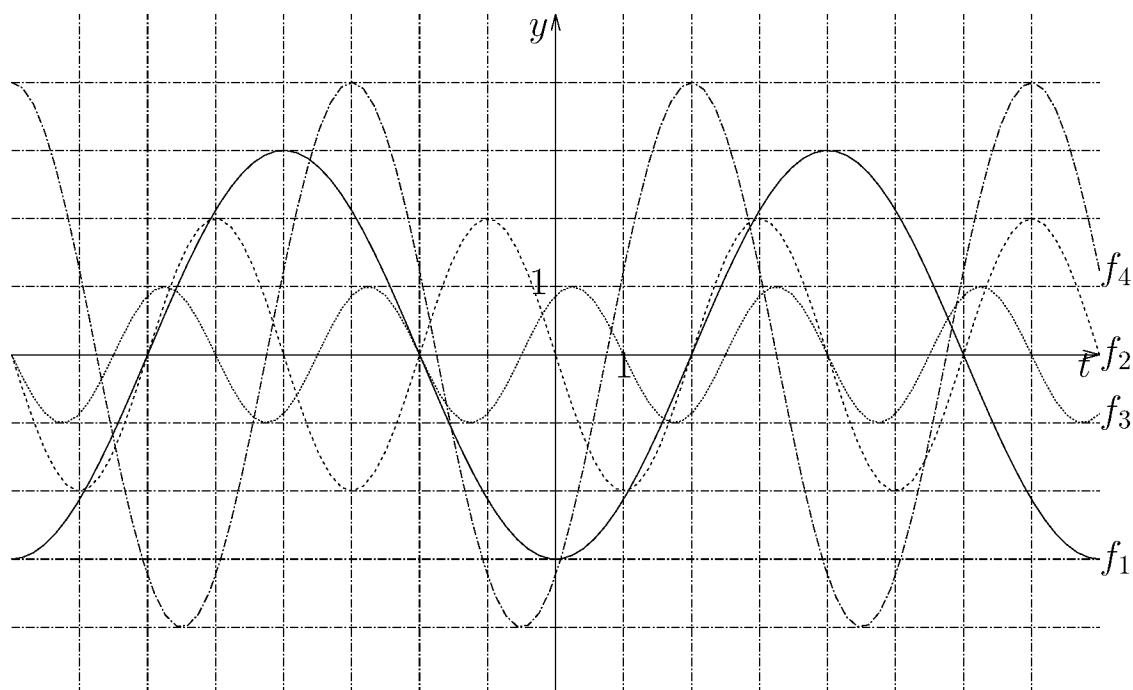


Übungen (16)

- 1) Geben Sie für die folgenden Schwingungsfunktionen die *Periode* T , *Amplitude* A und den Phasenwinkel $\varphi_0 \in]-\pi, \pi]$ für den Startzeitpunkt an. Geben Sie jeweils grobe Skizzen der Graphen und markieren Sie darin die Größen T , A und t_0 bzw. φ_0 .
- a) $f_1(t) = \sin(\pi t)$, b) $f_2(t) = 3 \sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2})$, c) $f_3(t) = 2 \sin(\frac{3\pi}{2} \cdot (t + 1))$,
d) $f_4(t) = \cos(\pi t)$, e) $f_5(t) = -\sin(2\pi t)$.
- 2) Bestimmen Sie für die nachstehend skizzierten harmonischen Schwingungsfunktionen die Amplitude A , Schwingungsdauer T , Faktor ω und Verschiebung t_0 sowie Phasenwinkel φ_0 .



- 3) Gegeben sind zwei Schwingung(sfunktion)en

$$f_1(t) = 3 \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) \quad \text{und} \quad f_2(t) = 2 \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{4}).$$

- a) Skizzieren Sie die Graphen von f_1 und f_2 für die Periodendauer $T = 12$ in einem Koordinatensystem.
b) Stellen Sie beide Funktionen als Linearkombinationen

$$f_1(t) = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t \quad \text{bzw.} \quad f_2(t) = a_2 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t$$

dar.

- c) Zeichnen Sie die Zeigervektoren $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ beider Schwingungen und deren Summenvektor $\vec{A}$.
d) Berechnen Sie für die Überlagerung $f = f_1 + f_2$ sowohl Amplitude A als auch den Phasenwinkel φ_0 . Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Ihrer Zeichnung aus c).
e) Skizzieren Sie den Graphen von f in demselben Koordinatensystem wie f_1 und f_2 .

