Übungen (5)

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Bruchgleichungen:

1) $\dfrac{x+6}{x} = \dfrac{x+4}{x+1}$

2) $\dfrac{5}{x-3} = \dfrac{2}{3-x}$

3) $\dfrac{x}{x-1} = 1 - \dfrac{1}{1-x}$

4) $\dfrac{2-x}{3-x} - 1 = \dfrac{4-x}{x-3}$

5) $\dfrac{5x+1}{30-10x} = \dfrac{x+3}{4x-12}$

6) $\dfrac{4x}{6x-24} = \dfrac{x}{12-3x}$

7) $\dfrac{x+2}{6x} + \dfrac{x^2-2}{3x^2} = \dfrac{1}{2}$

8) $\dfrac{9}{x+3} - \dfrac{8}{x-2} - \dfrac{1}{x+1} = 0$

Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen durch *Faktorisieren:*

9) a) $(x-3)\cdot(x+1) = 0$,
b) $(x-3)(x+1)(x-2) = 0$,
c) $(2x-4)(3x+1) = 0$,
d) $6x^2 + 3x = 0$,
e) $2x^2 - 50 = 0$,
f) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

10) a) $x^2 + 16 = 8x$,
b) $2x^2 + 6x + 6 = x^2 - 2x - 10$,
c) $(2x+2)(x+2) + 5 = 9$,
d) $3(x^2+3) = 36$,
e) $x^3 + 4x = 4x^2$,
f) $2x(x+3) - 45 = (3x-2)(x-2)$.

Lösen Sie die nachfolgenden Bruchgleichungen:

11) $\dfrac{8}{x-3} - \dfrac{10}{x+3} = \dfrac{40}{x^2-9}$

12) $\dfrac{3}{x+4} + \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{5x-4}{x^2-16}$

13) $\dfrac{3}{x+4} - \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{5x-4}{x^2-16}$

14) $\dfrac{6x+1}{2x+6} - \dfrac{5x-3}{3x-9} = \dfrac{4x^2+42}{3x^2-27}$

15) $\dfrac{3-x}{x+1} + \dfrac{2+x}{x-3} = \dfrac{4x-1}{x^2-2x-3}$

16) $\dfrac{3}{x^2+3x} - \dfrac{2}{x^2-2x} - \dfrac{1}{x^2+x-6} = 0$

Übungen (5) — Lösungen

1) Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0, -1\}$. Über diesem Bereich nimmt der Term $x(x+1)$ nie den Wert 0 an, also ist die Multiplikation damit eine Äquivalenzumformung. Dies ergibt dann:

$$
\begin{aligned}
& \frac{x+6}{x} = \frac{x+4}{x+1} && \mid \cdot x(x+1) \\
\iff & (x+6)(x+1) = x(x+4) && \\
\iff & x^2 + 7x + 6 = x^2 + 4x && \mid -x^2 \\
\iff & 7x + 6 = 4x && \mid -4x - 6 \\
\iff & 3x = -6 && \mid : 3 \\
\iff & x = -2 && \\
& \mathbb{L} = \{-2\}\,, \qquad \text{denn } -2 \in \mathbb{D}\,.
\end{aligned}
$$

2) Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$. Über $\mathbb{D}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
& \frac{5}{x-3} = \frac{2}{3-x} && \\
\iff & \frac{5}{x-3} = \frac{2}{-(x-3)} && \mid \cdot(x-3) \\
\iff & 5 = \frac{2}{-1} = -2 && \\
& \mathbb{L} = \emptyset\,.
\end{aligned}
$$

3) Über dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
& \frac{x}{x-1} = 1 - \frac{1}{1-x} && \\
\iff & \frac{x}{x-1} = 1 - \frac{1}{-(x-1)} && \mid \cdot(x-1) \\
\iff & x = (x-1) - (-1) && \\
\iff & x = x && \mid -x \\
\iff & 0 = 0 && \\
& \mathbb{L} = \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}\,.
\end{aligned}
$$

4) Über $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& \frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{x-3} && \\
\iff & \frac{2-x}{-(x-3)} - 1 = \frac{4-x}{x-3} && \mid \cdot(x-3) \\
\iff & -(2-x) - (x-3) = 4 - x && \\
\iff & 1 = 4 - x && \\
\iff & x = 3 && \\
& \mathbb{L} = \emptyset\,, \qquad \text{denn } 3 \notin \mathbb{D}\,!
\end{aligned}
$$

