Übungen (10)

1) Es sei a eine reelle Zahl.
a) Unter welcher Bedingung an a ist $\sqrt{a}$ definiert? Wie lautet unter dieser Voraussetzung die Definition von $\sqrt{a}$?
b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $x^2 = a$ (über der Grundmenge $\mathbb{R}$)?. Geben Sie die Lösungsmenge an. (Beachten Sie alle Fälle.)

2) Zeigen Sie auf der Grundlage der Definition:
a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, b) $2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$, c) $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, d) $\frac{12}{\sqrt{24}} = \sqrt{6}$.

3) Berechnen Sie die folgenden Wurzelterme *exakt,* d. h. stellen Sie sie möglichst einfach dar, ohne Wurzelterme im Nenner und mit möglichst kleinen Radikanden.
a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12} =$
b) $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{75}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{2}} =$
c) $\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 - 3^2} =$
d) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} =$
e) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} =$
f) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 =$
g) $\left(\sqrt{8 + \sqrt{15}} + \sqrt{8 - \sqrt{15}}\right)^2 =$

4) Welche der nachfolgenden Gleichungen sind allgemeingültig (über ihrem Definitionsbereich)? Korrigieren Sie die falschen darunter.
a) $\sqrt{a^2} = a$, b) $(\sqrt{a})^2 = a$, c) $\sqrt{a^3} = a \cdot \sqrt{a}$, d) $\sqrt{a^6} = a^3$,
e) $\sqrt{a^4} = a^2$, f) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$, g) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

5) Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen (über der Grundmenge $\mathbb{R}$):
a) $x^2 + 6x + 7 = 0$,
b) $x^2 - 8x + 9 = 0$,
c) $12x^2 - 4x - 1 = 0$,
d) $4x^2 - 14x + 9 = 0$,
e) $2x^2 + x + 1 = 0$,
f) $x^2 - 5\sqrt{3} \cdot x + 11 = 0$.

6) Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:
a) $\frac{4x - 3}{x - 1} - \frac{10}{x + 2} = \frac{5x}{x + 2}$,
b) $\frac{x - 2}{x + 2} + \frac{x + 2}{x - 2} = 5$,
c) $\frac{4x - 3}{x - 1} - \frac{10}{x + 2} = \frac{6x}{x + 2}$,
d) $\frac{3x + 2}{x - 2} = \frac{x + 2}{3x - 2}$.

7) Unter dem *Goldenen Schnitt* versteht man die Unterteilung einer Strecke in zwei Abschnitte, so dass der größere Abschnitt sich zur Gesamtlänge verhält wie der kleinere Abschnitt zum größeren. Bestimmen Sie das Verhältnis des goldenen Schnitts.

8) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte, die die Parabeln auf dem Skizzenblatt **Normalparabeln (2)** zu Übungen (7) miteinander haben.

Übungen (10) — Lösungen

1) a) $\sqrt{a}$ ist nur definiert für $a \geq 0$ (weil es für $a < 0$ keine reelle Zahl geben kann, deren Quadrat a ist). Ist $a \geq 0$, so versteht man unter $\sqrt{a}$ die reelle Zahl, die ≥ 0 ist und quadriert a ergibt.
b) Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung $x^2 = a$ über $\mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{\mathbb{L} = \begin{cases} \{\} & \text{falls } a < 0, \\ \{0\} & \text{falls } a = 0, \\ \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\} & \text{falls } a > 0. \end{cases}}$$

Die Anzahl der Lösungen ist in den genannten Fällen 0 bzw. 1 bzw. 2. Für $a \geq 0$ kann man einheitlich sagen: $\mathbb{L} = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$, und die folgende, für die Lösung quadratischer Gleichungen fundamentale Äquivalenzumformung festhalten:

$$\text{Für } a \geq 0 \text{ gilt: } \boxed{x^2 = a \iff x = \sqrt{a} \lor x = -\sqrt{a}} \qquad (*)$$

