Übungen (9)

1) a) Warum erweitert man den Zahlbereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zum Zahlbereich $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen?
b) Was haben $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gemeinsam, was unterscheidet sie?
c) Geben Sie eine irrationale Zahl an. (Begründung der Irrationalität)

2) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?
a) Jede periodische Dezimalzahl ist eine rationale Zahl.
b) Jede rationale Zahl ist als abbrechende oder periodische Dezimalzahl darstellbar.
c) Das Produkt zweier periodischer Dezimalzahlen ist wieder periodisch.
d) Das Produkt zweier abbrechender Dezimalzahlen ist eine abbrechende Dezimalzahl.
e) Das Produkt zweier irrationaler Zahlen ist irrational.
f) Jede Dezimalzahl ist eine rationale Zahl.

3) Ordnen Sie der Größe nach und berechnen Sie die Abstände zwischen den folgenden vier Zahlen: $26/33$, $0{,}7\overline{8}$, $7/9$, $0{,}\overline{78}$. Geben Sie die Ergebnisse als Dezimalzahlen an.

4) a) Stellen Sie als Dezimalzahl dar: $22/7$, $17/330$, $1009/33300$.
b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass $5/7 \neq 0{,}\overline{7142857}$ ist.
c) Berechnen Sie Summe, Produkt, (beide) Differenzen und Quotienten von $0{,}\overline{010}$ und $0{,}0\,\overline{101}$. Stellen Sie das Ergebnis als Dezimalzahl dar. Kommen unter den Ergebnissen irrationale Zahlen vor?

5) Von zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Teile der Dezimalentwicklung bekannt: $a = 12{,}01\ldots$ und $b = 2{,}11\ldots$.
a) Berechnen Sie $a + b$, $a \cdot b$, und $a - b$ mit größtmöglicher Genauigkeit, d. h. geben Sie möglichst enge Intervalle an, in denen die Ergebnisse *mit Sicherheit* liegen müssen.
b) Auf wie viele Stellen hinter dem Komma genau können Sie die Ergebnisse angeben?
c) Vergleichen Sie mit den Ergebnissen von $12{,}01+2{,}11$; $12{,}01\cdot 2{,}11$ und $12{,}01-2{,}11$.

Übungen (9) — Lösungen

1) a) Man erweitert $\mathbb{Q}$, weil $\mathbb{Q}$ unvollständig ist. Z. B. gibt es in $\mathbb{Q}$ keine Zahl, deren Quadrat 2 ist.
b) In $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ kann man dieselben Rechenoperationen ($+$, $-$, $\cdot$ und $:$) durchführen und Größenvergleiche anstellen ($<$). Dabei gelten in $\mathbb{R}$ alle Gesetzmäßigkeiten, wie wir sie für $\mathbb{Q}$ zusammengestellt haben.
Der entscheidende *Unterschied* besteht darin, dass $\mathbb{R}$ im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ vollständig ist: Jede Intervallschachtelung, d. h. Folge ineinanderliegender, beliebig eng werdender Intervalle enthält in $\mathbb{R}$ genau eine reelle Zahl.
c) $\mathbb{R}$ enthält die positive Zahl $\sqrt{2}$, deren Quadrat 2 ist. Diese gehört nicht zu $\mathbb{Q}$.

2) a), b) und d) sind wahr; c), e) und f) sind falsch.
Gegenbeispiele für c) und e): $0{,}\overline{428571} \cdot 2{,}\overline{3} = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = 1$ bzw. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

3) Bei genauerem Hinsehen erkennt man, dass zwei der Zahlen identisch sind: $0{,}\overline{78} = 78/99 = 26/33$.
Weiter gilt $7/9 = 0{,}\overline{7} = 0{,}\overline{77}$. Damit liegen alle Zahlen als Dezimalzahlen vor und man kann unmittelbar die Größenvergleiche anstellen:

$$\frac{7}{9} = 0{,}\overline{77} < \frac{26}{33} = 0{,}\overline{78} = 0{,}78\,\overline{78} < 0{,}78\,\overline{88} = 0{,}7\,\overline{8}\,.$$

Zur Bestimmung der Abstände berechnet man die Differenzen zwischen den Zahlen. (Dies ist hier direkt mit den Dezimalzahlen möglich, da keine Überträge auftreten.)

$$\begin{aligned}
0{,}7\,\overline{8} - 0{,}\overline{78} &= 0{,}78\,\overline{88} - 0{,}78\,\overline{78} = 0{,}00\,\overline{10}\\
0{,}\overline{78} - \frac{26}{33} &= 0\\
0{,}\overline{78} - 0{,}\overline{7} &= 0{,}\overline{78} - 0{,}\overline{77} = 0{,}\overline{01}
\end{aligned}$$

Man kann diese Differenzen auch bestimmen, indem man alle Zahlen in Brüche umwandelt (warum ist dies möglich?), und dann die Differenzen berechnet.

