Übungen (6)

1) a) Welche der nachfolgenden Aussageformen sind Relationen? Welche sind Funktionsgleichungen? Welche sind äquivalent zu Funktionsgleichungen? Welche besitzen einen Funktionsgraphen als Lösungsmenge? Bestimmen Sie ggf. einen Funktionsterm dazu.

1) $x^2 - y = 2$,	2) $xyz = 1$,
3) $x^2 = y^2$,	4) $y = (x^3 - 1)(x + 1)$,
5) $y(x - 2) = 5$,	6) $x^2 \leq y$,
7) $y(x - 2) = 0$.	

b) Untersuchen Sie dieselben Fragen für die *Umkehrrelationen,* bei denen x und y vertauscht sind.

2) a) Vervollständigen Sie: Eine Funktion ist ...
b) Jeder Term $f(x)$ mit höchstens einer Variablen x bestimmt eine Funktion f. Wie lautet die Funktionsvorschrift?
c) Vervollständigen Sie: Der Graph einer Funktion f ist die Menge

$$G(f) =$$

Jeder Graph einer Funktion f ist Lösungsmenge einer passenden Gleichung. Welcher?
d) Stellt eine Kreislinie einen Funktionsgraphen dar?

3) a) Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $y = ax + b$ mit rationalen Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ ist __________ mit dem _______ a und dem ________________ b.
b) Geraden mit dem Anstieg 0 sind ____________________.
c) Zwei Relationen werden äquivalent umgeformt zu $y = 3$ (bzw. zu $x = 5$). Beschreiben Sie die Graphen in Worten.
d) Welchen Anstieg haben die Geraden in c)?

4) Zeichnen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in ein Koordinatenkreuz.

a) $y = x - 2$	b) $y = -3x + 5$
c) $y = \frac{x}{2} - 1$	d) $y = 3 + \frac{x}{5}$
e) $3x - 2y = 4$	f) $3x - 2y = 4(3x - y + 1)$

5) Gegeben sind drei Punkte $A = (2, 3)$, $B = (-2, -1)$ und $C = (-3, 4)$.
a) Zeigen Sie rechnerisch, dass diese ein Dreieck bilden, d. h. dass sie nicht zusammen auf einer Geraden liegen.
b) Bestimmen Sie Gleichungen für die drei Dreiecksseiten.
c) Sind die Dreiecksseiten Funktionsgraphen? Wenn ja, von welchen Funktionen?
d) Beschreiben Sie das Innere des Dreiecks durch Relationen.

Übungen (6) — Lösungen

1) 2) stellt keine Relation (in dem von uns definierten Sinne) dar, da *drei* Variable darin vorkommen. Alle anderen (Un)Gleichungen stellen Relationen dar.
Nur die Gleichung 4) $y = (x^3 - 1)(x + 1)$ stellt eine Funktionsgleichung (im engen Sinne) dar. Äquivalent zu Funktionsgleichungen sind außerdem die Gleichungen 1) und 5):
1) $x^2 - y = 2 \iff y = x^2 - 2$.
5) $y(x-2) = 5 \iff y = \frac{5}{x-2}$. (Die Division durch $x - 2$ ist eine Äquivalenzumformung, da aus $y(x-2) = 5$ zwangsläufig folgt: $x - 2 \neq 0$.)
Diese drei Gleichungen 1), 4) und 5) haben als Lösungsmenge jeweils einen Funktionsgraphen; als Funktionsterme kann man wählen: 1) $f(x) = x^2 - 2$, 4) $f(x) = (x^3 - 1)(x + 1)$ und 5) $f(x) = \frac{5}{x-2}$.
Die Gleichungen 3) und 7) sind nicht äquivalent zu Funktionsgleichungen, denn sie haben als Lösungsmenge keinen Funktionsgraphen. Begründung: Gleichung 3) $x^2 = y^2$ hat zwei Lösungen $(-1, 1)$ und $(-1, -1)$ mit derselben x-Koordinate, aber unterschiedlicher y-Koordinate. Dasselbe gilt für die beiden Lösungen $(2, 5)$ und $(2, 4)$ der Gleichung 7) $y(x - 2) = 0$.
Aus demselben Grund haben Ungleichungen (wie z. B. 6)) als Lösungsmenge keinen Funktionsgraphen.
b) Die Umkehrrelation erhält man durch Vertauschung von x und y, also:

$1')\ y^2 - x = 2,$	$3')\ y^2 = x^2,$
$4')\ x = (y^3 - 1)(y + 1),$	$5')\ x(y - 2) = 5,$
$6')\ y^2 \leq x,$	$7')\ x(y - 2) = 0.$

Von diesen ist keine eine Funktionsgleichung (im engen Sinne); äquivalent zu einer Funktionsgleichung ist lediglich
$5')$: $x(y - 2) = 5 \iff y - 2 = \dfrac{5}{x} \iff y = 2 + \dfrac{5}{x}$.
Die Lösungsmenge ist also der Funktionsgraph der Funktion f gegeben durch den Funktionsterm $f(x) = 2 + \dfrac{5}{x}$.
Alle anderen Umkehrrelationen sind nicht äquivalent zu Funktionsgleichungen; man kann jeweils Lösungspaare angeben, die dieselbe x-, aber verschiedene y-Koordinaten besitzen: $(2, 2)$, $(2, -2)$ für $1')$ und $3')$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ für $4')$, $(4, 1)$, $(4, 2)$ für $6')$ und $(0, 1)$, $(0, 5)$ für $7')$.

