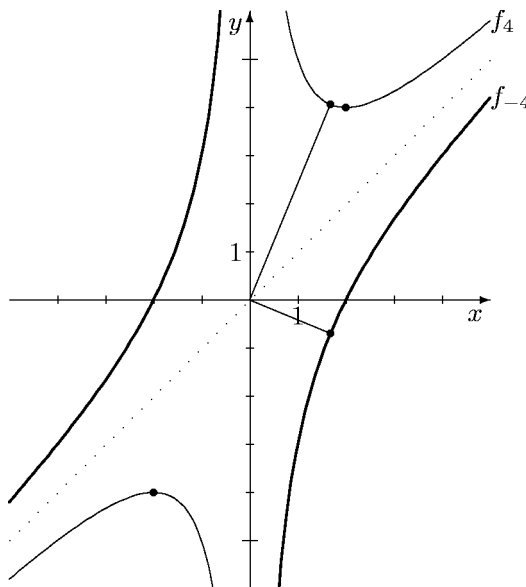
$$f'_a(x) = 1 - ax^{-2} = 1 - \frac{a}{x^2} \quad \text{sowie} \quad f''_a(x) = 2ax^{-3} = \frac{2a}{x^3}.$$

Damit erkennt man, dass $f''_a(x)$ keine Null- und f_a keine Wendestellen hat.

Zur Berechnung der Nullstellen von f'_a

$$f'_a(x) = 0 \iff 1 - \frac{a}{x^2} = 0 \iff x^2 = a$$

muss man wieder das Vorzeichen von a berücksichtigen und erhält im Falle $a < 0$ keine Nullstellen für f'_a und damit keine Extremstellen für f_a , während sich im Falle $a > 0$ zwei Nullstellen $\pm\sqrt{a}$ ergeben, die beide Extremstellen von f_a sind (da $f''_a(x)$ ja an allen Stellen $\neq 0$ ist).



b) (Allgemeine Lösung für beliebiges a .) Der Abstand des Koordinatenursprungs vom Graphen ist der kleinste Abstand irgendeines Kurvenpunktes $(x, f_a(x))$ von $(0, 0)$. Wir untersuchen daher diesen Abstand (bzw. sein Quadrat) auf Minima. Das Abstandsquadrat des Punktes $P_x = (x, f_a(x))$ vom Koordinatenursprung $O = (0, 0)$ ist das Längenquadrat des Vektors $\overrightarrow{OP_x} = \begin{pmatrix} x \\ f_a(x) \end{pmatrix}$:

$$D(x) = x^2 + f_a^2(x) = x^2 + \left(x + \frac{a}{x}\right)^2 = x^2 + x^2 + 2a + \frac{a^2}{x^2} = 2x^2 + 2a + \frac{a^2}{x^2}.$$

Zur Bestimmung des minimalen Abstandsquadrates berechnet man die Nullstellen der Ableitung:

$$D'(x) = 4x - \frac{2a^2}{x^3} = 0 \iff 4x^4 - 2a^2 = 0 \iff x = \pm \sqrt[4]{\frac{a^2}{2}} = \pm \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt[4]{2}}.$$

Da für $x \rightarrow \pm\infty$ und für $x \rightarrow 0$ das Abstandsquadrat $D(x)$ unbeschränkt ist, muss es sowohl in $]0, \infty[$ wie in $] -\infty, 0[$ ein Minimum geben. Da es in jedem dieser Bereiche nur eine Nullstelle von D' gibt, liegen dort jeweils Minima vor.

4) a) Die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ sind orthogonal:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 18 + 18 - 36 = 0$$

und haben gleiche Länge

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{9 + 36 + 36} = 9.$$

Wegen $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ ist damit $ABCD$ ein Quadrat der Kantenlänge 9.