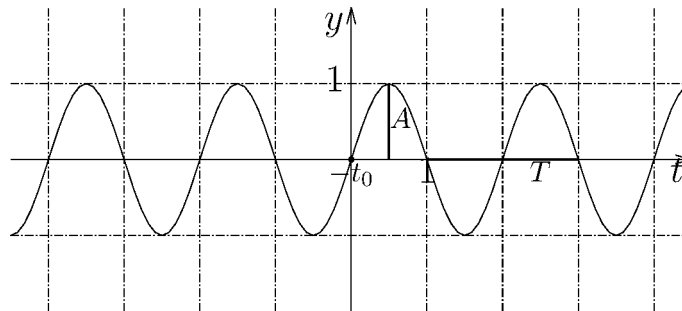
Übungen (16) — Lösungen

1) Wir stellen die gegebenen Funktionsterme in der Standardform

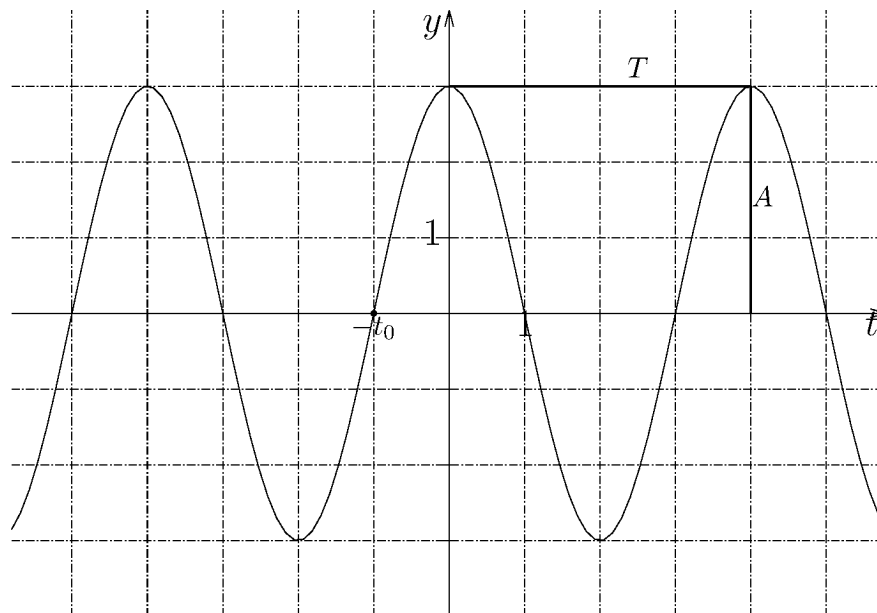
$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin(\omega(t + t_0))$$

dar und lesen daraus die gesuchten Parameter ab bzw. berechnen die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

a) $f_1(t) = 1 \cdot \sin(\pi t + 0) \implies A = 1, \omega = \pi, T = \frac{2\pi}{\pi} = 2, \varphi_0 = t_0 = 0$. Mit diesen Daten erhält man folgende Skizze des Graphen:

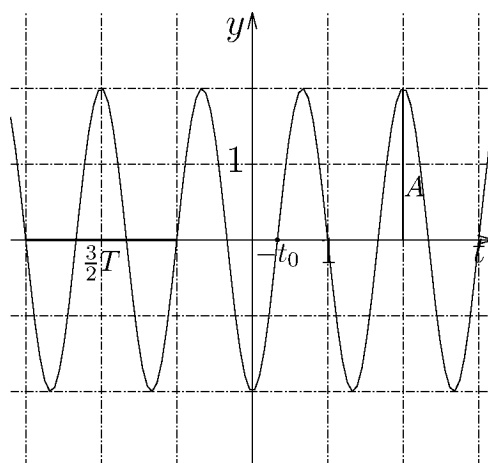


b) $f_2(t) = 3 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}) \implies A = 3, \omega = \frac{\pi}{2}, T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4, \varphi_0 = \frac{\pi}{2}, t_0 = \frac{\varphi_0}{\omega} = 1$. $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ bedeutet, dass die Funktion f an der Stelle 0 mit einem Hochpunkt (beim Phasenwinkel $\frac{\pi}{2}$ hat die Sinusfunktion einen Hochpunkt) startet. Man erhält damit folgende Skizze des Graphen:



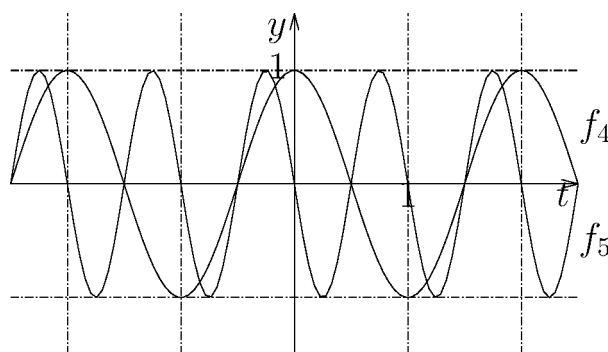
c) $f_3(t) = 2 \cdot \sin(\frac{3\pi}{2} \cdot (t + 1)) \implies A = 2, \omega = \frac{3\pi}{2}, T = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{4}{3}$. Wegen der Periodizität von f_3 kann man aus dem Term die Parameter t_0 bzw. φ_0 nur bis auf Vielfache der Periode T bzw. 2π ablesen, also $t_0 = 1 + kT$ bzw. $\varphi_0 = \omega t_0 = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$). Wegen $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$ bzw. $-\frac{T}{2} < t_0 \leq \frac{T}{2}$ folgt hier $t_0 = 1 - T = -\frac{1}{3}$

und $\varphi_0 = \omega t_0 = -\frac{\pi}{2}$. Wegen $f_3(0) = 2 \sin \frac{3}{2}\pi = -2 = -A$ startet f_3 bei 0 mit einem Tiefpunkt. Dies ergibt folgenden Graphen:



d) Amplitude $A = 1$ und $\omega = \pi$, $T = 2$ sind bereits an der gegebenen Cosinusfunktion ablesbar. Damit ist die Skizze des Graphen von f_4 klar (siehe unten)

e) Hier ist $A = 1$ und $\omega = 2\pi$, also $T = 1$ und die Skizze von f_5 wiederum direkt aus dem bekannten Verlauf von $\sin x$ ablesbar.



Will man jedoch die Standardform der Schwingungsfunktionen erreichen, muss man in d) zunächst den Cosinus durch den Sinus ausdrücken. Dies ist möglich, da eine Verschiebung des Sinus um $\frac{\pi}{2}$ nach links den Cosinus ergibt: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$. Also $f_3(t) = \cos(\pi t) = \sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$. Damit ist $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ und $t_0 = \frac{1}{2}$.

Auch bei e) ist wegen des Minuszeichens noch nicht die Standardform erreicht. Hier benutzt man $-\sin x = \sin(x + \pi)$ und erhält so $f_5(t) = -\sin(2\pi t) = \sin(2\pi t + \pi)$, also $\varphi_0 = \pi$ und $t_0 = \frac{1}{2}$.

- 2) Wir lesen zunächst aus den Graphen die Amplitude A sowie die Periode T ab und berechnen $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Die Bestimmung von φ_0 oder t_0 folgt dann später.

f_1 : Es ist $A = 3$ und $T = 8$ (ablesbar an den Hochpunkten), also $\omega = \frac{\pi}{4}$ und daher $f_1(t) = 3 \sin(\frac{\pi}{4}(t + t_0))$.

f_2 : Es ist $A = 2$ und $T = 4$ (ablesbar an den Extrempunkten), also $\omega = \frac{\pi}{2}$ und somit $f_2(t) = 2 \sin(\frac{\pi}{2}(t + t_0))$.

f_3 : Es ist $A = 1$ (ablesbar an den Hochpunkten) und $T = 3$ (ablesbar an den Nullstellen -2 und $+1$, die eine volle Periode von f_3 begrenzen. Damit ist $\omega = \frac{2\pi}{3}$ und $f_3(t) = \sin(\frac{2\pi}{3}(t + t_0))$.

f_4 : Hier ist $A = 4$ und $T = 5$ (siehe Hochpunkte), also $\omega = \frac{2\pi}{5}$ und $f_4(t) = 4 \sin(\frac{2\pi}{5}(t + t_0))$.

