Übungen (4)

Lösen Sie die nachfolgenden (Un)Gleichungen über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen:

1) $9x = 13 + (6x - 13)$
2) $8(3z - 20) = 4(6z - 40)$
3) $(x - 3)(x - 5) > (x - 2)(x - 6)$
4) $5(3x - 1) = 3(5x - 2)$
5) $(x + 6)(x + 1) < (x + 2)(x + 4)$
6) $(2x - 4)(x + 5) > (x - 3)(2x + 5)$
7) $(4 - 3x)(4x - 7) \leq (2x + 5)(7 - 6x)$
8) Stellen Sie die folgenden Terme *ohne* Betragszeichen mit geeigneten Fallunterscheidungen dar:
   a) $|x - 3|$ b) $|x| - 3$
   c) $\left||x|^2 - 1\right|$ d) $||x| - 1| - 3$
   e) $|(|x| - 1)(|x| + 1)|$
9) Lösen Sie die folgenden Betrags(un)gleichungen:
   a) $|x| - 3 = x - 5$, b) $|x - 3| + 4 = 7 - x$,
   c) $\big||x| - 1\big| = 5$. d) $|x - 3| \leq 4$,
   e) $|x + 1| > x - 4$.

Übertragen Sie die nachfolgenden Fragen zunächst in (Un)Gleichungen für die gesuchte(n) Zahl(en). Formulieren Sie diesen *Ansatz* so dicht wie möglich am Text der Aufgabe. Beantworten Sie dann die gestellten Fragen.

10) Von welcher Zahl ist das 3-fache um 4 größer als das 5-fache?
11) Bei welchen 5 aufeinanderfolgenden Zahlen ist die Summe viermal so groß wie die Summe der beiden kleinsten dieser Zahlen?

Lösen Sie die folgenden (Un)Gleichungen mit Formvariablen (*Parametern*). Beachten Sie alle notwendigen Fallunterscheidungen.

12) a) $3x + 4a = 5x + 8a$, b) $(x + a)(a - 2) < (x - a)(a + 2)$.
13) $(x - a)(a + 2) + 4a = 2(x - a)$
14) $6(4x + a) = 8(3x + a)$
15) a) $ax = a$, b) $ax = 1$.
16) a) $ax < a$, b) $a^2x < a^2$, c) $ax < x$

Übungen (4) — Lösungen

1)
$$\begin{aligned} & 9x = 13 + (6x - 13) & \\ \iff & 9x = 6x & \mid -6x \\ \iff & 3x = 0 & \mid : 3 \\ \iff & x = 0 & \\ \text{Also: } & \mathbb{L} = \{0\} & \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} & 8(3z - 20) = 4(6z - 40) & \\ \iff & 24z - 160 = 24z - 160 & \mid -24z + 160 \\ \iff & 0 = 0 & \end{aligned}$$

Da die letzte Gleichung wahr ist, ist (wegen der Äquivalenz) auch die erste immer wahr. Das bedeutet, alle Zahlen sind Lösungen: $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.

3)
$$\begin{aligned} & (x-3)(x-5) > (x-2)(x-6) & \\ \iff & x^2 - 3x - 5x + 15 > x^2 - 2x - 6x + 12 & \mid -x^2 \\ \iff & -8x + 15 > -8x + 12 & \mid +8x \\ \iff & 15 > 12 & \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung wahr ist, ist auch die erste immer wahr, also $L = \mathbb{Q}$.

4)
$$\begin{aligned} & 5(3x - 1) = 3(5x - 2) & \\ \iff & 15x - 5 = 15x - 6 & \mid -15x \\ \iff & -5 = -6 & \end{aligned}$$

Da die letzte Gleichung falsch ist, ist (wegen der Äquivalenz) auch die erste immer falsch. Das bedeutet, sie hat keine Lösung: $\mathbb{L} = \emptyset$.

5)
$$\begin{aligned} & (x+6)(x+1) < (x+2)(x+4) & \\ \iff & x^2 + 7x + 6 < x^2 + 6x + 8 & \mid -x^2 - 6x - 6 \\ \iff & x < 2 & \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\} =]-\infty; 2[$.