Der Punkt E gehört nicht zu der Bodenebene (siehe c)).

b) Für den Höhenfußpunkt gilt: $H \in e(A, B, D)$ und $\overrightarrow{EH} \perp \vec{u}, \vec{v}$:

$$H \in e(A, B, D) \iff \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD}$$

und

$$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{EA} + r\vec{u} + s\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Die Orthogonalitätsbedingungen ergeben die beiden Gleichungen

$$\overrightarrow{EH} \perp \vec{u}, \vec{v} \iff -27 + 81r = 0 \wedge -27 + 81s = 0 \iff r = s = \frac{1}{3}.$$

Wegen $r = s$ liegt H auf der Diagonalen $g(A, C)$:

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

c) Gesucht ist der Punkt $F \in g(A, E)$ mit $\overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{AE}$. Also

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{BF} &= \overrightarrow{BA} + r\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &\iff -27 + 99r = 0 \iff r = \frac{3}{11}. \end{aligned}$$

Damit teilt der Lotfußpunkt die Strecke von A nach E im Verhältnis $3 : 8$.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{x^2 + 1})}{x^2}$, c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{x}\right)^x$.

Begründen Sie Ihre Überlegungen genau.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.

- Untersuchen Sie f auf Null-, Extrem- und Wendestellen sowie Grenzwerte an den Definitionsrändern und fertigen Sie auf der Basis Ihrer Ergebnisse eine Skizze des Graphen an.
- Die ansteigende Wendetangente und die zugehörige Normale bilden mit der x -Achse ein Dreieck. Bestimmen Sie dessen Flächeninhalt.

Aufgabe 3:

Gegeben ist eine Schar rationaler Funktionen f_a definiert durch

$$f_a(x) = \frac{x^2 - a}{x} \quad (a \neq 0).$$

- Bestimmen Sie Definitionsbereich, Null-, Extrem-, Wendestellen und Asymptote dieser Funktionen. (Beachten Sie die notwendigen Fallunterscheidungen hinsichtlich a .) Skizzieren Sie den Verlauf der Graphen von f_2 und f_{-2} .
- An welcher Stelle hat der Graph von f_a den geringsten Abstand vom Koordinatenursprung? Markieren Sie für f_2 und f_{-2} diese Abstände in Ihrer Skizze.

Aufgabe 4:

Gegeben sind die 5 Punkte

$$A = (3, 0, 1), \quad B = (6, 6, 7), \quad C = (12, 9, 1), \quad D = (9, 3, -5), \quad E = (0, 9, -2).$$

- Zeigen Sie, dass diese Punkte eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche bilden, und bestimmen Sie die Kantenlänge des Bodenquadrates.
- Zeigen Sie, dass der Höhenfußpunkt H der Pyramide auf einer Diagonale des Bodenquadrates $ABCD$ liegt. Skizzieren Sie maßstabsgerecht das Bodenquadrat und die Lage von H darin.
- Wir betrachten das Lot von B auf die Kante $g(A, E)$. In welchem Verhältnis teilt der Lotfußpunkt die Strecke zwischen A und E ?

2. Klausur — Lösungen

- 1) a) Zähler und Nenner konvergieren gegen 0, also kann man die 1. Regel von de l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{e}.$$

- b) Auch dies ist ein Grenzwert des unbestimmten Typs " $\frac{0}{0}$ ", den man mit der ersten Regel von de l'Hospital bestimmt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{x^2 + 1})}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

- c) Zunächst stellen wir diesen exponentiellen Ausdruck als Potenz von e dar:

$$\left(1 + \frac{c}{x}\right)^x = e^{x \ln(1 + \frac{c}{x})}$$

und untersuchen den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{c}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{c}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Dies ist ein Grenzwert des unbestimmten Typs " $\frac{0}{0}$ ", den wir mit der ersten Regel von de l'Hospital bestimmen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{c}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1 + \frac{c}{x}}\right)\left(-\frac{c}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = c \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + c} = c.$$

Wegen der Stetigkeit der e -Funktion ist der gesuchte Grenzwert e^c .

- 2) a) Die Funktion ist überall definiert und hat keine Nullstellen, da der Exponentialfaktor e^{-x} nie den Wert 0 annimmt und für den quadratischen Faktor gilt

$$2x^2 + 3x + 2 = 0 \iff x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = 0 \iff x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - 1}: \quad \text{keine Lösung.}$$

Zur Bestimmung der Extrem- und Wendestellen berechnen wir die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x + 3) \cdot e^{-x} + (2x^2 + 3x + 2)(e^{-x} \cdot (-1)) = (-2x^2 + x + 1)e^{-x}, \\ f''(x) &= (-4x + 1)e^{-x} + (-2x^2 + x + 1)(-e^{-x}) = (2x^2 - 5x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \iff x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}.$$

