Übungen (15)

Nachfolgende Übungen aus Lambacher-Schweitzer Bd. 10, S. 198:

10 Berechne die Winkel α, β, γ zwischen den Flächendiagonalen e, f, g eines Quaders wie in Fig. 1, bei dem die Kante a dreimal so lang wie b und die Kante c halb so lang wie b ist.

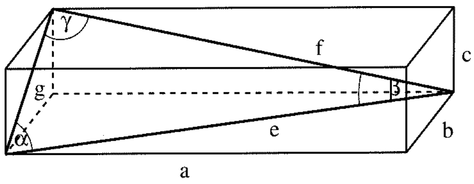


Fig. 1

Aus Physik und Technik

11 Bei Windstille bilden die Regentropfen am Fenster eines mit der Geschwindigkeit $v_Z = 140\,\frac{km}{h}$ fahrenden Zuges einen Winkel $\alpha = 20°$ mit der Waagerechten (Fig. 2). Berechne die Fallgeschwindigkeit v_R der Regentropfen.

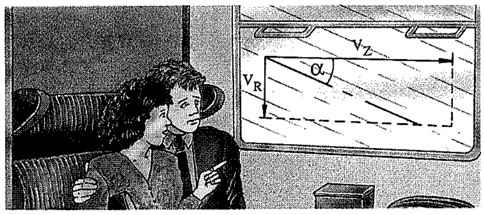


Fig. 2

12 Ein Bierfass wird eine Rampe hinaufgerollt, die den Neigungswinkel $\alpha = 21{,}8°$ hat. Die Gewichtskraft $G = 750\,N$ lässt sich dabei wie in Fig. 3 in eine Hangabtriebskraft H parallel zur Rampe und eine Druckkraft D senkrecht dazu zerlegen. Berechne beide Kräfte. Überlege dazu, wie groß der Winkel β ist.

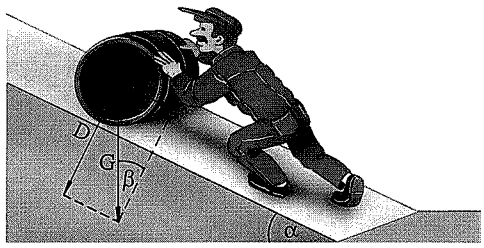


Fig. 3

***13** a) Ein Flugzeug mit der Eigengeschwindigkeit $v = 320\,\frac{km}{h}$ steuert den Kurs SO. Es wird durch einen Wind aus Richtung NNO um 5° abgetrieben (Fig. 4). Berechne die Windgeschwindigkeit v_W.
b) Ein Flugzeug soll mit der Eigengeschwindigkeit $v = 480\,\frac{km}{h}$ genau nach Osten fliegen. Welchen Winkel zu dieser Richtung muss es als Kurs steuern, wenn ein Südwestwind mit $9\,\frac{m}{s}$ Windgeschwindigkeit weht?

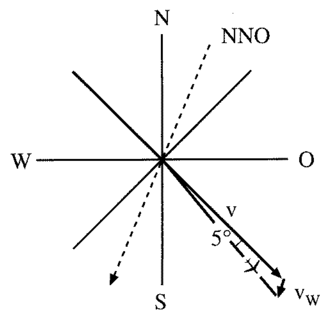


Fig. 4

***14** a) Ein Keil mit dem Winkel $\alpha = 5°$ wird mit der Kraft $K = 1000\,N$ in einen Baumstamm getrieben (Fig. 5). Berechne die Druckkräfte D, die den Stamm spalten.
b) Bei welchem Keilwinkel α ist die Kraft D gleich der Kraft K (bei welchem Winkel ist D doppelt so groß wie K)?

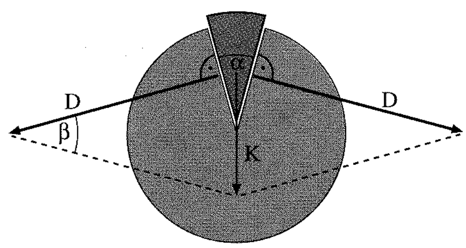


Fig. 5

***15** Zwei Treibräder mit den Radien $R = 40\,cm$ und $r = 25\,cm$ sollen durch einen straff gespannten Treibriemen verbunden werden (Fig. 6). Der Abstand ihrer Mittelpunkte ist $d = 100\,cm$. Wie lang muss der Treibriemen sein? Bestimme zuerst den Winkel φ.