2) a) Wir müssen zeigen, dass die linke Seite der Gleichung $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ gleich $\sqrt{6}$ ist. Nun ist die Zahl $\sqrt{6}$ durch *Eigenschaften* definiert; wir müssen also zeigen, dass $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ die Eigenschaften hat, durch die $\sqrt{6}$ definiert ist. Wir müssen also zeigen, dass die linke Seite eine Zahl ist, die 1. ≥ 0 ist und 2. quadriert 6 ergibt.
Nun ist nach Definition $\sqrt{2} \geq 0$ und $\sqrt{3} \geq 0$, also (aufgrund unserer Rechengesetze) auch $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \geq 0$. Damit ist die erste Eigenschaft erfüllt.
Für 2. müssen wir die linke Seite quadrieren.

$$(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3 = 6\,.$$

Damit ist auch die 2. Forderung erfüllt: Die linke Seite der behaupteten Gleichung hat die Eigenschaften, durch die wir $\sqrt{6}$ definiert haben, muss also die Zahl $\sqrt{6}$ sein. (Es gibt nur eine Zahl mit diesen Eigenschaften!)
Diese hier sehr ausführlich dargestellte Argumentation ist typisch für den Umgang mit Zahlen, die nicht explizit als Dezimalzahlen angegeben sind, sondern durch Eigenschaften charakterisiert sind. Will man die Übereinstimmung gewisser Zahlen nachweisen, muss man in dieser Situation *die definierenden Eigenschaften* nachweisen! Wir üben dies noch an den nächsten beiden Beispielen:
b) Wieder zeigen wir, dass die linke Seite eine Zahl ist, die die definierende Eigenschaft für die Zahl $\sqrt{8}$ erfüllt, die also 1. ≥ 0 ist und 2. quadriert 8 ergibt. Wegen $\sqrt{2} \geq 0$ gilt auch $2 \cdot \sqrt{2} \geq 0$. Und ebenso einfach folgt $(2\sqrt{2})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8$.
c) Wieder ist die linke Seite eine Zahl ≥ 0 und ihr Quadrat ist

$$(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = (\frac{1}{2})^2(\sqrt{2})^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}\,.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.
d) Die linke Seite ist ≥ 0 und ihr Quadrat ist $\dfrac{144}{24} = 6$.

3) a) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\sqrt{2}=6\sqrt{2}$,

b) $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{75}}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5}{2}\cdot\sqrt{2}$,

c) $\sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{7}=5\sqrt{7}$,

Für die beiden nächsten Umformungen beachte man die dritte binomische Formel $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

d) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$,

e) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{3+2-2\sqrt{3}\sqrt{2}}{3-2}=5-2\sqrt{6}$,

Beachten Sie bei den nächsten Umformungen auch noch die binomische Formel $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$:

f) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(3+2\sqrt{6}+2)+(3-2\sqrt{6}+2)=10$,

g) $\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}+\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2=(8+\sqrt{15})+2\cdot\sqrt{8+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{8-\sqrt{15}}+(8-\sqrt{15})=$
$16+2\cdot\sqrt{(8+\sqrt{15})\cdot(8-\sqrt{15})}=16+2\sqrt{64-15}=16+2\sqrt{49}=30.$

4) a) Diese Formel ist falsch. Wir wiederholen die Überlegungen aus dem Unterricht: Wenn die behauptete Gleichung richtig sein soll, muss die rechte Seite (a) eine Zahl sein, die 1. ≥ 0 ist und 2. quadriert a^2 (den Radikanden der linken Seite) ergibt. Die 2. Forderung ist ganz offensichtlich erfüllt: Quadriert man a, so erhält man natürlich a^2. Aber die 1. Forderung $a \geq 0$ braucht nicht erfüllt zu sein.
Damit ist die behauptete Gleichung nicht allgemeingültig; sie ist richtig für $a \geq 0$ und falsch für $a < 0$. Allgemeingültig wird die Gleichung in der Form

$$\sqrt{a^2}=|a|\ .$$

b) ist definitionsgemäß richtig.
c) ist ebenfalls richtig: Da die Gleichung nur für $a \geq 0$ definiert ist, gilt $a\sqrt{a}\geq 0$. Zusammen mit $(a\sqrt{a})^2=a^2(\sqrt{a})^2=a^3$ ist dann c) bewiesen.
d) hingegen ist falsch, denn die Gleichung ist für alle a definiert, aber nur für die nicht-negativen richtig (wie bei a)).
Entsprechend lautet die Korrektur: $\sqrt{a^6}=\left|a^3\right|=|a|^3$.
e) ist richtig, da a^2 immer ≥ 0 ist, so dass die Probleme von a) nicht auftreten.
f) ist richtig gemäß der dritten binomischen Formel.
g) ist **grob falsch!**