4) a)
$$\begin{aligned}
\frac{22}{7} &= 3 + \frac{1}{7} = 3{,}\overline{142857}\,,\\
\frac{17}{330} &= \frac{51}{990} = \frac{1}{10} \cdot \frac{51}{99} = 0{,}\overline{51} : 10 = 0{,}0\,\overline{51}\,,\\
\frac{1009}{33300} &= \frac{3027}{99900} = \frac{1}{100} \cdot \frac{3027}{999} = \frac{1}{100} \cdot \left(3 + \frac{30}{999}\right) = \frac{1}{100} \cdot 3{,}\overline{030} = 0{,}03\,\overline{030}\,.
\end{aligned}$$

b) Ein gekürzter Bruch mit Nenner 7 stellt eine periodische Dezimalzahl dar, wobei die Periodenlänge höchstens $7 - 1 = 6$ sein kann. Die angebliche Darstellung für $5/7$ hat aber die Periodenlänge 7.
c) $0{,}\overline{010} = 10/999$ und $0{,}0\,\overline{101} = 101/9990$. Also

$$\begin{aligned}
0{,}\overline{010} + 0{,}0\,\overline{101} &= \frac{10}{999} + \frac{101}{9990} = \frac{100 + 101}{9990} = \frac{201}{9990} = 0{,}0\,\overline{201}\,,\\
0{,}\overline{010} \cdot 0{,}0\,\overline{101} &= \frac{10 \cdot 101}{999 \cdot 9990} = \frac{101}{999 \cdot 999} = \frac{101}{998001}\,,\\
0{,}0\,\overline{101} - 0{,}\overline{010} &= 0{,}0\,\overline{101} - 0{,}0\,\overline{100} = 0{,}0\,\overline{001}\,,\\
0{,}0\,\overline{101} : 0{,}\overline{010} &= \frac{101}{9990} : \frac{10}{999} = \frac{101 \cdot 999}{9990 \cdot 10} = \frac{101}{100} = 1{,}01\,.
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der umgekehrten Differenz braucht man nur das Vorzeichen zu ändern. Für den umgekehrten Quotienten erhält man

$$0{,}\overline{010} : 0{,}0\,\overline{101} = \frac{100}{101} = 0{,}\overline{9900}\,.$$

Nun steht 'nur' noch die Umwandlung des Ergebnisses (101/998001) der Multiplikation in einen Dezimalbruch aus. Wir wissen zwar, dass dies einen periodischen Dezimalbruch ergibt (der Nenner dieses gekürzten Bruches enthält Primfaktoren verschieden von 2 und 5), und auch dass die Länge der Periode höchstens 998000 sein kann. Dies sind aber trotz allem wohl keine ermutigenden Aussichten für eine schriftliche Division.
Ich habe stattdessen ein kleines Programm geschrieben und einen Computer diese Rechnungen durchführen lassen. Das Ergebnis habe ich spaßeshalber auf einem gesonderten Blatt ausdrucken lassen. Die Periodenlänge ist 2997! Ein Protokoll der zugehörigen Rechenschritte umfasst rund 130 Seiten. Dies ist nur auf Diskette verfügbar. Glücklicherweise betrug die Periodenlänge nicht 998000! Allein der Ausdruck der Periode hätte über 300 Seiten umfasst! Man erkennt hier erneut, wie schwierig es sein kann, mit unendlichen Dezimalzahlen zu arbeiten, und wieviel unproblematischer ein Bruch ist. Solange man es also vermeiden kann, sollte man nicht mit Dezimalzahlen arbeiten.

5) Aufgrund der Angaben über a und b wissen wir $12{,}01 \leq a \leq 12{,}02$ und $2{,}11 \leq b \leq 2{,}12$. Unter Verwendung der bekannten Gesetzmäßigkeiten (hier der Regeln über die Anordnung (T) und (M), siehe Abschnitt über rationale Zahlen, S. 10) erhält man $12{,}01 + 2{,}11 \leq a + b \leq 12{,}02 + 2{,}12$, und $12{,}01 \cdot 2{,}11 \leq a \cdot b \leq 12{,}02 \cdot 2{,}12$, also

$$14{,}12 \leq a + b \leq 14{,}14 \quad \text{und} \quad 25{,}3411 \leq a \cdot b \leq 25{,}4824\,.$$