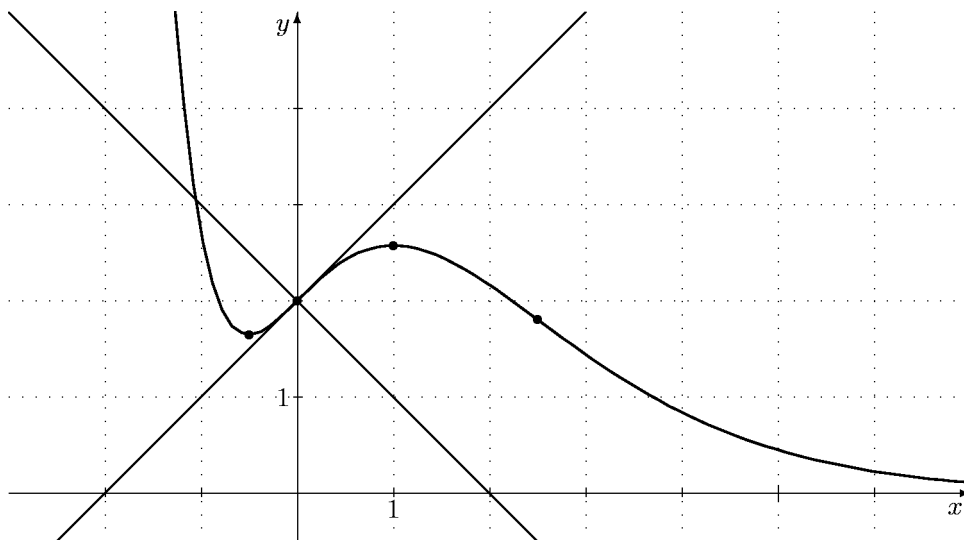
f' hat also zwei Nullstellen: 1 und $-\frac{1}{2}$. Wegen $f''(1) < 0$ ist 1 eine Maximalstelle, und entsprechend folgt aus $f''(-\frac{1}{2}) > 0$, dass bei $-\frac{1}{2}$ ein Minimum vorliegt. Die Extrempunkte sind $T = (-\frac{1}{2}, \sqrt{e}) \approx (-0,5; 1,65)$ und $H = (1, \frac{7}{e}) \approx (1; 2,58)$.

Die Wendestellen erhält man aus der faktorisierten Form der zweiten Ableitung (Ausklammern!): $f''(x) = x(2x-5)e^{-x}$. Damit sind 0 und $\frac{5}{2}$ die einzigen Nullstellen von f'' ; beide sind einfach (Linearfaktoren!) und folglich Wendestellen von f . Die Wendepunkte sind $W_1 = (0, 2)$ und $W_2 = (\frac{5}{2}, 22e^{-\frac{5}{2}}) \approx (2,5; 1,81)$. Schließlich bestimmen wir die Grenzwerte im Unendlichen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + 3x + 2)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 3x + 2)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x + 2)e^x = \infty.$$

Damit erhält man die folgende Skizze des Graphen von f :



b) Die Wendetangente an der Wendestelle 0 hat den Anstieg $f'(0) = 1$, während an der Wendestelle $\frac{5}{2}$ der Anstieg $f'(\frac{5}{2}) < 0$ ist. Die in b) betrachtete Wendetangente ist also die an der Stelle 0; sie hat den Anstieg 1 und ihr y -Achsenabschnitt ist 2 (da sie ja durch den Wendepunkt $W_1 = (0, 2)$ verlaufen muss). Damit ist $y = x + 2$ die Gleichung der Wendetangente bei 0. Die Normale hat den Anstieg -1 (das Negative des Kehrwertes des Tangentenanstiegs 1) und ebenfalls den y -Achsenabschnitt 2. Damit ist die Normalengleichung $y = -x + 2$. Beide Geraden sind schon in obiger Skizze eingezeichnet.

Die Schnittstellen mit der x -Achse sind -2 für die Tangente und $+2$ für die Normale. Das entstehende Dreieck hat also eine Grundlinie der Länge 4 und die Höhe 2, die Fläche ist also $A = 4$.

- 3) a) Die Funktionen sind sämtlich punktsymmetrisch (zum Koordinatenursprung), denn $f_a(-x) = -f_a(x)$ für alle x .