5) a) $x^2+6x+7=0 \iff x=-3\pm\sqrt{9-7}=-3\pm\sqrt{2}$, also $\mathbb{L}=\{-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\}$.
b) $x^2-8x+9=0 \iff x=4\pm\sqrt{16-9}=4\pm\sqrt{7}$, also $\mathbb{L}=\{4-\sqrt{7}\,,4+\sqrt{7}\}$.
c) $12x^2-4-1=0 \iff x^2-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{12}=0 \iff x=\dfrac{1}{6}\pm\sqrt{\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{12}}=\dfrac{1}{6}\pm\dfrac{1}{3}$,
also ist $\mathbb{L}=\{-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\}$.
d) $4x^2-14x+9=0 \iff x^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{9}{4}=0 \iff x=\dfrac{7}{4}\pm\sqrt{\dfrac{49}{16}-\dfrac{9}{4}}=\dfrac{7}{4}\pm\sqrt{\dfrac{13}{16}}$,
also $\mathbb{L}=\{\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{4}\sqrt{13},\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{4}\sqrt{13}\}$.
e) $2x^2+x+1=0 \iff x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}=0 \iff x=-\dfrac{1}{4}\pm\sqrt{\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{2}}$.
Da $\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{2}<0$ ist, gibt es *keine* Lösung.

f) Hier wird einige Standfestigkeit im Umgang mit Wurzeltermen benötigt:

$x^2 - 5\sqrt{3} \cdot x + 11 = 0 \iff x = \dfrac{5}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{\dfrac{75}{4} - 11} = \dfrac{5}{2}\sqrt{3} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{31},$

also $\mathbb{L} = \{\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{31}, \frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{31}\}$.

6) a) Der Definitionsbereich der Gleichung besteht aus allen reellen Zahlen verschieden von 1 und -2, weil bei deren Einsetzung einer der Nenner 0 würde. Also $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,,\,+1\}$. Über $\mathbb{D}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\frac{4x-3}{x-1} - \frac{10}{x+2} = \frac{5x}{x+2} \iff (4x-3)(x+2) - 10(x-1) = 5x(x-1)$$
$$\iff 4x^2 + 5x - 6 - 10x + 10 = 5x^2 - 5x \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$$

Wegen $-2 \notin \mathbb{D}$ ist $+2$ die *einzige* Lösung.

b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$. Über $\mathbb{D}$ gilt

$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = 5 \iff (x-2)(x-2) + (x+2)(x+2) = 5(x-2)(x+2)$$
$$\iff x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x + 4 = 5x^2 - 20 \iff 3x^2 = 28$$
$$\iff x = \pm\sqrt{\frac{28}{3}} = \pm 2\sqrt{\frac{7}{3}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{21}\,.$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{\,\frac{2}{3}\sqrt{21}\,,\, -\frac{2}{3}\sqrt{21}\,\}$.

c) Über $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,,\,+1\}$ gilt:

$$\frac{4x-3}{x-1} - \frac{10}{x+2} = \frac{6x}{x+2} \iff (4x-3)(x+2) - 10(x-1) = 6x(x-1)$$
$$\iff 4x^2 + 5x - 6 - 10x + 10 = 6x^2 - 6x \iff 2x^2 - x - 4 = 0$$
$$\iff x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0 \iff x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + 2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{33}{16}} = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{33})\,.$$

Die Gleichung hat die beiden Lösungen $\frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{33})$.

d) Über $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\,,\,2\}$ gilt

$$\frac{3x+2}{x-2} = \frac{x+2}{3x-2} \iff (3x+2)(3x-2) = (x+2)(x-2)$$
$$\iff 9x^2 - 4 = x^2 - 4 \iff 8x^2 = 0 \iff x = 0\,.$$

Die Gleichung hat nur die eine Lösung 0.

7) Sei x der gesuchte größere Anteil. Dann ist $1 - x$ der Anteil der kürzeren Strecke an der Gesamtstrecke. Die Forderung des goldenen Schnittes lautet dann

$$x = \frac{1-x}{x}\,.$$

Wir lösen nun diese Bruchgleichung. Sie ist definiert für $x \neq 0$. Dafür gilt dann

$$x = \frac{1-x}{x} \iff x^2 = 1 - x \iff x^2 + x - 1 = 0$$
$$\iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4+1}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

Da das gesuchte Verhältnis eine positive Zahl sein muss, ist das Verhältnis des goldenen Schnitts $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$.

