Übungen (2)

1) Beschreiben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form:
   a) die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen,
   b) die Menge der zweistelligen durch sieben teilbaren Zahlen,
   c) die Menge T_{60} der Teiler von 60,
   d) die Menge der arabischen Ziffern,
   e) die Menge der Zweierpotenzen.
   Welche der Mengen sind endlich, welche unendlich?
2) Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch eine charakteristische Eigenschaft:
   a) $A = \{4, 8, 12, 16, \ldots\}$,
   b) $B = \{10, 100, 1000, 10000, \ldots\}$,
   c) $C = \{6, 12, 18, 24, \ldots\}$,
   d) $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,
   e) $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$,
   f) $F = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.
3) Es sei Q die Menge der Quadratzahlen und $\mathcal{P}$ die Menge der Primzahlen.
   a) Geben Sie an, welche der folgenden Zahlen

$$1\,,4\,,5\,,6\,,9\,,12\,,24\,,25\,,27\,,1234544554355$$

   zu diesen Mengen gehören und welche nicht. Verwenden Sie dabei die mathematischen Symbole $\in$ und $\notin$.
   b) Welche Zahlen gehören zu beiden Mengen?
4) Welche der nachfolgenden Formulierungen sind Aussagen (im Sinne der Mathematik)? Geben Sie wenn möglich an, welche wahr sind und welche falsch.
   a) Es gibt Säugetiere, die fliegen können.
   b) Guten Tag!
   c) Es gibt Vögel, die nicht fliegen können.
   d) $18 + 12$.
   e) 1133 ist durch 9 teilbar.
   f) Wer bist du?
   g) $8 \cdot 13 = 104$.
   h) 36 hat 12 Teiler.
   i) Der 1. April 1965.
   j) Es gibt eine Primzahl, deren Dezimaldarstellung auf 51 endet.
   k) Es gibt eine Primzahl, deren Dezimaldarstellung auf 15 endet.
   l) Es gibt eine Zahl, die halb so groß ist wie die Summe ihrer Teiler.
   m) Es gibt eine ungerade Zahl, die halb so groß ist wie die Summe ihrer Teiler.

5) Welche der nachfolgenden Formulierungen sind Aussageformen? Geben Sie wenn möglich Einsetzungen an, die sie erfüllen ('wahr machen').
a) ... liegt am Rhein.
b) Hannover liegt an der .... .
c) Frohe ... !
d) $\ldots + 37 = .$
e) $x + 15 = y - 13$.
f) ... hat einen schiefen Turm.
g) $5x$ ist größer.
h) ... ist ein Raubfisch.

6) Bestimmen Sie für die folgenden Aussageformen $A(x)$ die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{N}$ (in aufzählender Form).
a) x ist ein Teiler von 40.
b) x ist durch 3 und 5 teilbar.
c) x ist eine gerade Primzahl.
d) x ist kleiner als 1.
e) $10 - x$ ist eine durch drei teilbare natürliche Zahl.
f) $2x < 17$ und $3x > 6$.

7) Es seien A, B und C irgendwelche Aussagen. Beschreiben Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe der logischen Symbole:
a) Weder A noch B sind wahr.
b) Sowohl A als auch eine der Aussagen B, C ist wahr.
c) Die Aussagen A, B sind nicht beide wahr.
d) Die Aussagen A, B sind beide nicht wahr.
e) Mindestens eine der drei Aussagen ist falsch.
f) Nicht alle drei Aussagen sind wahr.

8) Bestimmen Sie für die in Aufgabe 2) gegebenen Mengen $A, \ldots, F$ die nachfolgend gebildeten Mengen: $A \cup B$, $A \cap C$, $C \cap E$, $D \setminus E$, $E \setminus D$, $E \cap F$. Beschreiben Sie die Mengen in aufzählender Form und geben Sie Beschreibungen durch Aussageformen an.

Übungen (2) — Lösungen

1) a) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$,
b) $\{14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}$,
c) $T_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$,
d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
e) $\{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\} = \{2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots\}$.
Die Mengen unter a) und e) sind unendlich, die anderen endlich.

2) a) A ist die Menge der Vielfachen von 4.
b) B ist die Menge der Potenzen von 10.
c) C ist die Menge der durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen.
d) D ist die Menge der Teiler von 12.
e) E soll die Menge aller Primzahlen darstellen, und
f) F die Menge aller Quadrate von natürlichen Zahlen.