Der Nenner x hat die einzige Nullstelle 0, also ist 0 einzige Lücke von f_a . Wegen $a \neq 0$ ist diese keine Nullstelle des Zählers, also liegt bei 0 ein einfacher Pol vor. Als Asymptotenform für f_a erhält man (durch Polynomdivision bzw. hier durch einfache Aufspaltung des Bruches) $f_a(x) = \frac{x^2 - a}{x} = x - \frac{a}{x}$. Damit ist $y = x$ eine Gleichung für die Asymptote; die Asymptote ist die Winkelhalbierende im I./III. Quadranten.

Nullstellen von f sind die Lösungen von $x^2 - a = 0 \iff x^2 = a$. Für $a > 0$ besitzt f_a also die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{a}$, während für $a < 0$ f_a keine Nullstellen hat.

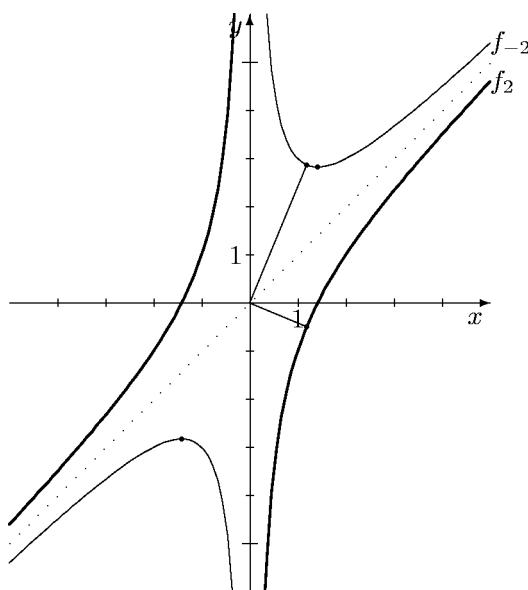
Zur Berechnung der Ableitungen benutzt man am besten die Asymptotenform $f_a(x) = x - \frac{a}{x} = x - ax^{-1}$ und erhält:

$$f'_a(x) = 1 + ax^{-2} = 1 + \frac{a}{x^2} \quad \text{sowie} \quad f''_a(x) = -2ax^{-3} = -\frac{2a}{x^3}.$$

Damit erkennt man, dass $f''_a(x)$ keine Null- und f_a keine Wendestellen hat. Zur Berechnung der Nullstellen von f'_a

$$f'_a(x) = 0 \iff 1 + \frac{a}{x^2} = 0 \iff x^2 = -a$$

muss man wieder das Vorzeichen von a berücksichtigen und erhält im Falle $a > 0$ keine Nullstellen für f'_a und damit keine Extremstellen für f_a , während sich im Falle $a < 0$ zwei Nullstellen $\pm\sqrt{-a}$ ergeben, die beide Extremstellen von f_a sind (da $f''_a(x)$ ja an allen Stellen $\neq 0$ ist).



b) (Allgemeine Lösung für beliebiges a .) Der Abstand des Koordinatenursprungs vom Graphen ist der kleinste Abstand irgendeines Kurvenpunktes $(x, f_a(x))$ von $(0, 0)$. Wir untersuchen daher diesen Abstand (bzw. sein Quadrat) auf Minima. Das Abstandsquadrat des Punktes $P_x = (x, f_a(x))$ vom Koordinatenursprung $O = (0, 0)$ ist das Längenquadrat des Vektors $\overrightarrow{OP_x} = \begin{pmatrix} x \\ f_a(x) \end{pmatrix}$:

$$D(x) = x^2 + f_a^2(x) = x^2 + \left(x - \frac{a}{x}\right)^2 = x^2 + x^2 - 2a + \frac{a^2}{x^2} = 2x^2 - 2a + \frac{a^2}{x^2}.$$

Zur Bestimmung des minimalen Abstandsquadrates berechnet man die Nullstellen der Ableitung:

$$D'(x) = 4x - \frac{2a^2}{x^3} = 0 \iff 4x^4 - 2a^2 = 0 \iff x = \pm \sqrt[4]{\frac{a^2}{2}} = \pm \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt[4]{2}}.$$

Da für $x \rightarrow \pm\infty$ und für $x \rightarrow 0$ das Abstandsquadrat $D(x)$ unbeschränkt ist, muss es sowohl in $]0, \infty[$ wie in $] -\infty, 0[$ ein Minimum geben. Da es in jedem dieser Bereiche nur eine Nullstelle von D' gibt, liegen dort jeweils Minima vor.

4) a) Die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ sind orthogonal:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 18 + 18 - 36 = 0$$

und haben gleiche Länge

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{9 + 36 + 36} = 9.$$

Wegen $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ ist damit $ABCD$ ein Quadrat der Kantenlänge 9.

Der Punkt E gehört nicht zu der Bodenebene (siehe c)).

b) Für den Höhenfußpunkt gilt: $H \in e(A, B, D)$ und $\overrightarrow{EH} \perp \vec{u}, \vec{v}$:

$$H \in e(A, B, D) \iff \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD}$$

und

$$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{EA} + r\vec{u} + s\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Die Orthogonalitätsbedingungen ergeben die beiden Gleichungen

$$\overrightarrow{EH} \perp \vec{u}, \vec{v} \iff -27 + 81r = 0 \wedge -27 + 81s = 0 \iff r = s = \frac{1}{3}.$$

Wegen $r = s$ liegt H auf der Diagonalen $g(A, C)$:

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

c) Gesucht ist der Punkt $F \in g(A, E)$ mit $\overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{AE}$. Also

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{BF} &= \overrightarrow{BA} + r\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &\iff -27 + 99r = 0 \iff r = \frac{3}{11}. \end{aligned}$$

Damit teilt der Lotfußpunkt die Strecke von A nach E im Verhältnis $3 : 8$.

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Summenfolge

$$s_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende explizite Beschreibung für s_n :

$$s_n = \frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)} \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

b) Zeigen Sie, dass die Folge $(s_n)_{n \geq 2}$ konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

c) Folgern Sie, dass die Folge

$$q_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

konvergent und ihr Grenzwert $q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n \leq \frac{7}{4}$ ist.

[Tip: Versuchen Sie nicht, den Grenzwert von (q_n) exakt zu bestimmen.]

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie für die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{-x^5 - x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 6x + 6}{2x^4 - 6x^2 + 4}$$

alle Lücken und entscheiden Sie, welcher Art sie sind.

b) Bestimmen Sie für jede hebbare Lücke a den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

c) Besitzt f eine Asymptote? Bestimmen Sie ggf. eine Gleichung dafür und untersuchen Sie, ob der Graph die Asymptote schneidet. Wenn ja, bestimmen Sie den Schnittpunkt.

d) Bestimmen Sie die Vorzeichenwechselstellen von f . Schraffieren Sie möglichst große Bereiche der Koordinatenebene, in denen der Graph von f *nicht* verlaufen kann und skizzieren Sie auf der Basis Ihrer Ergebnisse einen möglichen Verlauf des Graphen von f .

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass die ganzrationale Funktion mit Funktionsterm

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x + 1.$$

eine rationale und eine irrationale Nullstelle besitzt, deren Abstand $< 0,05$ ist. Begründen Sie Ihre Überlegungen genau.

Aufgabe 4:

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

(Geben Sie für die falschen Aussagen Gegenbeispiele an.)

- a) Monotone Folgen sind genau dann konvergent, wenn sie beschränkt sind.
- b) Der Grenzwert konvergenter alternierender Folgen ist 0.
- c) Beschränkte konvergente Folgen sind monoton.
- d) Besitzt eine rationale Funktion eine Asymptote, so existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ in \mathbb{R} .
- e) Existiert für eine rationale Funktion f der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ in \mathbb{R} , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Viel Erfolg!

1. Klausur — Lösungen

1) a) Induktionsanfang $n = 1$: Es ist $s_2 = \sum_{k=2}^2 \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{3}$ und $\frac{8}{8 \cdot 3} = \frac{1}{3}$; für $n = 2$ ist die

Behauptung bewiesen.

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ fest.

Induktionsvoraussetzung: $s_n = \frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}$.

Induktionsbehauptung: $s_{n+1} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$.

