Übungen (8)

1) a) Wiederholen Sie die Überlegungen zum Gleichungslösen mittels Faktorisierung (Abschnitt 4.f.).
b) Bestimmen Sie eine quadratische Gleichung mit vorgegebenen Lösungen 11 und -17.

2) Lösen Sie die nachfolgenden quadratischen Gleichungen mittels quadratischer Ergänzung:
a) $x^2 - 8x + 15 = 0$, b) $x^2 + 4x = 21$, c) $x^2 + 6x + 17 = 0$,
d) $x^2 - 18x + 82 = 0$, e) $x^2 + 7x + 6 = 0$, f) $4x^2 - 12x + 14 = 0$,
g) $6x^2 + 5x = 6$, h) $4x^2 = 15x + 4$, i) $12x^2 = 13x + 35$.

3) Wir gehen von einem normierten quadratischen Term $x^2 + px + q$ aus und wollen diesen *faktorisieren.* Wir setzen daher $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$ an und suchen a, b.
a) Zeigen Sie: Ist $p = a + b$ die *Summe* und $q = ab$ das *Produkt* von a, b, so gilt tatsächlich diese Faktorisierung $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$.
b) Man benutzt dies, um gegebene Terme zu faktorisieren, indem man zunächst q als Produkt von zwei Zahlen a, b darstellt und dann überprüft, ob p die Summe dieser Zahlen ist. Gelingt dies, hat man eine Faktorisierung des gegebenen Terms. (Es gelingt aber nicht immer!) Führen Sie dies für alle normierten quadratischen Terme der Aufgabe 2) durch.
c) Bestimmen Sie nun mit den gefundenen Faktorisierungen erneut die Lösungen der entsprechenden obigen Gleichungen. (Vergleichen Sie den Rechenaufwand!)

4) a) In welchen Punkten schneidet die nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (-2, 4)$ die Gerade durch die Punkte $P = (-3, 1)$, $Q = (2, 6)$?
b) Was ergibt sich bei nach oben geöffneter Parabel (bei ansonsten unveränderten Daten)?

5) Bestimmen Sie jeweils die Schnittpunkte der gegebenen Parabeln $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$:
   a) $\mathcal{P}_1$: Nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S_1 = (2, -1)$,
   $\mathcal{P}_2$: Nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S_2 = (0, 9)$.
   b) $\mathcal{P}_1$: Graph der Funktion f mit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$,
   $\mathcal{P}_2$: Nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel $S = (-2, 6)$.
   c) Nach oben geöffnete Normalparabeln mit den Scheiteln $S_1 = (3, -4)$ und $S_2 = (2, 5)$.
   d) Nach unten geöffnete Normalparabeln mit den Scheiteln $S_1 = (2, 5)$ und $S_2 = (2, -3)$.

6) Zeigen Sie allgemein: Zwei verschiedene Normalparabeln mit gleicher Öffnungsrichtung können sich höchstens einmal schneiden. Sie schneiden sich genau dann, wenn ihre Symmetrieachsen verschieden sind.
[Tip: Analysieren Sie genau Ihre Lösung zu c) und d) der vorangehenden Aufgabe.]

Übungen (8) — Lösungen

1) a) Grundlage des Gleichungslösens durch Faktorisieren ist die Tatsache, dass ein *Produkt* dann und nur dann *Null* ist, wenn bereits einer der Faktoren Null ist:

$$A \cdot B = 0 \iff A = 0 \ \vee \ B = 0 \,. \qquad (*)$$

Diese Tatsache kann man immer dann anwenden, wenn eine Gleichung vorliegt, bei der

1. auf einer Seite ein *faktorisierter* Term, also ein Produkt steht, und
2. auf der anderen Seite 0 steht!

Nur wenn beides vorliegt, kann man mittels $(*)$ die eine Gleichung *aufspalten* in *zwei* (in der Tendenz einfachere) Gleichungen. Zum Beispiel

$$(x-1)(x+2) = 0 \iff x-1 = 0 \ \vee \ x+2 = 0 \iff x = 1 \ \vee \ x = -2.$$

Auf diese Weise hat man *eine quadratische* Gleichung auf *zwei lineare* Gleichungen zurückgeführt und dadurch leicht lösen können.

b) Man setzt umgekehrt zwei lineare Gleichungen mit den geforderten Lösungen zusammen zu einer quadratischen Gleichung:

$$(x-11)(x+17) = 0$$

ist eine quadratische Gleichung mit den beiden Lösungen 11 und −17.

2) Ergebnisse:

a) $\mathbb{L} = \{3\,,\,5\}$,	b) $\mathbb{L} = \{-7\,,\,3\}$,	c) $\mathbb{L} = \emptyset$,
d) $\mathbb{L} = \emptyset$,	e) $\mathbb{L} = \{-6\,,\,-1\}$,	f) $\mathbb{L} = \emptyset$,
g) $\mathbb{L} = \{-\frac{3}{2}\,,\,\frac{2}{3}\}$,	h) $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{4}\,,\,4\}$,	i) $\mathbb{L} = \{-\frac{5}{4}\,,\,\frac{7}{3}\}$.

3) a) Durch Ausmultiplizieren erhält man $(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab$. Ist also $p = a+b$ und $q = ab$, so folgt selbstverständlich

$$x^2 + px + q = x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)\,.$$

b) Für $\underline{x^2 - 8x + 15}$ betrachtet man mögliche Faktorisierungen von $q = 15$ und überprüft dann, ob die *Summe* der Faktoren $p = -8$ ergibt:

$$15 = (\pm 1) \cdot (\pm 15) = (\pm 3) \cdot (\pm 5)$$

sind sämtliche Faktorisierungen von 15 in zwei Faktoren $a, b \in \mathbb{Z}$. (Dabei sind jeweils die oben- oder die untenstehenden Vorzeichen zu kombinieren. Es gibt also 4 Zerlegungen.) Berechnet man die Summen von a, b, so erhält man in einem Falle $(-3) + (-5) = -8 = p$. Also

$$(x-3)(x-5) = x^2 - 8x + 15\,.$$

(Zur Kontrolle überprüfe man die gefundene Faktorisierung, indem man das Produkt ausmultipliziert! Dies vermeidet Fehler – insbesondere mit den Vorzeichen – und ist zugleich der zweifelsfreie *Nachweis* für die Faktorisierung! Die vorherigen

Überlegungen zum Auffinden von a, b sind dann unwichtig.)
Ähnlich erhält man aus $21 = 3 \cdot 7$ die Zerlegung $\underline{x^2 + 4x - 21} = (x+7)(x-3)$.
Bei $\underline{x^2 + 6x + 17}$ findet man für die Primzahl 17 nur die beiden Zerlegungen $17 = (\pm 1) \cdot (\pm 17)$, bei denen sich nicht die Summe 6 ergibt. Die hier beschriebene Methode *versagt!* In diesem Falle muss man zur quadratischen Ergänzung zurückkehren, um schließlich zeigen zu können, dass es keine Lösung gibt. (Dies zeigt dann auch, dass es *überhaupt keine* Zerlegung des quadratischen Terms geben kann!)
Bei $\underline{x^2 - 18x + 82}$ führt keine der Zerlegungen von $82 = \pm 1 \cdot \pm 82 = \pm 2 \cdot \pm 41$ zum Ziel. Schließlich erhält man $\underline{x^2 + 7x + 6} = (x+1)(x+6)$.
c) Aus einer Gleichung $(x+a)(x+b) = 0$ liest man sofort die Lösungen $-a$ und $-b$ ab. In den Fällen, in denen man in b) Faktorisierungen gefunden hat, erhält man so erneut die schon in 2) ermittelten Lösungen.
Achtung: In den Fällen, in denen man *keine* Zerlegung gefunden hat, muss man zur Lösung der Gleichung auf die quadratische Ergänzung zurückgreifen! Stellt man dabei fest, dass es keine Lösung gibt, so zeigt dies insbesondere, dass keine Faktorisierung des quadratischen Terms existieren kann!