6)
$$\begin{aligned} & (2x-4)(x+5) > (x-3)(2x+5) & \\ \iff & 2x^2 + 6x - 20 > 2x^2 - x - 15 & \mid -2x^2 + x + 20 \\ \iff & 7x > 5 & \mid : 7 (> 0!) \\ \iff & x > \tfrac{5}{7} & \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{5}{7}\} = \left]\frac{5}{7}; \infty\right[$.

7)
$$\begin{aligned} & (4-3x)(4x-7) \le (2x+5)(7-6x) & \\ \iff & -12x^2 + 37x - 28 \le -12x^2 - 16x + 35 & \mid +12x^2 + 16x + 28 \\ \iff & 53x \le 63 & \mid : 53 (> 0!) \\ \iff & x \le \tfrac{63}{53} & \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \le \frac{63}{53}\} = \left]-\infty; \frac{63}{53}\right]$.

8) a) $|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{falls } x \ge 3, \\ 3 - x & \text{falls } x < 3. \end{cases}$

b) $|x| - 3 = \begin{cases} x - 3 & \text{falls } x \ge 0, \\ -x - 3 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$

c) Zunächst ist wegen $|x|^2 = x^2$

$$\left| |x|^2 - 1 \right| = \left| x^2 - 1 \right| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{falls } x^2 \ge 1, \\ 1 - x^2 & \text{falls } x^2 < 1. \end{cases}$$

Man muss nun die Ungleichungen $x^2 - 1 \geq 0$ bzw. $x^2 - 1 < 0$ untersuchen. $x^2 - 1 = (x+1)(x-1) < 0$ ist genau dann erfüllt, wenn einer der Faktoren $x+1$ oder $x-1$ negativ ist:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 < 0 &\iff (x+1 > 0 \ \wedge \ x-1 < 0) \ \vee \ (x+1 < 0 \ \wedge \ x-1 > 0) \\ &\iff (x > -1 \ \wedge \ x < 1) \ \vee \ (x < -1 \ \wedge \ x > +1) \\ &\iff -1 < x < 1\,. \end{aligned}$$

[Die Aussage $x < -1 \ \wedge \ x > 1$ in der letzten Disjunktion kann nicht zutreffen, da sie den Widerspruch $1 < -1$ impliziert.]
Also erhält man im Falle c) folgende endgültige Beschreibung des gegebenen Terms:

$$\begin{cases} x^2 - 1 & \text{falls } x \leq -1 \ \vee \ x \geq +1, \\ 1 - x^2 & \text{falls } -1 < x < 1. \end{cases}$$

d) Wir müssen zunächst das Vorzeichen des Terms $|x| - 1$ untersuchen:

$$|x| - 1 \geq 0 \iff |x| \geq 1 \iff x \geq 1 \ \vee \ x \leq -1\,.$$

Damit ergibt sich für den gegebenen vollständigen Term

$$\big|\,|x| - 1\big| - 3 = \begin{cases} |x| - 4 & \text{falls } x \geq 1 \ \vee \ x \leq -1, \\ -|x| - 2 & \text{falls } -1 < x < 1, \end{cases} = \begin{cases} x - 4 & \text{falls } x \geq 1, \\ -x - 4 & \text{falls } x \leq -1, \\ -x - 2 & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ x - 2 & \text{falls } -1 < x < 0. \end{cases}$$

e) ist identisch mit c).