8) Zunächst lesen wir aus den Skizzen die Scheitelpunkte ab und erhalten damit für die Parabeln die folgenden Gleichungen in Scheitelpunktsform (siehe die Lösungen zu Übung (7), Aufgabe 1 b)):

$$\begin{array}{llll} \mathcal{P}_1: & y = x^2 & \mathcal{P}_5: & y = -(x-5)^2 \\ \mathcal{P}_2: & y = -x^2 & \mathcal{P}_6: & y = (x-8)^2 - 3 \\ \mathcal{P}_3: & y = (x-4)^2 - 2 & \mathcal{P}_7: & y = -(x+6)^2 + 2 \\ \mathcal{P}_4: & y = -x^2 + 4 & \mathcal{P}_8: & y = (x+7)^2 + 1 \end{array}$$

Um die Schnitt*stellen* (= x-Koordinaten der Schnitt*punkte*) dieser Parabeln miteinander zu bestimmen, muss man $\frac{7\cdot 8}{2} = 28$ Gleichungen lösen. Die Schnittpunkte erhält man, indem man die gefundenen Schnittstellen in eine der beiden Parabelgleichungen einsetzt. Man erhält so die Tabelle auf der folgenden Seite, in der jeweils sämtliche Schnittpunkte eingetragen sind.

Schnittpunkte der Normalparabeln (2) von Übung (7):

Exakte Ergebnisse:

	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_5$	$\mathcal{P}_6$	$\mathcal{P}_7$	$\mathcal{P}_8$
$\mathcal{P}_1 \cap \ldots$	$(0,0)$	$(\frac{7}{4}, \frac{49}{16})$	$(\pm\sqrt{2}, 2)$	$--$	$(\frac{61}{16}, \frac{3721}{256})$	$--$	$(-\frac{25}{7}, \frac{625}{49})$
$\mathcal{P}_2 \cap \ldots$		$--$	$--$	$(\frac{5}{2}, -\frac{25}{4})$	$--$	$(-\frac{17}{6}, -\frac{289}{36})$	$--$
$\mathcal{P}_3 \cap \ldots$			$--$	$(\frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})$	$(\frac{47}{8}, \frac{97}{64})$	$--$	$(-\frac{18}{11}, \frac{3602}{121})$
$\mathcal{P}_4 \cap \ldots$				$(\frac{29}{10}, -\frac{441}{100})$	$--$	$(-\frac{19}{6}, -\frac{217}{36})$	$--$
$\mathcal{P}_5 \cap \ldots$					$--$	$(-\frac{9}{22}, -\frac{14161}{484})$	$--$
$\mathcal{P}_6 \cap \ldots$						$--$	$(\frac{11}{30}, \frac{49741}{900})$
$\mathcal{P}_7 \cap \ldots$							$(-6,2); (-7,1)$

Näherungswerte (zum Vergleich mit der Skizze):

	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_5$	$\mathcal{P}_6$	$\mathcal{P}_7$	$\mathcal{P}_8$
$\mathcal{P}_1 \cap \ldots$	$(0,0)$	$(1.75, 3.0625)$	$(\pm 1.414, 2)$	$--$	$(3.8125, 14.535)$	$--$	$(-3.57, 12.76)$
$\mathcal{P}_2 \cap \ldots$		$--$	$--$	$(2.5, -6.25)$	$--$	$(-2.83, -8.03)$	$--$
$\mathcal{P}_3 \cap \ldots$			$--$	$(5.366, -0.134); (3.634, -1.866)$	$(5.875, 1.516)$	$--$	$(-1.636, 29.77)$
$\mathcal{P}_4 \cap \ldots$				$(2.9, -4.41)$	$--$	$(-3.167, -6.03)$	$--$
$\mathcal{P}_5 \cap \ldots$					$--$	$(-0.41, -29.26)$	$--$
$\mathcal{P}_6 \cap \ldots$						$--$	$(0.367, 55.27)$
$\mathcal{P}_7 \cap \ldots$							$(-6,2), (-7,1)$