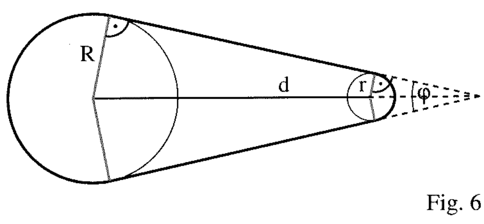


Fig. 6

Übungen (15) — Lösungen

10) Gesucht sind die drei Winkel eines Dreiecks. Mit dem Cosinussatz kann man sie aus den Seitenlängen e, f, g berechnen. Diese Seitenlängen ergeben sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras aus den Kantenlängen a, b, c des Quaders:

$$e^2 = a^2 + b^2 , \quad f^2 = a^2 + c^2 , \quad g^2 = b^2 + c^2 .$$

Aufgrund der angegebenen Längenverhältnisse $a = 3b$ und $c = \frac{1}{2}b$ gilt $b = 2c$ und $a = 6c$ und daher

$$e^2 = 40c^2 , \quad f^2 = 37c^2 , \; g^2 = 5c^2 .$$

Nach dem Cosinussatz gilt für die (im Bereich von 0^0 bis 180^0 liegenden) gesuchten Winkel α, β, γ:

$$\begin{aligned}
f^2 = e^2 + g^2 - 2eg\cos\alpha &\iff \cos\alpha = \frac{e^2 + g^2 - f^2}{2eg} = \frac{8c^2}{2\sqrt{40}\,c\cdot\sqrt{5}\,c} = \frac{\sqrt{2}}{5} \\
&\iff \alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{5} = 73{,}57^0 \\
g^2 = e^2 + f^2 - 2ef\cos\beta &\iff \cos\beta = \frac{e^2 + f^2 - g^2}{2ef} = \frac{72c^2}{2\sqrt{40}\,c\cdot\sqrt{37}\,c} = \frac{18}{\sqrt{370}} \\
&\iff \beta = \arccos(\frac{18}{\sqrt{370}}) = 20{,}65^0 \\
e^2 = f^2 + g^2 - 2fg\cos\gamma &\iff \cos\gamma = \frac{f^2 + g^2 - e^2}{2fg} = \frac{2c^2}{2\sqrt{37}\,c\cdot\sqrt{5}\,c} = \frac{1}{\sqrt{185}} \\
&\iff \gamma = \arccos(\frac{1}{\sqrt{185}}) = 85{,}78^0
\end{aligned}$$

11) Wie im Unterricht besprochen, ist die Zeichnung zu dieser Aufgabe fehlerhaft. Die Bahn der Wassertropfen soll die Diagonale in dem gezeichneten Rechteck bilden. Dann gilt

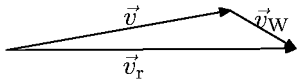
$$\tan\alpha = \frac{v_\mathrm{R}}{v_\mathrm{Z}} \iff v_\mathrm{R} = v_\mathrm{Z}\cdot\tan\alpha = 140\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot\tan(20^0) = 50{,}96\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} .$$

12) Da jeder Schenkel des Winkels β senkrecht ist zu einem Schenkel des Winkels α, stimmen beide Winkel überein: $\beta = \alpha = 21{,}8^0$. Wie in 11) gilt hier entsprechend

$$\begin{aligned}
D &= G\cdot\cos\beta = 750\,\mathrm{N}\cdot\cos(21{,}8^0) = 696{,}36\,\mathrm{N} , \\
H &= G\cdot\sin\beta = 750\,\mathrm{N}\cdot\sin(21{,}8^0) = 278{,}53\,\mathrm{N} .
\end{aligned}$$

13) a) Es sei $\vec{v}$ der Vektor der der Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs, $\vec{v}_\mathrm{W}$ der Vektor der Windgeschwindigkeit und $\vec{v}_\mathrm{r}$ der resultierende Geschwindigkeitsvektor des Flugzeugs.