9) Wir unterscheiden jeweils die durch die Betragsterme vorgezeichneten Fälle und lösen die Gleichungen dafür getrennt:

a)
$$\begin{aligned} |x| - 3 = x - 5 &\iff (x \geq 0 \ \wedge \ x - 3 = x - 5) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ -x - 3 = x - 5) \\ &\iff (x \geq 0 \ \wedge \ -3 = -5) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ 2 = 2x) \\ &\iff (x \geq 0 \ \wedge \ -3 = -5) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ x = 1) \end{aligned}$$

Da beide Teilaussagen der Disjunktion Widersprüche darstellen, ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

b)
$$\begin{aligned} & |x - 3| + 4 = 7 - x \\ \iff & (x - 3 \geq 0 \ \wedge \ x - 3 + 4 = 7 - x) \ \vee \ (x - 3 < 0 \ \wedge \ 3 - x + 4 = 7 - x) \\ \iff & (x \geq 3 \ \wedge \ 2x = 6) \ \vee \ (x < 3 \ \wedge \ 7 - x = 7 - x) \\ \iff & x = 3 \ \vee \ x < 3 \iff x \leq 3\,. \end{aligned}$$

Damit folgt $\mathbb{L} = \,]-\infty, 3]$.
Alternative: Man kann die Lösung von b) auch etwas weniger formal aufschreiben, indem man die auftretenden Fälle getrennt untersucht:
Fall 1: $x - 3 \geq 0$, also $x \geq 3$: Für diese x gilt: b) $\iff x - 3 + 4 = 7 - x \iff 2x = 6 \iff x = 3$. Dies ergibt über der Grundmenge $G_1 = [3, \infty[$ die Lösungsmenge $\mathbb{L}_1 = \{3\}$.
Fall 2: $x - 3 < 0$, also $x < 3$: Dann gilt b) $\iff -(x-3) + 4 = 7 - x \iff 7 = 7$. Dies ergibt im zweiten Fall über der Grundmenge $G_2 = \,]-\infty, 3[$ die Lösungsmenge

$\mathbb{L}_2 = G_2 =]-\infty, 3[$.
Die gesamte Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist nun die Vereinigung der beiden Lösungsmengen

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{3\} \cup]-\infty, 3[=]-\infty, 3] \ .$$

Wie man sieht, kommt man zu demselben Ergebnis (wie es ja sein muss, wenn man keinen Fehler gemacht hat), jedoch ist der Schreibaufwand höher und man darf nicht die Übersicht über die einzelnen Fälle verlieren.

c) Hier sind wegen der zwei Betragsterme insgesamt 4 Fälle notwendig:
Fall 1.1: $x \geq 0 \ \wedge \ x - 1 \geq 0$, also $x \geq 1$, $G_{1.1} = [1, \infty[$. In diesem Falle gilt:
c) $\iff x - 1 = 5 \iff x = 6$. Wegen $6 \in G_{1.1}$ folgt $\mathbb{L}_{1.1} = \{6\}$.
Fall 1.2: $x \geq 0 \ \wedge \ x - 1 < 0$, also $0 \leq x < 1$, $G_{1.2} = [0, 1[$. Hier gilt:
c) $\iff 1 - x = 5 \iff x = -4$. Wegen $-4 \notin G_{1.2}$ folgt: $L_{1.2} = \emptyset$.
Fall 2.1: $x < 0 \ \wedge \ -x - 1 \geq 0$, also $x \leq -1$, $G_{2.1} =] - \infty, -1]$. Hier gilt:
c) $\iff -x - 1 = 5 \iff x = -6$: $\mathbb{L}_{2.1} = \{-6\}$.
Fall 2.2: $x < 0 \ \wedge \ -x - 1 < 0$, also $-1 < x < 0$, $G_{2.2} =] - 1, 0[$. Hier gilt:
c) $\iff x + 1 = 5 \iff x = 4$. Wegen $4 \notin G_{2.2}$ ist $\mathbb{L}_{2.2} = \emptyset$.
Insgesamt ergibt sich als Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-6, 6\}$.
Die Lösung derselben Aufgabe unter Verwendung logischer Verknüpfungen sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
&\big||x| - 1\big| = 5 \\
&\iff (x \geq 0 \ \wedge \ |x - 1| = 5) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ |-x - 1| = 5) \\
&\iff (x \geq 0 \ \wedge \ x - 1 \geq 0 \ \wedge \ x - 1 = 5) \\
&\qquad \vee \ (x \geq 0 \ \wedge \ x - 1 < 0 \ \wedge \ -(x - 1) = 5) \\
&\qquad \vee \ (x < 0 \ \wedge \ -x - 1 \geq 0 \ \wedge \ -x - 1 = 5) \\
&\qquad \vee \ (x < 0 \ \wedge \ -x - 1 < 0 \ \wedge \ x + 1 = 5) \\
&\iff (x \geq 0 \ \wedge \ x \geq 1 \ \wedge \ x = 6) \ \vee \ (x \geq 0 \ \wedge \ x < 1 \ \wedge \ x = -4) \\
&\qquad \vee \ (x < 0 \ \wedge \ x \leq -1 \ \wedge \ x = -6) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ x > -1 \ \wedge \ x = 4) \\
&\iff x = 6 \ \vee \ x = -6
\end{aligned}$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned}
&|x - 3| \leq 4 \iff \big(x - 3 \geq 0 \ \wedge \ x - 3 \leq 4\big) \ \vee \ \big(x - 3 < 0 \ \wedge \ -(x - 3) \leq 4\big) \\
&\iff \big(x \geq 3 \ \wedge \ x \leq 7\big) \ \vee \ \big(x < 3 \ \wedge \ -x \leq 1\big) \\
&\iff 3 \leq x \leq 7 \ \vee \ -1 \leq x < 3 \iff -1 \leq x \leq 7
\end{aligned}$$