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1} + \frac{1}{(n+1)^2-1} \\ &\stackrel{(\text{Ind. Vor.})}{=} \frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)} + \frac{1}{n^2+2n} \\ &= \frac{(n-1)(3n+2)(n+2) + 4(n+1)}{4n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n^2+n-2)(3n+2) + 4n+4}{4n(n+1)(n+2)} = \frac{3n^3+5n^2-4n-4+4n+4}{4n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen und die Induktion vollständig.

b) Nach a) erhalten wir

$$s_n = \frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)} = \frac{3n^2-n-2}{4n^2+4n}$$

Dies ist eine rationale Folge in n mit gleichem Zähler- und Nennergrad, also konvergiert sie gegen den Quotienten $\frac{3}{4}$ der führenden Koeffizienten.

Alternativ mit den Grenzwertsätzen:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(3 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2})}{n^2(4 + \frac{4}{n})} = \frac{3-0-0}{4+0} = \frac{3}{4}.$$

c) Es gilt für alle $k \geq 2$: $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2-1}$. Daher gilt für alle $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1} = s_n \leq s.$$

Also gilt für q_n

$$q_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + s = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}.$$

Damit ist q_n nach oben beschränkt. Da q_n streng monoton wächst (alle Summanden sind positiv), folgt aus dem Monotoniesatz: q_n konvergiert und der Grenzwert ist dann notwendig $\leq \frac{7}{4}$.

2) a) Lücken sind die Nullstellen des Nenners:

$$\begin{aligned} 2x^4 - 6x^2 + 4 = 0 &\iff z = x^2 \wedge z^2 - 3z + 2 = 0 \\ &\iff z = x^2 \wedge (z-2)(z-1) = 0 \iff x^2 = 2 \vee x^2 = 1 \\ &\iff x = \pm 1 \vee x = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Damit hat f die Definitionslücken ± 1 und $\pm\sqrt{2}$.

Zugleich erhält man als Faktorisierung des Nenners

$$2x^4 - 6x^2 + 4 = 2(x^2 - 2)(x^2 - 1).$$

Wir überprüfen, welche Lücken auch Nullstellen des Zählers sind. ± 1 sind Nullstellen des Zählers und Polynomdivision ergibt

$$(-x^5 - x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 6x + 6) : (x^2 - 1) = -x^3 - x^2 - 6x - 6.$$

Wir erkennen, dass der kubische Faktor nochmals -1 als Nullstelle hat und erneute Polynomdivision ergibt

$$(x^3 + x^2 + 6x + 6) : (x + 1) = x^2 + 6.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$f(x) = \frac{-(x^2 - 1)(x + 1)(x^2 + 6)}{2(x^2 - 2)(x^2 - 1)} = \frac{-(x^2 + 6)(x + 1)}{2(x^2 - 2)} =: \tilde{f}(x).$$

Damit sind ± 1 keine Lücken von \tilde{f} , folglich hebbare Lücken von f , und $\pm\sqrt{2}$ sind (einfache) Pole von f mit Vorzeichenwechsel.

Wir erkennen auch, dass die hebbare Lücke -1 einzige Nullstelle von \tilde{f} (!) ist, und zwar einfach, mit VZW.

b) Da f und \tilde{f} sich nur an endlich vielen Stellen unterscheiden, sind ihre Grenzwerte überall gleich und wegen der Stetigkeit von \tilde{f} bei ± 1 gleich den Funktionswerten von \tilde{f} :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm 1} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(\pm 1), \\ \tilde{f}(-1) &= 0, \quad \tilde{f}(1) = \frac{-14}{-2} = 7. \end{aligned}$$

c) Da der Zählergrad um 1 größer ist als der Nennergrad, besitzt f eine schräge Asymptote, ihr Anstieg ist $-\frac{1}{2}$. Eine Gleichung für die Asymptote erhält man durch Polynomdivision (für den Funktionsterm $\tilde{f}(x)$):