5) Über $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& \frac{5x+1}{30-10x} = \frac{x+3}{4x-12} \\
\iff \quad & \frac{5x+1}{-10(x-3)} = \frac{x+3}{4(x-3)} && \mid \cdot(-20)(x-3) \\
\iff \quad & (5x+1)\cdot 2 = (x+3)\cdot(-5) \\
\iff \quad & 10x+2 = -5x-15 \\
\iff \quad & 15x = -17 \\
\iff \quad & x = -\frac{17}{15} \\
& L = \{-\frac{17}{15}\}\,, && \text{denn } -\frac{17}{15} \in \mathbb{D}\ !
\end{aligned}
$$

6) Über $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& \frac{4x}{6x-24} = \frac{x}{12-3x} \\
\iff \quad & \frac{4x}{6(x-4)} = \frac{x}{-3(x-4)} && \mid \cdot 6(x-4) \\
\iff \quad & 4x = -2x \\
\iff \quad & x = 0 \\
& \mathbb{L} = \{0\}\,, && \text{denn } 0 \in \mathbb{D}.
\end{aligned}
$$

7) Über dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& \frac{x+2}{6x} + \frac{x^2-2}{3x^2} = \frac{1}{2} && \mid \cdot 6x^2 \\
\iff \quad & (x+2)\cdot x + (x^2-2)\cdot 2 = 3x^2 && \mid -3x^2 \\
\iff \quad & x^2+2x+2x^2-4-3x^2 = 0 && \mid +4 \\
\iff \quad & 2x = 4 && \mid :\ 2 \\
\iff \quad & x = 2 \\
& \mathbb{L} = \{2\}\,, \quad \text{denn } 2 \in \mathbb{D}.
\end{aligned}
$$

8) Über dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-3, 2, -1\}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& \frac{9}{x+3} - \frac{8}{x-2} - \frac{1}{x+1} = 0 && \mid \cdot(x+3)(x-2)(x+1) \\
\iff \quad & 9(x-2)(x+1) - 8(x+3)(x+1) - (x+3)(x-2) = 0 \\
\iff \quad & 9(x^2-x-2) - 8(x^2+4x+3) - (x^2+x-6) = 0 \\
\iff \quad & -42x-36 = 0 \\
\iff \quad & x = -\tfrac{6}{7} \\
& \mathbb{L} = \{-\tfrac{6}{7}\}\,, \ \text{denn } -\tfrac{6}{7} \in \mathbb{D}\,.
\end{aligned}
$$

9)

a) $(x-3)(x+1)=0 \iff x-3=0 \vee x+1=0 \iff x=3 \vee x=-1$, also $\mathbb{L}=\{-1\,,\,3\}$.

b) $(x-3)(x+1)(x-2)=0 \iff x-3=0 \vee x+1=0 \vee x-2=0 \iff$ $\iff x=3 \vee x=-1 \vee x=2$, also $\mathbb{L}=\{-1\,,\,2\,,\,3\}$.

c) $(2x-4)(3x+1)=0 \iff 2x=4 \vee 3x=-1 \iff x=2 \vee x=-1/3$, also $\mathbb{L}=\{-1/3\,,\,2\}$.

d) Hier faktorisiert man zunächst durch Ausklammern und schließt dann wie oben weiter: $6x^2+3x=0 \iff 3x(2x+1)=0 \iff 3x=0 \vee 2x=-1 \iff$ $\iff x=0 \vee x=-1/2$, und damit ist $\mathbb{L}=\{-1/2\,,\,0\}$ die Lösungsmenge.

e) Hier wird der Term mit der dritten binomischen Formel faktorisiert: $2x^2-50=0 \iff x^2-25=0 \iff (x+5)(x-5)=0 \iff$ $\iff x+5=0 \vee x-5=0 \iff x=-5 \vee x=5$, also $\mathbb{L}=\{-5\,,\,+5\}$.

f) $x^2-6x+9=0 \iff (x-3)^2=0 \iff x-3=0 \iff x=3$, also $\mathbb{L}=\{3\}$.

10) a) $x^2+16=8x \iff x^2-8x+16=0 \iff (x-4)^2=0 \iff x-4=0 \iff$ $x=4$, also $\mathbb{L}=\{4\}$.

b) $2x^2+6x+6=x^2-2x-10 \iff x^2+8x+16=0 \iff (x+4)^2=0 \iff$ $x=-4$, also $\mathbb{L}=\{-4\}$.

c) $(2x+2)(x+2)+5=9 \iff 2x^2+6x+4-4=0 \iff x^2+3x=0 \iff$ $x(x+3)=0 \iff x=0 \vee x=-3$, also $\mathbb{L}=\{-3\,,\,0\}$.

d) $3(x^2+3)=36 \iff x^2+3=12 \iff x^2-9=0 \iff$ $\iff (x+3)(x-3)=0 \iff x=\pm 3$, also $\mathbb{L}=\{-3\,,\,+3\}$.

e) Auch diese (*kubische*) Gleichung ist durch Faktorisieren lösbar:

$$x^3+4x=4x^2 \iff x^3-4x^2+4x=0 \iff x(x^2-4x+4)=0$$
$$\iff x(x-2)^2=0 \iff x=0 \vee x=2\,,$$

also $\mathbb{L}=\{0\,,\,2\}$.

f) $2x(x+3)-45=(3x-2)(x-2) \iff 2x^2+6x-45=3x^2-8x+4 \iff$ $x^2-14x+49=0 \iff (x-7)^2=0 \iff x=7$, also $\mathbb{L}=\{7\}$.

Bei den nun folgenden Bruchgleichungen muß man zur Bestimmung des Definitionsbereiches die auftretenden Nenner faktorisieren. Dies erleichtert zugleich die Bestimmung des Hauptnenners.

11) Die Nenner $x-3$ und $x+3$ werden 0 für $x=+3$ bzw. für $x=-3$. Der quadratische (!) Nenner x^2-9 wird mit der dritten binomischen Formel zerlegt: $x^2-9=(x+3)(x-3)$. Dieser Term kann nur dann den Wert 0 haben, wenn $x-3=0$ oder $x+3=0$ ist. Damit ist der Definitionsbereich der gesamten Gleichung $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-3,+3\}$.
Zugleich erkennen wir $(x+3)(x-3)$ als Hauptnenner, mit dem wir dann die Bruchgleichung multiplizieren. Über $\mathbb{D}$ gelten dann die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
&\frac{8}{x-3}-\frac{10}{x+3}=\frac{40}{x^2-9}\\
\iff\ &\frac{8}{x-3}-\frac{10}{x+3}=\frac{40}{(x-3)(x+3)} \quad \big|\ \cdot(x-3)(x+3)\\
\iff\ &8(x+3)-10(x-3)=40\\
\iff\ &-2x+54=40 \quad \big|\ -54\\
\iff\ &-2x=-14 \quad \big|\ :(-2)\\
\iff\ &x=7\\
&\mathbb{L}=\{7\}\,,\quad \text{denn } 7\in\mathbb{D}\,.
\end{aligned}$$

12) Hier benutzt man entsprechend $x^2-16=(x-4)(x+4)$ und erhält $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-4,+4\}$. Über $\mathbb{D}$ gilt dann:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{3}{x+4}+\frac{2}{x-4} &= \frac{5x-4}{x^2-16} & \\
&\iff & \frac{3}{x+4}+\frac{2}{x-4} &= \frac{5x-4}{(x-4)(x+4)} & \mid\ \cdot(x-4)(x+4) \\
&\iff & 3(x-4)+2(x+4) &= 5x-4 & \\
&\iff & 5x-4 &= 5x-4 & \mid\ -5x+4 \\
&\iff & 0 &= 0 & \\
& & \mathbb{L}=\mathbb{D} &= \mathbb{Q}\setminus\{-4,+4\} &
\end{aligned}
$$