und wir erhalten als Lösungsmenge das geschlossene Intervall $\mathbb{L} = [-1, 7]$.

e) Hier gilt:

$$\begin{aligned}
&|x + 1| > x + 4 \\
&\iff \big(x + 1 \geq 0 \ \wedge \ x + 1 > x + 4\big) \ \vee \ \big(x + 1 < 0 \ \wedge \ -(x + 1) > x + 4\big) \\
&\iff \big(x \geq -1 \ \wedge \ 1 > 4\big) \ \vee \ \big(x < -1 \ \wedge \ -5 > 2x\big) \\
&\iff x < -1 \ \wedge \ x < \frac{-5}{2} \iff x < -1 \, .
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathbb{L} =]-\infty, -1[$.

10) Die gesuchte Zahl nennen wir x. Die Forderungen der Aufgabenstellung lauten dann: $3x = 5x + 4$. Wir lösen nun diese Gleichung:

$$\begin{aligned} && 3x &= 5x + 4 && \mid -5x \\ \iff && -2x &= 4 && \mid :(-2) \\ \iff && x &= -2 \end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl ist -2.

11) Hier ist nach 5 Zahlen gefragt. Da diese aber aufeinanderfolgen sollen, genügt es die kleinste davon zu kennen; nennen wir sie x. Dann sind die anderen $x+1$, $x+2$, $x+3$ und $x+4$. Die gesuchte Zahl x muss also die folgende Gleichung erfüllen:

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 4(x + (x+1))\,.$$

$$\begin{aligned} && x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) &= 4(x + (x+1)) \\ \iff && 5x + 10 &= 8x + 4 && \mid -5x - 4 \\ \iff && 6 &= 3x && \mid :2 \\ \iff && 2 &= x \end{aligned}$$

Die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen sind 2, 3, 4, 5 und 6.

Parameteraufgaben löst man zunächst genauso wie solche ohne Parameter. Man muss hier nun jedoch besonders genau darauf achten, ob die beabsichtigten Umformungen auch tatsächlich Äquivalenzumformungen sind. In Aufgabe 14) ist dies noch problemlos. Aber ab Aufgabe 15) muss man im Laufe der Rechnung durch Terme dividieren, von denen nicht immer gesichert ist, dass sie $\neq 0$ sind (bzw. bei Ungleichungen, dass sie > 0 sind). Man ist dann gezwungen verschiedene *Fälle* bezüglich des Parameters a zu *unterscheiden.* [1)]

12) a)

$$\begin{aligned} && 3x + 4a &= 5x + 8a && \mid -3x - 8a \\ \iff && -4a &= 2x && \mid :2 (\neq 0) \\ \iff && -2a &= x \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{-2a\}$.

b)

$$\begin{aligned} && (x+a)(a-2) &< (x-a)(a+2) \\ \iff && xa + a^2 - 2x - 2a &< ax - a^2 + 2x - 2a && \mid -ax + 2x + a^2 + 2a \\ \iff && 2a^2 &< 4x && \mid :4\,(> 0!) \\ \iff && \tfrac{a^2}{2} &< x \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{a^2}{2}\} = \left]\frac{a^2}{2}; \infty\right[$.