4) a) Um die gemeinsamen Punkte von Parabel und Gerade zu bestimmen, ermitteln wir zunächst Gleichungen für beide geometrischen Objekte. Die Scheitelpunktsform der Parabelgleichung lautet $y = a(x - x_S)^2 + y_S$. Mit dem gegebenen Scheitel $S = (x_S, y_S) = (-2, 4)$ erhalten wir $y = a(x+2)^2 + 4$. Da es sich um eine Normalparabel handelt, ist $|a| = 1$, und da sie nach unten geöffnet ist, ist $a < 0$, zusammen also $a = -1$. Wir erhalten so als Parabelgleichung: $y = -(x+2)^2 + 4$.
Zur Bestimmung einer Gleichung für die Gerade berechnen wir zunächst den *Anstieg* $a = \frac{6-1}{2-(-3)} = 1$ und dann den y-Achsenabschnitt durch Einsetzen der Punktkoordinaten in die Gleichung $y = ax + b = x + b$: $6 = 2 + b \iff b = 4$. Damit erhalten wir als Geradengleichung: $y = x + 4$.
Gesucht sind nun Punkte $P = (x, y)$, die sowohl auf der Parabel als auch auf der Geraden liegen, die also *beide* Gleichungen $y = -(x+2)^2 + 4$ und $y = x + 4$ erfüllen. Die x-Koordinaten der gesuchten Schnittpunkte (man nennt dies die Schnitt*stellen*) müssen also die folgende Gleichung für die Schnittstellen erfüllen:

$$-(x+2)^2 + 4 = x + 4 \iff -x^2 - 4x - 4 + 4 = x + 4 \iff x^2 + 5x + 4 = 0\,.$$

Die letzte quadratische Gleichung können wir mittels quadratischer Ergänzung lösen. Mit den Methoden von Aufgabe 4) findet man in diesem Falle aber leicht die Faktorisierung $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$ und damit $x^2 + 5x + 4 = 0 \iff x = -1 \;\vee\; x = -4$. Dies sind die Schnitt*stellen*, also die x-Koordinaten der Schnittpunkte. Die y-Koordinaten bestimmt man, indem man die Schnitt*stellen* in eine der beiden Gleichungen (am besten die einfachere Geradengleichung $y = x + 4$) einsetzt. Wir erhalten so die zwei Schnitt*punkte* $P_1 = (-1, -1+4) = (-1, 3)$ und $P_2 = (-4, -4+4) = (-4, 0)$.
b) Hier ändert sich nur die Parabelgleichung zu $y = (x+2)^2 + 4$ und die zu untersuchende Gleichung für die Schnittstellen lautet nun $(x+2)^2 + 4 = x + 4 \iff x^2 + 3x + 4 = 0$. Mittels quadratischer Ergänzung stellt man fest, dass diese *keine* Lösung hat, es also auch keine Schnittpunkte gibt.

5) Wir gehen wie bei der vorangegangenen Aufgabe vor und bestimmen zunächst Gleichungen für beiden Parabeln. Dabei handelt es sich immer um Funktionsgleichungen $y = \ldots$, so dass wir anschließend durch 'Gleichsetzen' *eine* Gleichung mit *einer* Unbekannten x erhalten, die es zu lösen gilt.

a) Die Gleichungen für $\mathcal{P}_1$: $y = (x-2)^2 - 1$ und $\mathcal{P}_2$: $y = -x^2 + 9$ führen zur Schnittstellengleichung

