

Übungen (1)

- 1) Bestimmen Sie mit Hilfe der Teilbarkeitskriterien möglichst viele Teiler der nachfolgenden Zahlen. Von welchen Zahlen können Sie ausschließen, dass sie Teiler sind?
 $a = 553\,637\,225\,625$, $b = 456\,377\,651\,976$, $c = 239\,598\,267\,287\,400$.
- 2) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegungen der folgenden natürlichen Zahlen:
 $a = 198$ $b = 544$ $c = 1024$
 $d = 2160$ $e = 24750$ $f = 26 \cdot 13^2 \cdot 98 \cdot 170$
 $g = 25^4 \cdot 16^2$ $h = 39^3 \cdot 37^4 \cdot 27^5$
- 3) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von
a) 27, 39 b) 10000, 500 c) 17, 3433
d) 6, 8, 12 e) 9, 30, 50 f) 34, 85, 153
g) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 11$, $2^3 \cdot 3^4 \cdot 13$ h) $6^3 \cdot 28$, $21^2 \cdot 27$ i) $25^3 \cdot 27$, $32 \cdot 18$
- 4) Bestimmen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache von
a) 12, 8 b) 18, 24 c) 12, 20, 30
d) 2, 3, 4, 5, 6 e) 39, 34 f) 16, 25
g) $2^3 \cdot 3 \cdot 17$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ h) $17 \cdot 39$, $34 \cdot 26$ i) $2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^8$, $3^{12} \cdot 5^{12}$
- 5) Stellen Sie die nachfolgenden Zahlen als Produkte von Potenzen mit möglichst kleinen Basen dar:
 $a = 6^{10} \cdot 10^4 \cdot 15^5$, $b = 12^5 \cdot 24^7 \cdot 75^3$, $c = 54^4 \cdot 48^5 \cdot 250^5$, $d = 12^6 \cdot 15^7 \cdot 30^2$.
Stellen Sie fest, welche Teilbarkeiten zwischen diesen Zahlen bestehen.
- 6) Zeigen Sie, dass die folgenden Zahlen Potenzen sind. Mit welcher Basis und welchem Exponenten?
 $a = 14^4 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 6^6 \cdot 21^3$, $b = 49^2 \cdot 51^3 \cdot 75 \cdot 17 \cdot 5^2$, $c = 10^4 \cdot 22^5 \cdot 80 \cdot 2^2$.
- 7) Gegeben sind drei natürliche Zahlen in dualer Darstellung:
 $a = 10101$, $b = 11111$, $c = 1000001$.
a) Berechnen Sie (durch schriftliche Rechnung im Dualsystem) $d = b + c$, $e = c - a$ und $f = a \cdot b$.
b) Stellen Sie alle 6 Zahlen a, b, c, d, e, f dezimal dar und überprüfen Sie Ihre Rechnungen.
- 8) Stellen Sie die folgenden (in üblicher dezimaler Form angegebenen) Zahlen dual dar:
a) 1 bis 9 b) 314 c) 128 d) 255 e) 1000
f) 500 g) 250 h) 13 i) 26 j) 52
- 9) a) Wandeln Sie die Zahlen a, \dots, f von Aufgabe 7) ins Hexadezimalsystem um. Überprüfen Sie in dieser neuen Darstellung die Beziehungen $d = b + c$, $e = c - a$ und $f = a \cdot b$.
b) Erläutern Sie die Vor- und Nachteile der Rechnungen *innerhalb* des Dual-, Dezimal- und Hexadezimalsystems.