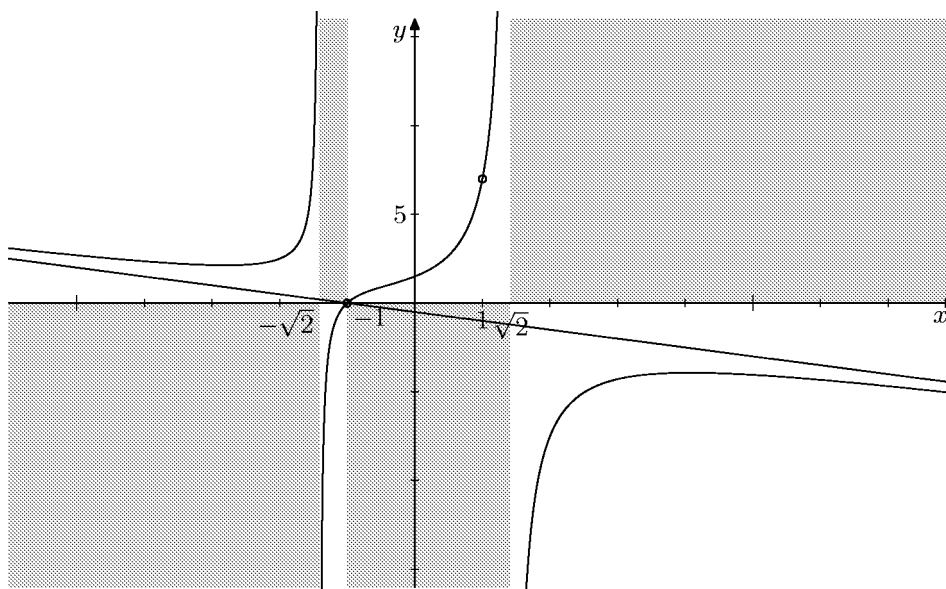
$$\tilde{f}(x) = \frac{-x^3 - x^2 - 6x - 6}{2x^2 - 4} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{4x + 4}{2x^2 - 4}.$$

Damit ist $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ eine Asymptotengleichung und Schnittstellen des Graphen von \tilde{f} und Asymptote sind Nullstellen der Differenz

$$\frac{4x + 4}{2x^2 - 4} = 0 \iff x = -1.$$

Der Graph von \tilde{f} und die Asymptote schneiden sich im Punkt $(-1, 0)$. Dieser Punkt gehört aber gerade nicht zum Graphen von f : Der Graph von f und die Asymptote schneiden sich nicht.

d) f und \tilde{f} haben dieselben Vorzeichenwechselstellen; dies sind die beiden Pole $\pm\sqrt{2}$ und die Nullstelle -1 von \tilde{f} . Da der Quotient der führenden Koeffizienten $-\frac{1}{2}$ ist (bzw. da die Asymptote fällt), sind die Werte von f schließlich (d. h. für $x > \sqrt{2}$) negativ. An den Polen und der hebbaren Lücke -1 wechselt f das Vorzeichen. Dies ergibt die folgenden Schraffuren. Zusammen mit der Asymptote und dem fehlenden Schnittpunkt ergibt sich der folgende mögliche Verlauf des Graphen von f :



Die an den hebbaren Lücken fehlenden Punkte im Graphen von f sind durch kleine Kreise gekennzeichnet.

- 3) Wir bestimmen zunächst alle rationalen Nullstellen von f . Einzig *mögliche* rationale Nullstellen von f sind $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$. Durch Einsetzen stellt man fest: $f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0, f(-\frac{1}{2}) > 0, f(\frac{1}{2}) = 0$. Damit ist die einzige rationale Nullstelle $\frac{1}{2}$.
Polynomdivision durch $(2x - 1)$ ergibt

$$f(x) = (2x - 1)(x^3 + 2x - 1).$$

Der Faktor $g(x) = x^3 + 2x - 1$ kann $\frac{1}{2}$ nicht als Nullstelle haben, da er normiert ist, muss als kubischer Faktor aber eine reelle Nullstelle haben. Diese kann dann aber nicht rational sein.

Wir zeigen nun, dass der kubische Faktor im Intervall $]0,45; 0,55[$ eine Nullstelle besitzt. Diese hat dann von der rationalen Nullstelle $\frac{1}{2}$ den geforderten Abstand $< 0,05$.

Wegen $g(0,45) \approx -0,01 < 0$ und $g(0,55) = 0,27 > 0$ hat g in diesem Intervall

einen Vorzeichenwechsel und als stetige Funktion nach dem Zwischenwertsatz (bzw. Halbierungsmethode) dort auch eine Nullstelle.

- 4) a) Richtig.
b) Richtig.
c) Falsch. Gegenbeispiel: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent (und daher selbstverständlich beschränkt), aber nicht monoton.
d) Falsch. Jede rationale Funktion mit schräger Asymptote ist ein Gegenbeispiel. Konkret: $f(x) = x$ oder $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x - 7}$.
e) Richtig.