Wegen $\vec{v}_\mathrm{r} = \vec{v} + \vec{v}_\mathrm{W}$ bilden diese drei Vektoren ein Dreieck mit einer bekannten Seite ($v = 320\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$). (Die nebenstehende Skizze ist rein schematisch zur Festlegung der Bezeichnungen.) Die Winkel in diesem Dreieck berechnen sich wie folgt:



In der Aufgabenstellung gegeben ist der Winkel gegenüber $\vec{v}_\mathrm{W}$:

$$\alpha = \angle(\vec{v}, \vec{v}_\mathrm{r}) = 5^0\,.$$

Da der Wind *aus* NNO kommt, ist die Richtung des Windes genau SSW, also

$$\angle(\vec{v}, \vec{v}_\mathrm{W}) = \angle(SO, SSW) = 45^0 + 22{,}5^0 = 67{,}5^0\,.$$

Entsprechend der Orientierung der Vektoren ist dieser Winkel ein Außenwinkel des Dreiecks. Der Innenwinkel γ gegenüber $\vec{v}_\mathrm{r}$ ist demzufolge

$$\gamma = \angle(-\vec{v}, \vec{v}_\mathrm{W}) = 180^0 - \angle(\vec{v}, \vec{v}_\mathrm{W}) = 112{,}5^0\,.$$

Mit dem Winkelsummensatz erhält man den dritten Winkel (gegenüber $\vec{v}$)

$$\beta = \angle(-\vec{v}_\mathrm{r}, -\vec{v}_\mathrm{W}) = \angle(\vec{v}_\mathrm{r}, \vec{v}_\mathrm{W}) = 180^0 - 5^0 - 112{,}5^0 = 62{,}5^0\,.$$

Aus der bekannten 'Seitenlänge' v und den Winkeln kann man nun mit dem Sinussatz die Windgeschwindigkeit bestimmen:

$$\frac{\sin 5^0}{v_\mathrm{W}} = \frac{\sin 62{,}5^0}{v} \iff v_\mathrm{W} = \frac{\sin 5^0}{\sin 62{,}5^0} \cdot 320\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 31{,}44\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

b) In diesem Fall ist die Richtung der resultierenden Geschwindigkeit bekannt:

$$\angle(\vec{v}_\mathrm{r}, \vec{v}_\mathrm{W}) = \angle(O, NO) = 45^0\,.$$

Dies ist zugleich der $\vec{v}$ gegenüberliegende Winkel

$$\beta = \angle(-\vec{v}_\mathrm{r}, -\vec{v}_\mathrm{W}) = \angle(\vec{v}_\mathrm{r}, \vec{v}_\mathrm{W}) = 45^0\,.$$

Daneben sind zwei Seitenlängen bekannt: $v = 480\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und $v_\mathrm{W} = 9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 32{,}4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Den gesuchten Winkel $\alpha = \angle(\vec{v}, \vec{v}_\mathrm{r})$ erhält man wieder mit dem Sinussatz:

$$\frac{\sin\alpha}{v_\mathrm{W}} = \frac{\sin\beta}{v} \iff \sin\alpha = \frac{v_\mathrm{W}}{v} \cdot \sin 45^0 = \frac{32{,}4}{480} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}0477\,.$$

Damit ist der gesuchte Winkel

$$\alpha = \arcsin(0{,}0477) = 2{,}74^0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 180^0 - 2{,}74^0 = 177{,}26^0\,.$$

Der stumpfe Winkel entfällt, da die dem Winkel α gegenüberliegende Seite v_W nicht die längste Seite des Dreiecks ist ($v_\mathrm{W} < v$). Also beträgt die Kurskorrektur $2{,}74^0$.