Übungen (1) — Lösungen

- 1) a ist nicht durch 2 (oder irgendeine gerade Zahl) teilbar;
 a ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar (da die Quersumme durch 3, aber nicht durch 9 teilbar ist);
 a ist durch 125 (und daher erst recht durch 25 und 5) teilbar, da die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl 625 durch 125 teilbar ist;
 a ist durch 11 teilbar (da die Wechselsumme $5-2+6-5+2-2+7-3+6-3+5-5 = 11$ durch 11 teilbar ist).
 b ist durch 8 teilbar (da $976 = 800 + 160 + 16$ durch 8 teilbar ist);
 b ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar (Quersumme 66);
 b ist nicht durch 5 teilbar;
 b ist nicht durch 11 teilbar (Wechselsumme 4).
 c ist durch 8, 9 und 25 teilbar; c ist nicht durch 11 teilbar.
- 2) $a = 198 = 2 \cdot 99 = 2 \cdot 9 \cdot 11 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$,
 $b = 544 = 4 \cdot 136 = 2^2 \cdot 2 \cdot 68 = 2^3 \cdot 4 \cdot 17 = 2^5 \cdot 17$,
 $c = 1024 = 2^{10}$,
 $d = 10 \cdot 216 = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 24 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$,
 $e = 10 \cdot 5 \cdot 495 = 2 \cdot 5^2 \cdot 5 \cdot 99 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11$,
 $f = 2 \cdot 13 \cdot 13^2 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 10 \cdot 17 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13^3 \cdot 7^2 \cdot 17$,
 $g = (5^2)^4 \cdot (2^4)^2 = 5^8 \cdot 2^8$,
 $h = (3 \cdot 13)^3 \cdot 37^4 \cdot (3^3)^5 = 3^{18} \cdot 13^3 \cdot 37^4$.
- 3) a) $\text{ggT}(27, 39) = \text{ggT}(3^3, 3 \cdot 13) = 3$.
b) $\text{ggT}(10000, 500) = 500$.
c) $\text{ggT}(17, 3433) = 1$, da 17 eine Primzahl ist und 3433 nicht teilt.
d) $\text{ggT}(6, 8, 12) = \text{ggT}(2 \cdot 3, 2^3, 2^2 \cdot 3) = 2$.
e) $\text{ggT}(9, 30, 50) = 1$, da $9 = 3^2$ und 3 kein Teiler von 50 ist.
f) $\text{ggT}(34, 85, 153) = \text{ggT}(2 \cdot 17, 5 \cdot 17, 9 \cdot 17) = 17$.
g) $\text{ggT}(2^4 \cdot 3^3 \cdot 11, 2^3 \cdot 3^4 \cdot 13) = 2^3 \cdot 3^3 = 216$.
h) $\text{ggT}(6^3 \cdot 28, 21^2 \cdot 27) = \text{ggT}(2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 7, 3^2 \cdot 7^2 \cdot 3^3) = \text{ggT}(2^5 \cdot 3^3 \cdot 7, 3^5 \cdot 7^2) = 3^3 \cdot 7 = 189$.
i) $\text{ggT}(25^3 \cdot 27, 32 \cdot 18) = \text{ggT}(5^6 \cdot 3^3, 2^5 \cdot 2 \cdot 3^2) = 3^2 = 9$.
- 4) a) $\text{kgV}(12, 8) = \text{kgV}(2^2 \cdot 3, 2^3) = 2^3 \cdot 3 = 24$.
b) $\text{kgV}(18, 24) = \text{kgV}(2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.
c) $\text{kgV}(12, 20, 30) = \text{kgV}(2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.
d) $\text{kgV}(2, 3, 4, 5, 6) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
e) $\text{kgV}(39, 34) = 39 \cdot 34 = 1326$, da 39 und 34 keinen Primteiler gemeinsam haben (teilerfremd sind).
f) $\text{kgV}(16, 25) = 16 \cdot 25 = 400$, da 16 und 25 teilerfremd sind.
g) $\text{kgV}(2^3 \cdot 3 \cdot 17, 2^2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 2040$.
h) $\text{kgV}(17 \cdot 39, 34 \cdot 26) = \text{kgV}(3 \cdot 13 \cdot 17, 2 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 13) = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 = 2652$.
i) $\text{kgV}(2^{10} \cdot 3^3 \cdot 2^8 \cdot 5^8, 3^{12} \cdot 5^{12}) = \text{kgV}(2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5^8, 3^{12} \cdot 5^{12}) = 2^{18} \cdot 3^{12} \cdot 5^{12} = 2^6 \cdot 3^{12} \cdot (2 \cdot 5)^{12} = 34012224 \cdot 10^{12} = 34012224000000000000$.
- 5) $a = 6^{10} \cdot 10^4 \cdot 15^5 = (2 \cdot 3)^{10} \cdot (2 \cdot 5)^4 \cdot (3 \cdot 5)^5 = 2^{10+4} \cdot 3^{10+5} \cdot 5^{4+5} = 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^9$.
 $b = 12^5 \cdot 24^7 \cdot 75^3 = (2^2 \cdot 3)^5 \cdot (2^3 \cdot 3)^7 \cdot (3 \cdot 5^2)^3 = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 2^{21} \cdot 3^7 \cdot 3^3 \cdot 5^6 = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^6$.
 $c = 54^4 \cdot 48^5 \cdot 250^5 = (2 \cdot 3^3)^4 \cdot (2^4 \cdot 3)^5 \cdot (2 \cdot 5^3)^5 = 2^{4+20+5} \cdot 3^{12+5} \cdot 5^{15} = 2^{29} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$.
 $d = 12^6 \cdot 15^7 \cdot 30^2 = (2^2 \cdot 3)^6 \cdot (3 \cdot 5)^7 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^9$.

Offenbar ist $d = a$, insbesondere teilen sich a und d *gegenseitig*.

a teilt c , weil die Exponenten in der Darstellung von a *sämtlich* kleiner oder gleich den entsprechenden Exponenten in der Darstellung von c sind. b ist weder Teiler noch Vielfaches einer der anderen Zahlen.

$$6) \quad a = 2^4 \cdot 7^4 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 2^6 \cdot 3^6 \cdot 3^3 \cdot 7^3 = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 7^{10} = 42^{10},$$

$$b = 7^4 \cdot 3^3 \cdot 17^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 5^2 = 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 17^4 = (3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17)^4 = 1785^4,$$

$$c = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 2^5 \cdot 11^5 \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot 2^2 = 2^{15} \cdot 5^5 \cdot 11^5 = 8^5 \cdot 5^5 \cdot 11^5 = 440^5.$$

Die Frage, ob eine natürliche Zahl eine Potenz ist, kann man also an der Primzerlegung ablesen.