Wir kommen nun zur Bestimmung von t_0 . Eine direkte Bestimmung von t_0 ist möglich, wenn eine Nullstelle von f exakt ablesbar ist, denn $-t_0$ ist die betragsmäßig kleinste Nullstelle, an der die Schwingungsfunktion von negativen zu positiven Werten wechselt oder anders formuliert, an der die Funktion wächst.

f_1 : Bei f_1 ist 2 die betragsmäßig kleinste Nullstelle, an der f wächst, also $-t_0 = 2$, d. h. $t_0 = -2$ und daher $\varphi_0 = \omega t_0 = \frac{\pi}{4} \cdot (-2) = -\frac{\pi}{2}$. Wir erhalten abschließend $f_1(t) = 3 \sin(\frac{\pi}{4}(t - 2)) = 3 \sin(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{2})$.

f_2 : Hier sind $+2$ und -2 die betragsmäßig kleinsten Nullstellen, an denen f_2 wächst, also $t_0 = \pm 2$ und damit $\varphi_0 = \omega t_0 = \frac{\pi}{2} \cdot (\pm 2) = \pm \pi$. Wegen $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$ folgt $t_0 = 2$ und $\varphi_0 = \pi$. Wir erhalten $f_2(t) = 2 \sin(\frac{\pi}{2}(t + 2)) = 2 \sin(\frac{\pi}{2}t + \pi)$.

f_3 : Hier ist die Nullstelle 1 ablesbar, aber f_3 ist hier nicht wachsend, sondern fallend. Die betragsmäßig kleinste Nullstelle, an der f_3 wächst, ist nicht exakt ablesbar, aber da $T = 3$ bekannt ist, kann man sie berechnen: $-t_0 = +1 - \frac{T}{2} = -\frac{1}{2}$. Wir erhalten schließlich $f_3(t) = \sin(\frac{2\pi}{3}(t + \frac{1}{2})) = \sin(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{3})$.

f_4 : Hier ist keine Nullstelle exakt ablesbar, aber ein Hochpunkt $(2, 4)$ ist erkennbar. Setzt man diesen in den gefundenen Term für f_5 ein, so erhält man eine Gleichung für t_0 :

$$\begin{aligned} 4 &= f_4(2) = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 2 + \varphi_0\right) \\ \iff 1 &= \sin\left(\frac{4\pi}{5} + \varphi_0\right) \iff \frac{4}{5}\pi + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \iff \varphi_0 &= -\frac{3\pi}{10} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Da φ_0 im Intervall $]-\pi, \pi]$ liegen soll, folgt $\varphi_0 = -\frac{3}{10}\pi$.

Dieses Beispiel zeigt, dass man zur Bestimmung von t_0 grundsätzlich irgendeinen gut ablesbaren Punkt $(t, f(t))$ auf dem Graphen wählen kann, diesen in die Funktionsgleichung einsetzt und dann t_0 daraus bestimmt.

Alternative (für f_1 und f_2): Man erkennt sofort, dass der Graph von f_1 ohne Verschiebung aus der Cosinusfunktion entsteht, und zwar $f_1(t) = -3 \cos(\omega t)$. Unter Verwendung von $-\cos x = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ ergibt sich dann $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ und $f_1(t) = -3 \cos \omega t = 3 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ (wie oben ermittelt).

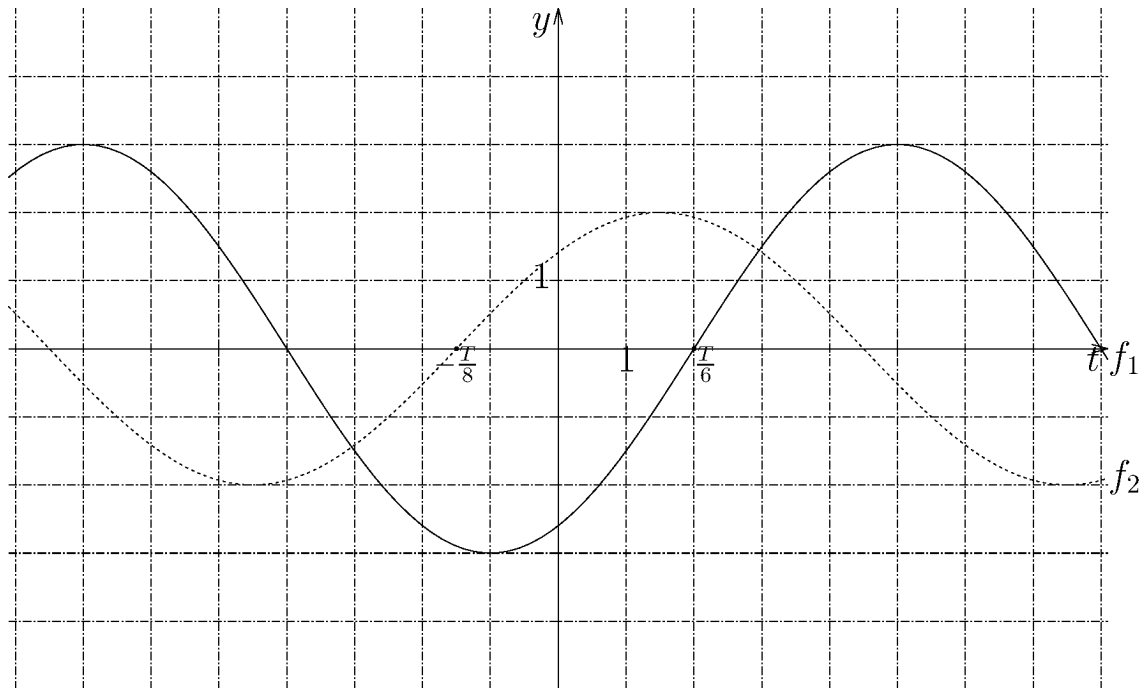
Ebenso erkennt man $f_2(t) = -2 \sin \omega t$ und wegen $-\sin x = \sin(x + \pi)$ dann $\varphi_0 = \pi$ und $f_2(t) = 2 \sin(\omega t + \pi)$.