Die Differenz $a - b$ führt man am besten auf die Addition zweier Zahlen zurück: $a - b = a + (-b)$, und schließt dann wie oben, vorausgesetzt, man hat eine *Abschätzung für* $-b$. Diese erhält man aus der für b durch Multiplikation mit -1. Man muss aber beachten, dass sich dabei *die Ungleichungszeichen umkehren*! Also: $-2{,}11 \geq -b \geq -2{,}12$ bzw. $-2{,}12 \leq -b \leq -2{,}11$. Damit folgt dann (wie oben bei der Addition)

$$12{,}01 + (-2{,}12) \leq a + (-b) \leq 12{,}02 + (-2{,}11)\,, \quad \text{also} \quad 9{,}89 \leq a - b \leq 9{,}91\,.$$

b) Man erhält also Summe und Differenz bis auf eine Genauigkeit von 2/100, dies bedeutet bei der Summe, dass das Ergebnis auf die erste Stelle hinter dem Komma genau ist (14,1), während bei der Differenz die erste Stelle hinter dem Komma eine 8 oder 9 ist.
Beim Produkt ist die Genauigkeit viel geringer, der Abstand zwischen den Zahlen 25,4824 und 25,3411 beträgt 0,1413! Das Ergebnis ist nur in den Vorkommastellen genau.
c) $12{,}01 + 2{,}11$ und $12{,}01 - 2{,}11$ sind abbrechende Dezimalzahlen, die von $a + b$ bzw. $a - b$ um höchstens 2/100 abweichen, können also als Näherungen dienen. Beim Produkt ist jedoch Vorsicht geboten: Der Wert $12{,}01 \cdot 2{,}11 = 25{,}3411$ erweckt mit seinen 4 Stellen hinter dem Komma den (falschen) Eindruck einer Genauigkeit auf 4 Stellen; wie wir oben gesehen haben, kann aber der Fehler sogar bis zu 0,1413 betragen! Nicht einmal die erste Stelle hinter dem Komma ist genau.

101
998001
Ergebnis: 0,0001010202303404505606707808910011112213314415516617
71881992102212322432542652762872983093203313423533
64375386397408419430441452463474485496507518529540
55156257358459560661762863965066167268369470571672
77387497607717827938048158268378488598708818929039
14925936947958969980992003014025036047058069080091
10211312413514615716817919020121222323424525626727
82893003113223333443553663773883994104214324434544
65476487498509520531542553564575586597608619630641
65266367468569670771872974075176277378479580681782
88398508618728838949059169279389499609719829940050
16027038049060071082093104115126137148159170181192
20321422523624725826928029130231332433534635736837
93904014124234344454564674784895005115225335445555
66577588599610621632643654665676687698709720731742
75376477578679780881983084185286387488589690791892
99409519629739849960070180290400510620730840951061
17128139150161172183194205216227238249260271282293
30431532633734835937038139240341442543644745846948
04915025135245355465575685795906016126236346456566
67678689700711722733744755766777788799810821832843
85486587688789890992093194295396497598699800902003
10420530640750860971081191301411521631741851962072
18229240251262273284295306317328339350361372383394
40541642743844946047148249350451552653754855959705
81592603614625636647658669680691702713724735746757
76877979080181282383484585686787888990091192293394
49559669779890000110220330440550660770880991101211
32143154165176187198209220231242253264275286297308
31933034135236337438539640741842944045146247348449
55065175285395505615725835946056166276386496606716
82693704715726737748759770781792803814825836847858
86988089190291392493594695796897999100201302403504
60570680790901011121231341451561671781892002112222
33244255266277288299310321332343354365376387398409
42043144245346447548649750851953054155256357458559
66076186296406516626736846957067177287397507617727
83794805816827838849860871882893904915926937948959
97098199300401502603704805907008109210311412513614
71581691801912022132242352462572682792903013123233
34345356367378389400411422433444455466477488499510
52153254355456557658759860962063164265366467568669
77087197307417527637747857968078188298408518628738
84895906917928939950961972983995006017028039050061
07208309410511612713814916017118219320421522623724
82592702812923033143253363473583693803914024134244
35446457468479490501512523534545556567578589600611
62263364465566667768869971072173274375476577678779
88098208318428538648758868979089199309419529639749
85997008019030041052063074085096107118129140151162
17318419520621722823925026127228329430531632733834
93603713823934044154264374484594704814925035145255
36547558569580591602613624635646657668679690701712
72373474575676777878980081182283384485586687788889
99109219329439549659769879990100210320430540650760
87098109120131142153164175186197208219230241252263
27428529630731832934035136237338439540641742843945
04614724834945055165275385495605715825936046156266
37648659670681692703714725736747758769780791802813
82483584685786887989090191292393494595696797899
Periodenlaenge: 2997
Vorperiode: 0