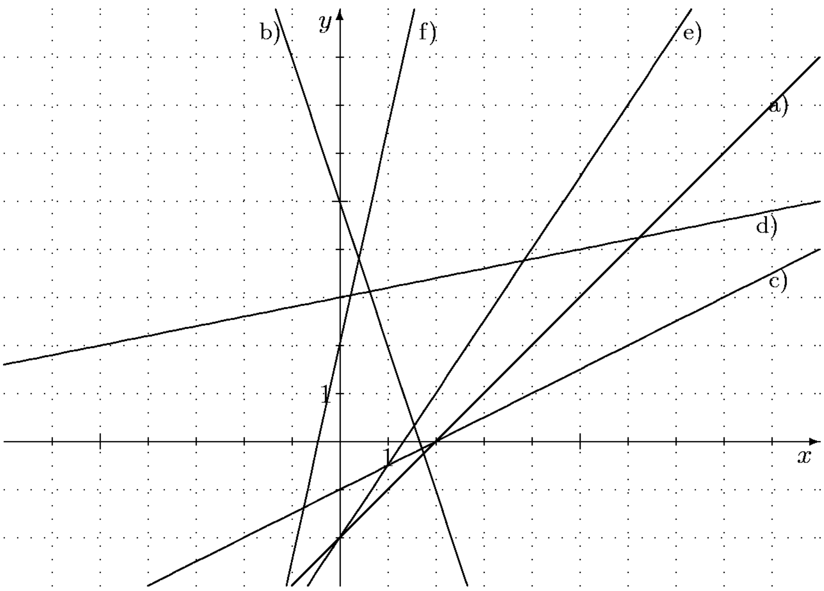
2) a) Eine Funktion ist *eine Zuordnung, die jeder Zahl (aus einer Menge D) eine eindeutig bestimmte Zahl zuordnet.*
b) Ein Term $f(x)$ mit höchstens einer Variablen x bestimmt eine Funktion f durch folgende Zuordnungsvorschrift: Zu einer Zahl $r \in \mathbb{Q}$ bestimmt man den Funktionswert, indem man die gegebene Zahl r *in den Term einsetzt und den Term ausrechnet.* Das dabei berechnete Ergebnis ist dann der zugeordnete Wert $f(r)$.
Definitionsbereich von f ist dabei die Menge all der rationalen Zahlen r, die sinnvoll in den Term $f(x)$ eingesetzt werden können, also genau der Definitionsbereich des Terms.
c) Der Graph einer Funktion f ist die Menge

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid y = f(x)\}.$$

Dies ist offenbar die Lösungsmenge der *Funktionsgleichung* $y = f(x)$.
d) Eine Kreislinie kann keinen Funktionsgraphen darstellen, weil Parallelen zur y-Achse die Kreislinie in der Regel in keinem oder in zwei Punkten schneiden. Funktionsgraphen dürfen von Parallelen zur y-Achse aber nur in einem Punkt geschnitten werden.

3) a) Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $y = ax + b$ mit rationalen Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ ist die Gerade mit dem Anstieg a und dem y-Achsenabschnitt b.
b) Geraden mit dem Anstieg 0 sind Parallelen zur x-Achse.
c)/d) Die Lösungsmenge der Gleichung $y = 3$ in der Koordinatenebene ist die Parallele zur x(!)-Achse, die bei 3 die y-Achse schneidet. Sie hat den Anstieg 0. Die Lösungsmenge der Gleichung $x = 5$ ist die Parallele zur y(!)-Achse, die bei 5 die x-Achse schneidet. Für sie ist der Anstieg nicht definiert.

4)



5) a) Wir bestimmen eine Gleichung für die Gerade g durch A und B, indem wir wie üblich den Anstieg a und den y-Achsenabschnitt b berechnen:

$$a = \frac{3-(-1)}{2-(-2)} = 1 \quad \text{und} \quad y = 1 \cdot x + b \implies 3 = 2 + b \iff b = 1\,.$$

Die Gerade durch A, B hat als Gleichung $y = x+1$. Da der Punkt C diese Gleichung nicht erfüllt, liegt er nicht auf der Geraden durch A, B.
b) Für die anderen Dreiecksseiten erhält man:

$$g(A,C): \quad a = \frac{4-3}{-3-2} = -\frac{1}{5}\,,\ b = 3 - (-\frac{1}{5} \cdot 2) = \frac{17}{5}\,,$$
$$g(B,C): \quad a = \frac{4-(-1)}{-3-(-2)} = -5\,,\ b = 4 - (-5 \cdot (-3)) = -11\,.$$

Damit sind die gesuchten Gleichungen

$$g(A,B): \ y = x + 1\,, \quad g(A,C): \ y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}\,, \quad g(B,C): \ y = -5x - 11\,.$$

c) Da keine der Dreiecksseiten parallel zur y-Achse verläuft, sind sie alle Funktionsgraphen. Funktionsterme dafür sind $f(x) = x + 1$, $g(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$ und

$h(x) = -5x - 11$.

d) Jede Gerade teilt die Koordinatenebene in zwei *Halbebenen,* die durch Ungleichungen beschrieben werden: $y < f(x)$ bzw. $y > f(x)$. In diesem Fall bestimmen die 3 Dreiecksseiten insgesamt 6 Halbräume. Das Innere des Dreiecks ist der Durchschnitt der drei Halbräume, die jeweils einen der Eckpunkte enthalten:

Dreiecksseite	Gleichung	dritter Punkt P	Halbraum $\ni P$
$g(A,B)$	$y = x + 1$	$C = (-3,4)$	$y > x + 1$
$g(A,C)$	$y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$	$B = (-2,-1)$	$y < -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$
$g(B,C)$	$y = -5x - 11$	$A = (2,3)$	$y > -5x - 11$

Damit ist das Innere des Dreiecks gegeben durch

$$\{(x,y) \mid y - x > 1 \ \wedge \ x + 5y < -17 \ \wedge \ 5x + y > -11\}.$$