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x-3)(x+1) = 0$$

und damit zu den beiden Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$. (Statt durch Faktorisierung kann man diese Lösungen auch mittels quadratischer Ergänzung ermitteln!) Die y-Koordinaten der Schnittpunkte erhält man durch Einsetzen der Schnittstellen in eine der Parabelgleichungen: $y_1 = -x_1^2 + 9 = -1 + 9 = 8$ und $y_2 = -x_2^2 + 9 = 0$. Die gesuchten Schnittpunkte sind $P_1 = (-1, 8)$ und $P_2 = (3, 0)$.
b) Parabelgleichungen: $\mathcal{P}_1 : y = 2x^2 + 3x + 4$ und $\mathcal{P}_2 : y = (x+2)^2 + 6$.
Schnittstellen: $2x^2+3x+4 = (x+2)^2+6 \iff x^2-x-6 = 0 \iff (x-3)(x+2) = 0 \iff x = -2 \ \vee \ x = 3$.
Schnittpunkte: $P_1 = (-2, 6)$, $P_2 = (3, 31)$.
c) Parabelgleichungen: $\mathcal{P}_1 : y = (x-3)^2 - 4$ und $\mathcal{P}_2 : y = (x-2)^2 + 5$.
Schnittstellen: $x^2 - 6x + 5 = x^2 - 4x + 9 \iff 2x = -4 \iff x = -2$.
Nur *ein* Schnittpunkt: $P = (-2, 21)$.
d) Parabelgleichungen: $\mathcal{P}_1 : y = -(x-2)^2 + 5$ und $\mathcal{P}_2 : y = -(x-2)^2 + 3$.
Schnittstellen: $-x^2 + 4x + 1 = -x^2 + 4x - 1 \iff 1 = -1$.
Diese Gleichung hat *keine* Lösung; es gibt also auch keine Schnittpunkte.

6) Zwei Normalparabeln mit gleicher Öffnungsrichtung lassen sich durch Gleichungen der Form $y = a(x-x_S)^2 + y_S$ mit *demselben* a $(= \pm 1)$ beschreiben. Die Symmetrieachsen sind die Parallelen zur y-Achse durch den Scheitelpunkt, also die Geraden mit der Gleichung $x = x_S$. Sind nun die Scheitelpunkte der Parabeln $S_1 = (x_1, y_1)$ und $S_2 = (x_2, y_2)$, so ergibt sich als Schnittstellengleichung

$$a(x-x_1)^2 + y_1 = a(x-x_2)^2 + y_2 \iff -2ax_1 \cdot x + ax_1^2 + y_1 = -2ax_2 \cdot x + ax_2^2 + y_2 \,. \quad (*)$$

Man erkennt, dass die quadratischen Terme wegfallen und dies eine *lineare* Gleichung ist. Will man diese nun lösen, so muss man 'nach x auflösen':

$$(*) \iff 2a(x_1 - x_2) \cdot x = a(x_1^2 - x_2^2) + y_1 - y_2 \,. \qquad (**)$$

Da $a \neq 0$ ist, kann man diese Gleichung genau dann nach x auflösen, wenn $x_1 - x_2 \neq 0$, d. h. $x_1 \neq x_2$ ist. Dies bedeutet, dass die *Symmetrieachsen verschieden* sind. In diesem Falle erhält man genau eine Schnittstelle und damit genau einen Schnittpunkt.
Sind die *Symmetrieachsen identisch,* also $x_1 = x_2$, so reduziert sich die Gleichung auf

$$(**) \iff 0 = y_1 - y_2 \,.$$

Diese Gleichung enthält die Variable x gar nicht mehr. Die Lösungsmenge ist also entweder ganz $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{L} = \mathbb{Q}$, wenn $y_1 = y_2$) oder leer ($\mathbb{L} = \emptyset$, wenn $y_1 \neq y_2$ ist). Im Falle $y_1 \neq y_2$ existiert also *kein* Schnittpunkt. Im Falle $y_1 = y_2$ sind jedoch alle Stellen Schnittstellen; die beiden Parabeln sind identisch!