3) Von der letzten Zahl 1234544554355 abgesehen gilt:

$$1 \in Q\,, 4 \in Q\,, 5 \notin Q\,, 6 \notin Q\,, 9 \in Q\,, 12 \notin Q\,, 24 \notin Q\,, 25 \in Q\,, 27 \notin Q\,,$$
$$1 \notin \mathcal{P}\,, 4 \notin \mathcal{P}\,, 5 \in \mathcal{P}\,, 6 \notin \mathcal{P}\,, 9 \notin \mathcal{P}\,, 12 \notin \mathcal{P}\,, 24 \notin \mathcal{P}\,, 25 \notin \mathcal{P}\,, 27 \notin \mathcal{P}\,.$$

Schließlich gilt:
$$1234544554355 \notin Q\,,\ \ 1234544554355 \notin \mathcal{P}\,.$$

Zur Begründung: Diese Zahl ist offensichtlich durch 5 teilbar, aber von 5 verschieden, ist also keine Primzahl. Wäre sie eine Quadratzahl, so müsste sie nicht nur durch 5, sondern dann sogar durch 25 teilbar sein. Dies ist aber nicht der Fall, weil die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl nicht durch 25 teilbar ist. Also kann 1234544554355 keine Quadratzahl sein.
b) Keine. (Eine Quadratzahl kann keine Primzahl sein.)

4) a) Ist eine Aussage; ist wahr (Fledermäuse).
b) Keine Aussage.
c) Ist eine Aussage; ist wahr (Pinguine).
d) Keine Aussage.
e) Ist eine Aussage; ist falsch.
f) Keine Aussage.
g) Ist eine Aussage; ist wahr.
h) Ist eine Aussage; ist falsch (36 hat 9 Teiler).
i) Keine Aussage.
j) Ist eine Aussage; ist wahr (151 ist eine Primzahl).
k) Ist eine Aussage; ist falsch (Zahl ist durch 5 teilbar, aber $\neq 5$).
l) Ist eine Aussage; ist wahr (die Zahl 6 hat die Teilersumme $1 + 2 + 3 + 6 = 12$).
m) Ist eine Aussage; Wahrheitswert ist nicht bekannt! (Ein offenes Problem der Mathematik.)

5) a) ist eine Aussageform; ‘Köln’, ‘Düsseldorf’ sind Lösungen.
b) ist eine Aussageform; ‘Leine’ ist die einzige Lösung.
c) Keine Aussageform.
d) Keine Aussageform.
e) ist eine Aussageform; bei Einsetzung $x = 7$, $y = 35$ ist diese Aussageform erfüllt.

(Aber auch bei vielen anderen Einsetzungen.)
f) Ist eine Aussageform; ‘Pisa’ ist eine Lösung.
g) Keine Aussageform.
h) ist eine Aussageform; ‘Piranha’, ‘Hai’ sind Lösungen.

6) a) $\mathbb{L} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$,
b) $\mathbb{L} = \{15, 30, 45, 60, \ldots\}$,
c) $\mathbb{L} = \{2\}$,
d) $\mathbb{L} = \emptyset$,
e) $\mathbb{L} = \{1, 4, 7\}$,
f) $\mathbb{L} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

7) a) $\neg A \wedge \neg B$,
b) $A \wedge (B \vee C)$,
c) $\neg(A \wedge B)$,
d) $\neg A \wedge \neg B$,
e) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$,
f) $\neg(A \wedge B \wedge C)$.

8) Da 10 die einzige nicht durch 4 teilbare Zahl in B ist, gilt $A \cup B = A \cup \{10\} = \{4, 8, 10, 12, 16, 20, 24, 28, \ldots\}$; Menge aller Vielfachen von 4 erweitert um die Zahl 10.
$A \cap C = \{12, 24, 36, 48, 60, \ldots\}$; Menge aller gemeinsamen Vielfachen von 4 und 6. Dies sind gerade die Vielfachen des $\mathrm{kgV}(4, 6) = 12$.
$C \cap E$ ist die Menge aller Primzahlen, die Vielfache von 6 sind, und solche gibt es nicht, also $C \cap E = \emptyset$.
$D \setminus E = \{1, 4, 6, 12\}$.
$E \setminus D = \{5, 7, 11, 13, \ldots\}$; Menge aller Primzahlen größer gleich 5.
$E \cap F$ besteht aus allen Primzahlen, die zugleich Quadratzahlen sind, und solche gibt es nicht. (Siehe Aufgabe 3). Also: $E \cap F = \emptyset$.