13)

$$\begin{aligned} && (x-a)(a+2) + 4a &= 2(x-a) \\ \iff && ax - a^2 + 2x - 2a + 4a &= 2x - 2a && \mid -2x + a^2 - 2a \\ \iff && ax &= a^2 - 4a && (*) \end{aligned}$$

Die jetzt üblicherweise anstehende Division durch a (um x zu 'isolieren') ist aber nur möglich, wenn $a \neq 0$ ist. Wir müssen also die beiden Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$ unterscheiden:

[1)] Beachten Sie, dass sich hier die Fallunterscheidungen auf den Parameter a beziehen und nicht auf die Unbekannte x (wie in der Aufgabe 9). Dies bedeutet, dass man nicht die Grundmenge einschränkt und dann verschiedene Teillösungsmengen erhält, die man am Ende vereinigen muss, sondern dass man für verschiedene Gleichungen jeweils die komplette Lösungsmenge bestimmt, die dann von dem betrachteten Fall abhängt.

1. Fall: $a = 0$.
Dann lautet die Gleichung $(*)$:

$$\begin{aligned} (*) \quad 0 \cdot x &= 0^2 - 4 \cdot 0 \\ \iff \quad 0 &= 0 \\ \mathbb{L} &= \mathbb{Q}\,. \end{aligned}$$

2. Fall: $a \neq 0$.
In diesem Falle können wir bei $(*)$ mit einer Division durch a fortfahren:

$$\begin{aligned} (*) \quad ax &= a^2 - 4a \quad | : a\,(\neq 0!) \\ \iff \quad x &= \tfrac{a^2-4a}{a} \\ \iff \quad x &= a - 4 \\ \text{Also:} \quad \mathbb{L} &= \{a-4\} \end{aligned}$$

Damit ist in beiden Fällen die Lösungsmenge bestimmt worden. Zusammengefasst:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{falls } a = 0, \\ \{a-4\} & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$$

14)
$$\begin{aligned} 6(4x+a) &= 8(3x+a) \\ \iff \quad 24x + 6a &= 24x + 8a \quad | -24x - 6a \\ \iff \quad 0 &= 2a \end{aligned}$$

Die Ausgangsgleichung hat also für alle x denselben Wahrheitswert wie die letzte Gleichung $2a = 0$. Deren Wahrheitswert hängt nun vom Wert von a ab:

1. Fall: $a = 0$.
Dann ist die letzte Gleichung, also auch die erste wahr; das heißt $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.

2. Fall: $a \neq 0$.
Dann ist die letzte Gleichung falsch, also auch die erste: $\mathbb{L} = \emptyset$.

Zusammengefasst: $\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{falls } a = 0, \\ \emptyset & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$

15) a) Die erste Umformung, die man hier durchführen möchte, ist die Division durch a. Dies ist aber nur dann eine zulässige Äquivalenzumformung, wenn $a \neq 0$ ist. Wir unterscheiden daher wieder die beiden Fälle:

1. Fall: $a = 0$.
Dann lautet die Gleichung einfach:

$$\begin{aligned} ax &= a \quad | \,(a = 0!) \\ \iff \quad 0 &= 0 \\ \text{Also:} \quad \mathbb{L} &= \mathbb{Q} \end{aligned}$$

2. Fall: $a \neq 0$.
Dann ist die Division durch a eine Äquivalenzumformung und wir erhalten:

$$\begin{aligned} ax &= a \quad | : a\,(\neq 0!) \\ \iff \quad x &= 1 \\ \text{Also:} \quad \mathbb{L} &= \{1\} \end{aligned}$$

Zusammengefasst folgt: $\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{falls } a = 0, \\ \{1\} & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$

b) Hier ist dieselbe Fallunterscheidung nötig.
1. Fall: $a = 0$. Dann lautet die Gleichung $0 = 1$ und ist falsch: $\mathbb{L} = \emptyset$.
2. Fall: $a \neq 0$. Dann gilt $ax = 1 \iff x = \frac{1}{a}$: $\mathbb{L} = \{\frac{1}{a}\}$.