13) Über $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-4,+4\}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{3}{x+4}-\frac{2}{x-4} &= \frac{5x-4}{x^2-16} & \\
&\iff & \frac{3}{x+4}-\frac{2}{x-4} &= \frac{5x-4}{(x-4)(x+4)} & \mid\ \cdot(x-4)(x+4) \\
&\iff & 3(x-4)-2(x+4) &= 5x-4 & \\
&\iff & x-20 &= 5x-4 & \mid\ -x+4 \\
&\iff & -16 &= 4x & \mid :\ 4 \\
&\iff & -4 &= x & \\
& & \mathbb{L} &= \emptyset\,, & \text{denn } -4\notin\mathbb{D}\ !
\end{aligned}
$$

14) Wir stellen die drei Nenner als Produkte dar (durch Ausklammern bzw. mittels binomischer Formeln) und erhalten: $2(x+3)$, $3(x-3)$ und $3(x+3)(x-3)$. Daraus entnehmen wir den Definitionsbereich $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-3,3\}$, sowie den Hauptnenner $6(x-3)(x+3)$. Über $\mathbb{D}$ gelten dann die nachfolgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{6x+1}{2x+6}-\frac{5x-3}{3x-9} &= \frac{4x^2+42}{3x^2-27} & \\
&\iff & \frac{6x+1}{2(x+3)}-\frac{5x-3}{3(x-3)} &= \frac{4x^2+42}{3(x-3)(x+3)} & \mid \cdot 6(x-3)(x+3) \\
&\iff & (6x+1)\cdot 3(x-3)-(5x-3)\cdot 2(x+3) &= (4x^2+42)\cdot 2 & \\
&\iff & 18x^2-51x-9-(10x^2+24x-18) &= 8x^2+84 & \\
&\iff & -75x &= 75 & \\
&\iff & x &= -1 & \\
& & \mathbb{L} &= \{-1\}\,, & \text{denn } -1\in\mathbb{D}.
\end{aligned}
$$

15) Hier muß man zur Bestimmung des Definitionsbereiches die quadratische Gleichung $x^2-2x-3=0$ lösen. Da man weder ausklammern noch eine binomische Formel anwenden kann, fehlen Ihnen (noch) die nötigen Hilfsmittel. Wenn man jedoch den Verdacht hat, daß dabei die schon durch die anderen Nenner ($x+1$, $x-3$) bestimmten Ausnahmen -1, $+3$ eine Rolle spielen könnten, so berechne man einmal das Produkt $(x+1)(x-3)$ und erhält gerade $(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$. Damit

folgt $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 3\}$. Zugleich erleichtert die Zerlegung $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ auch die weiteren Äquivalenzumformungen über $\mathbb{D}$:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{3-x}{x+1} + \frac{2+x}{x-3} &= \frac{4x-1}{x^2-2x-3} \\
&\iff & \frac{3-x}{x+1} + \frac{2+x}{x-3} &= \frac{4x-1}{(x+1)(x-3)} \quad \mid \cdot(x+1)(x-3) \\
&\iff & (3-x)(x-3) + (2+x)(x+1) &= 4x - 1 \\
&\iff & -x^2 + 6x - 9 \;+\; x^2 + 3x + 2 &= 4x - 1 \\
&\iff & 9x - 7 &= 4x - 1 \\
&\iff & 5x &= 6 \\
&\iff & x &= \tfrac{6}{5} \\
& & \mathbb{L} &= \{\tfrac{6}{5}\}, \qquad \text{denn } \tfrac{6}{5} \in \mathbb{D}.
\end{aligned}
$$

16) Wieder zerlegen wir zuerst die Nenner in Faktoren. Die ersten beiden durch Ausklammern: $x(x+3)$, $x(x-2)$. Wir vermuten, daß der dritte Nenner aus den beiden Linearfaktoren $x+3$ und $x-2$ zusammengesetzt ist; in der Tat gilt $(x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$. Damit ist der Definitionsbereich dieser Gleichung $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0, -3, 2\}$ und über $\mathbb{D}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{3}{x^2+3x} - \frac{2}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2+x-6} &= 0 \\
&\iff & \frac{3}{x(x+3)} - \frac{2}{x(x-2)} - \frac{1}{(x+3)(x-2)} &= 0 \mid \cdot x(x+3)(x-2) \\
&\iff & 3(x-2) - 2(x+3) - x &= 0 \\
&\iff & 3x - 6 - 2x - 6 - x &= 0 \\
&\iff & -12 &= 0 \\
& & \mathbb{L} &= \emptyset\,.
\end{aligned}
$$