- Eine natürliche Zahl ist genau dann k -te Potenz einer natürlichen Zahl, wenn in ihrer Primzerlegung *alle* Exponenten Vielfache von k sind.

7) a) Bei der schriftlichen Addition bzw. Subtraktion im Dualsystem beachte man: $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ mit *Übertrag 1*.

$$d = b + c: \quad e = c - a: \quad f = a \cdot b:$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \\ + \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{0} \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{1} \\ - \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{0} \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{1} \mathbf{1} \end{array}$$

b) Wir wandeln in dezimale Darstellung um:

$$a = \mathbf{10101} = 1 + 4 + 16 = 21,$$

$$b = \mathbf{11111} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31,$$

$$c = \mathbf{1000001} = 1 + 64 = 65,$$

$$d = \mathbf{1100000} = 32 + 64 = 96 (= b + c),$$

$$e = \mathbf{101100} = 4 + 8 + 32 = 44 (= c - a),$$

$$f = \mathbf{1010001011} = 1 + 2 + 8 + 128 + 512 = 651 (= a \cdot b).$$

8) a) $1 = \mathbf{1}$, $2 = \mathbf{10}$, $3 = \mathbf{11}$, $4 = \mathbf{100}$, $5 = \mathbf{101}$, $6 = \mathbf{110}$, $7 = \mathbf{111}$, $8 = \mathbf{1000}$, $9 = \mathbf{1001}$

b) Methode 1 – In Zweierpotenzen zerlegen:

$$314 = 256 + 58 = 256 + 32 + 26 = 256 + 32 + 16 + 10 = 256 + 32 + 16 + 8 + 2 = 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2 = \mathbf{100111010}$$

Methode 2 – Halbieren mit Rest:

$$\begin{array}{r} \text{halbierte Zahlen } 0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 9 \leftarrow 19 \leftarrow 39 \leftarrow 78 \leftarrow 157 \leftarrow 314 \\ \hline \text{Rest=Dualziffer} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \end{array}$$

c) $128 = \mathbf{10000000}$

d) $255 = \mathbf{11111111}$

e) $1000 = 8 \cdot 125 = \mathbf{1000} \cdot \mathbf{1111101} = \mathbf{1111101000}$

f) $500 = 1000 : 2 = \mathbf{1111101000} : \mathbf{10} = \mathbf{111110100}$

g) $250 = \mathbf{11111010}$

h) $13 = \mathbf{1101}$

i) $26 = 13 \cdot 2 = \mathbf{1101} \cdot \mathbf{10} = \mathbf{11010}$

j) $52 = \mathbf{110100}$

9) a) Da die Basis des Hexadezimalsystems $16 = 2^4$ ist, kann man je 4 Dualziffern zu einer Hexadezimal-Ziffer zusammenfassen. (Man braucht also nur die Umwandlung von 4-stelligen Dualzahlen in Hexadezimalziffern zu beherrschen, etwa indem man eine Liste dafür anlegt.) Daher ist die Umwandlung zwischen diesen beiden Zahlendarstellungen besonders einfach. (Dies ist der Grund dafür, dass in Computern über dem zugrundeliegenden Dualsystem meist mit Zahlendarstellungen auf Zweierpotenz-Basis gearbeitet wird.)

Wir unterteilen also die Dualdarstellungen von a, \dots, f in Viererblöcke und wandeln diese in Hexadezimalziffern um:

$$a = | 0101: \quad 0101 = 1 + 4 = 5 = 5_h, \text{ also } a = 15_h,$$

$$b = | 1111: \quad 1111 = 15 = F_h, \text{ also } b = 1F_h,$$

$$c = 100\ 0001: \quad 0001 = 1 = 1_h, \ 100 = 4 = 4_h, \text{ also } c = 41_h,$$

$$d = b + c = 1F_h + 41_h = 60_h,$$

$$e = c - a = 41_h - 15_h = 2C_h,$$

$$f = a \cdot b = 15_h \cdot 1F_h. \text{ Um dies im Hexadezimalsystem be-}$$

rechnen zu können, muss man das 'kleine Einmaleins' für

die hexadezimalen Ziffern aufstellen. So etwa benötigt man

für die nebenstehende Rechnung: $5_h \cdot F_h = 5 \cdot 15 = 75 =$

$4 \cdot 16 + 11 = 4B_h$. Man erhält schließlich $f = 28B_h$. (Kontrol-

le: $f = 28B_h = 2 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16 + 11 = 2 \cdot 256 + 128 + 11 = 512 + 139 = 651$.)

b) Im Dualsystem haben die Zahlen viermal soviel Ziffern wie im Hexadezimalsystem, dafür ist aber die Addition und besonders die Multiplikation der Dualziffern wesentlich einfacher. So einfach, dass sie in einem Microprozessor realisiert werden können.

$$\begin{array}{r} 15 \cdot 1F \\ \hline 15 \\ 13B \\ \hline 28B \end{array}$$