16) a) Auch hier wäre die erste Umformung eine Division durch a. Da es sich hier aber um eine Ungleichung handelt, ist die Division durch a nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn $a > 0$ ist; wenn hingegen $a < 0$ ist, muss man das Relationszeichen ($<$, $>$) 'umdrehen'. Wir haben daher hier 3 Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $a > 0$.
$$\begin{aligned} ax &< a \quad | : a(> 0!) \\ \iff \quad x &< 1 \end{aligned}$$
Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\} =]-\infty; 1[$.

2. Fall: $a = 0$. Dann lautet die Ungleichung $0 \cdot x < 0$, also $0 < 0$, und ist falsch: $\mathbb{L} = \emptyset$.

3. Fall: $a < 0$.
$$\begin{aligned} ax &< a \quad | : a(< 0!) \\ \iff \quad x &> 1 \end{aligned}$$
Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\} =]1\,; \infty[$.

Zusammengefasst: $\mathbb{L} = \begin{cases}]-\infty;1[& \text{falls } a > 0, \\ \emptyset & \text{falls } a = 0, \\ ]1;\infty[& \text{falls } a < 0. \end{cases}$

b) Hier müsste man zunächst durch a^2 dividieren. Da aber a^2 nie negativ sein kann, braucht man nur zwei Fälle zu unterscheiden: $a^2 = 0$ und $a^2 > 0$. Die weiteren Überlegungen verlaufen wie in a) und man erhält:

$$\mathbb{L} = \begin{cases}]-\infty;1[& \text{falls } a^2 > 0, \text{ d.h. falls } a \neq 0, \\ \emptyset & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

c) Vorsicht: Man führe solange wie möglich die üblichen Äquivalenzumformungen durch! Man unterscheide verschiedene Fälle erst dann, wenn dies unbedingt nötig ist, d. h. wenn man multiplizieren oder dividieren will und sicherstellen muss, dass der Divisor > 0 ist.

$$\begin{array}{rrcll} & ax & < & x & |-x \\ \Longleftrightarrow & ax - x & < & 0 & \\ \Longleftrightarrow & (a-1)x & < & 0 & (*) \end{array}$$

Jetzt wäre der nächste Schritt die Division durch $a - 1$. Man muss also nun die 3 Fälle $a - 1 > 0$, $a - 1 = 0$ und $a - 1 < 0$ unterscheiden.

1. Fall: $a - 1 > 0$.
$$\begin{array}{rrcll} (*) & (a-1)x & < & 0 & | :(a-1)\ (> 0!) \\ \Longleftrightarrow & x & < & 0 & \end{array}$$
Also: $\mathbb{L} =]-\infty;0[$

2. Fall: $a - 1 = 0$. Dann lautet die Ungleichung $(*)$ $0 \cdot x < 0$ und ist falsch: $\mathbb{L} = \emptyset$.

3. Fall: $a - 1 < 0$.
$$\begin{array}{rrcll} (*) & (a-1)x & < & 0 & | :(a-1)\ (< 0!) \\ \Longleftrightarrow & x & > & 0 & \end{array}$$
Also: $\mathbb{L} =]0;\infty[$

Da $a - 1 > 0$ nichts anderes besagt als $a > 1$, erhält man das Endergebnis:

$$\mathbb{L} = \begin{cases}]-\infty;0[& \text{falls } a > 1, \\ \emptyset & \text{falls } a = 1, \\ ]0;\infty[& \text{falls } a < 1. \end{cases}$$