14) a) Da die beiden Schenkel des Winkels β auf jeweils einer Kante des Keils senkrecht stehen, ist $\beta = \alpha = 5^0$. Zudem sind aus Symmetriegründen die beiden Druckkräfte gleich, so dass die beiden Schenkel des Winkels β gleiche 'Länge' D haben. Es liegt

also ein gleichschenkliges Dreieck vor, dessen Basis die Keilkraft K ist. Aufgrund der Symmetrie des gleichschenkligen Dreiecks ergibt sich

$$\frac{\frac{K}{2}}{D} = \sin\frac{\beta}{2} \iff D = \frac{K}{2\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{500\,\mathrm{N}}{\sin 2{,}5^0} = 11463\,\mathrm{N}\,.$$

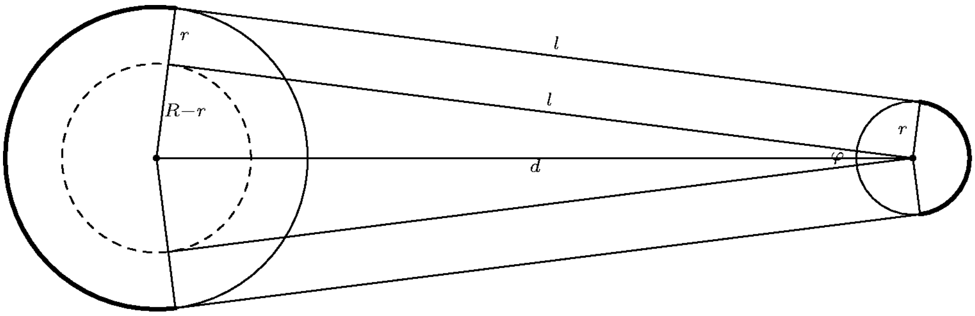
b) Da $\alpha = \beta$ ist, genügt es β zu bestimmen. $D = K$ bedeutet, dass das in a) erwähnte gleichschenklige Dreieck sogar gleichseitig ist, also alle Winkel 60^0 betragen: $\beta = 60^0$.
$D = 2K$ bedeutet (siehe a))

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{K}{2}}{D} = \frac{1}{4} \iff \beta = 2\arcsin\frac{1}{4} = 2\cdot 14{,}48^0 = 28{,}96^0\,.$$

15) Mit Hilfe der angegebenen Skizze kann man zunächst den Winkel φ bestimmen. Nach dem Strahlensatz gilt $\frac{R}{d+x} = \frac{r}{x} = \sin\frac{\varphi}{2}$ mit der Entfernung x zwischen dem Zentrum des kleinen Kreises und dem Zentrum der Strahlensatzfigur. Eliminiert man x: $Rx = rx + rd \iff x = \frac{rd}{R-r}$, so erhält man

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{\frac{rd}{R-r}} = \frac{R-r}{d}\,.$$

Anmerkung: Diese Beziehung erhält man (etwas einfacher) mit der folgenden Figur. Man verschiebt die gemeinsame Tangente parallel, so dass sie durch das Zentrum des kleineren Kreises verläuft:



Daraus entnimmt man ebenfalls $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{R-r}{d}$, also

$$\varphi = 2\arcsin\frac{R-r}{d} = 2\arcsin\frac{40-25}{100} = 2\cdot 8{,}63^0 = 17{,}25^0\,.$$

Als Bogenmaß dieses Winkels erhält man

$$t = \operatorname{arc}\varphi = \frac{\varphi}{180^0}\cdot\pi = 0{,}301\,.$$

Die Länge des Keilriemens setzt sich aus zwei Stücken der Länge

$$l = \sqrt{d^2 - (R-r)^2} = \sqrt{10^4 - 15^2}\,\mathrm{cm} = 98{,}87\,\mathrm{cm}$$

und den beiden dicker gezeichneten Kreisbögen zusammen. Der größere Kreisbogen hat den Zentrumswinkel $180^0 + \varphi$, also das Bogenmaß $\pi + t$ und damit die Länge $(\pi + t)\cdot R$, während der kleinere Kreisbogen das Bogenmaß $\pi - t$ und die Länge $(\pi - t)\cdot r$ hat. Damit ergibt sich als Keilriemenlänge

$$\begin{aligned} L &= 2l + (\pi + t)\cdot R + (\pi - t)\cdot r = 2\sqrt{d^2 - (R-r)^2} + \pi\cdot(R+r) + t\cdot(R-r) \\ &\approx 2\cdot 98{,}87\,\mathrm{cm} + \pi\cdot 65\,\mathrm{cm} + 0{,}301\cdot 15\,\mathrm{cm} \approx 406{,}46\,\mathrm{cm}\,. \end{aligned}$$