3) a) Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 3 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi/3}{2\pi/T}\right) = 3 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{T}{6}\right), \\ f_2(t) &= 2 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi/4}{2\pi/T}\right) = 2 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{T}{8}\right). \end{aligned}$$

Damit hat f_1 die Amplitude $A_1 = 3$ und die betragsmäßig kleinste Nullstelle mit Wechsel von $-$ zu $+$ an der Stelle $-t_{01} = \frac{T}{6}$, während f_2 die Amplitude $A_2 = 2$ hat und diese Nullstelle liegt bei $-t_{02} = -\frac{T}{8}$. Für $T = 12$ erhält man also die folgenden

Graphen



b)/c) Wir bestimmen nun die Zeigerdarstellung für f_1 und f_2 :

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1 \cos \varphi_{01} = 3 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}, & b_1 &= A_1 \sin \varphi_{01} = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}, \\ a_2 &= A_2 \cos \varphi_{02} = 2 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, & b_2 &= A_2 \sin \varphi_{02} = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}, \end{aligned}$$

also

$$f_1(t) = \frac{3}{2} \sin \omega t + \frac{3}{2}\sqrt{3} \cos \omega t,$$

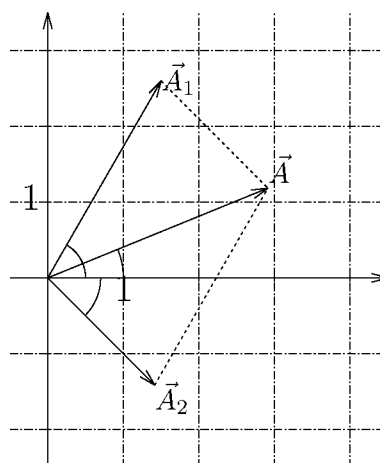
$$f_2(t) = \sqrt{2} \sin \omega t - \sqrt{2} \cos \omega t.$$

Daraus ergibt sich dann der Zeigervektor der Summenfunktion

$$a = a_1 + a_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}, \quad b = \frac{3}{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}$$

und

$$f(t) = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) \sin \omega t + \left(\frac{3}{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \cos \omega t.$$



d) Aus dem Zeigervektor von f

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \sqrt{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

berechnen wir zunächst die Amplitude

$$A = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{13 - 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})} \approx 3,15.$$

Sodann bestimmen wir den Phasenwinkel φ_0 von f . Wegen $b > 0$ ist $\sin \varphi_0 > 0$ und $\varphi_0 > 0$ und daher gilt

$$\varphi_0 = +\arccos \frac{a}{A} = \arccos \frac{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{13 - 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})}} \approx 0,39$$

Das Winkelmaß von φ_0 ist dann $\frac{180^\circ}{\pi} \cdot 0,39 = 22,11^\circ$; dieser Wert stimmt mit der Skizze überein.

e) Wir erhalten insgesamt als Überlagerung f beider Schwingungen

$$f(t) \approx 3,15 \cdot \sin(\omega t + 0,39) = 3,15 \cdot \sin \omega(t + 0,06T).$$

Hier die Skizze für f (und die beiden Summanden f_1, f_2), wieder mit $T = 12$:

