Übungen (V1)

1) a) Zeigen Sie mit einem geeigneten Kongruenzsatz:
Stimmen in einem Dreieck an zwei Eckpunkten die Winkel überein, so ist das Dreieck spiegelsymmetrisch zur Winkelhalbierenden durch den dritten Eckpunkt.
b) Folgern Sie daraus, dass das Dreieck gleichschenklig ist und diese Winkelhalbierende zugleich Höhe, Seitenhalbierende und Mittelsenkrechte ist.
Mit den üblichen Dreiecksbezeichnungen gilt also: $\alpha = \beta \iff a = b$.

2) Ein *gleichseitiges* Dreieck ist ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten. Zeigen Sie:
a) In einem gleichseitigen Dreieck betragen alle Winkel 60^0.
b) Ein Dreieck, in dem sämtliche Winkel 60^0 betragen, ist gleichseitig.

3) Zeigen Sie:
a) Ein Punkt P hat genau dann von zwei verschiedenen Punkten A und B *denselben* Abstand, wenn er auf der Mittelsenkrechten zu A und B liegt.
b) Es sei ABC ein Dreieck und M der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten. Zeigen Sie, dass M von allen drei Eckpunkten denselben Abstand hat und der gemeinsame Schnittpunkt aller drei Mittelsenkrechten ist.
c) M ist der Mittelpunkt des *Umkreises* des Dreiecks.

4) Zeigen Sie mit Hilfe der Kongruenzsätze:
a) Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen gegenseitig, so liegt ein Parallelogramm vor.
b) Schneiden sich die Diagonalen eines Vierecks in ihrem jeweiligen Mittelpunkt im rechten Winkel, so ist das Viereck eine Raute.

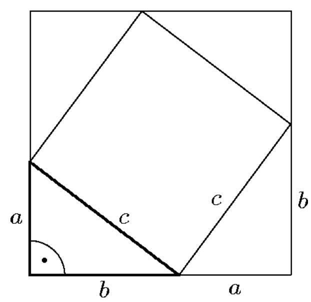
5) Welche Bedingungen müssen die Diagonalen eines Vierecks erfüllen, damit ein Drachenviereck vorliegt? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe geeigneter Kongruenzsätze.

6) Zeigen Sie: Ein Drachenviereck mit Diagonalen der Länge a, b hat die Fläche $\dfrac{a \cdot b}{2}$.

7) In welchem Verhältnis teilen sich die Diagonalen eines Trapezes, dessen Grundlinie doppelt so lang ist wie die parallele Deckenlinie? Begründen Sie Ihre Antwort mit dem Strahlensatz.

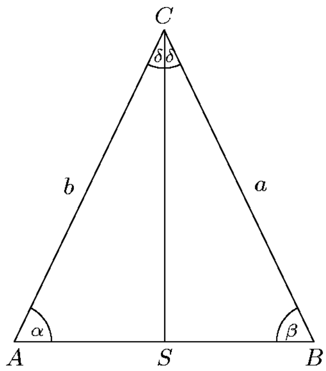
8) Ein *regelmäßiges n-Eck* wird gebildet durch n Punkte auf einem Kreis, bei denen benachbarte Punkte stets denselben Abstand haben. Den Kreis, auf dem die Ecken liegen, nennt man den *Umkreis.* Verbindet man benachbarte Eckpunkte mit dem Umkreismittelpunkt, so erhält man n Dreiecke.
a) Zeigen Sie, dass diese Dreiecke kongruent sind und bestimmen Sie ihre Winkel.
b) Zeigen Sie: Die Kantenlänge eines regelmäßigen 6-Ecks ist gleich dem Umkreisradius.
c) Begründen Sie damit eine Konstruktionsvorschrift für das regelmäßige Sechseck.

9) Beweisen Sie mit Hilfe nebenstehender Figur durch geeignete Flächenberechnung den Satz des Pythagoras.



Übungen (V1) — Lösungen

1) Die nebenstehende Skizze veranschauliche das gegebene Dreieck. Wir setzen voraus, dass die Winkel α und β übereinstimmen: $\alpha = \beta$. (Dies ist in der Zeichnung bewusst nicht genau erfüllt, damit man nicht durch die Zeichnung zu voreiligen Schlüssen kommt, sondern immer gezwungen ist, eventuelle Behauptungen genau zu begründen.) Die eingezeichnete Winkelhalbierende durch C zerlegt das Dreieck in zwei Teildreiecke. Beide Teildreiecke haben identische Winkel δ sowie nach Voraussetzung einen weiteren übereinstimmenden Winkel $\alpha = \beta$. Nach dem Winkelsummensatz müssen dann auch die jeweiligen dritten Winkel beider Dreiecke an der Ecke S übereinstimmen[1)].



Daraus folgt nun, dass die beiden Teildreiecke in einer Seite (der Winkelhalbierenden) und den beiden angrenzenden Winkeln übereinstimmen. Nach dem Kongruenzsatz **(WSW)** sind die beiden Teildreiecke *kongruent,* und zwar werden sie durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden deckungsgleich. Damit ist das Gesamtdreieck symmetrisch zur Winkelhalbierenden.
b) Wenn die Teildreiecke deckungsgleich sind, müssen insbesondere die Seitenlängen a und b (Bezeichnungen laut Skizze) übereinstimmen: Das Dreieck ist gleichschenklig. Dass dann die Winkelhalbierende auch Seitenhalbierende, Höhe und Mittelsenkrechte ist, wurde bereits im Unterricht gefolgert.

2) a) In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Seitenpaare gleich lang, also die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich groß. Damit sind alle drei Winkel gleich groß, wegen des Winkelsummensatzes also jeweils 60^0.
b) Umgekehrt schließt man genauso, da zwei gleich großen Winkeln immer gleich lange Seiten gegenüberliegen.

3) a) Eine ‘genau dann, wenn’-Aussage setzt sich immer aus zwei Teilbehauptungen zusammen. In unserem Falle:
1. Wenn der Punkt P auf der Mittelsenkrechten zu A und B liegt, dann hat er von A und B den gleichen Abstand.
2. Wenn P von A und B denselben Abstand hat, dann liegt P auf der Mittelsenkrechten.
1. Wir setzen voraus, dass P auf der Mittelsenkrechten zu A und B liegt. Es bezeichne M den Mittelpunkt zwischen A und B (Skizze anfertigen!). Dann sind die beiden Dreiecke AMP und BMP kongruent (Kongruenzsatz (SWS), denn sie haben die Seite $\overline{MP}$ gemeinsam, die Seitenlängen $|AM|$ und $|BM|$ sind gleich (da M der Mittelpunkt ist), und der eingeschlossene Winkel ist auch derselbe, nämlich 90^0). Wenn die beiden Dreiecke kongruent sind, sind insbesondere die Seitenlängen $|PA|$ und $|PB|$ gleich, das heißt: P hat von A und B denselben Abstand.
2. Wir betrachten das Dreieck ABP. Dieses ist nach Voraussetzung gleichschenklig. Also stimmen in ihm die Höhe durch P und Mittelsenkrechte der gegenüberliegenden Seite überein (siehe Satz über gleichschenklige Dreiecke, Skript S. 4). Damit

---

[1)] Da beide zusammen einen gestreckten Winkel (180^0) ergeben, müssen beide 90^0 betragen und die Winkelhalbierende ist zugleich Höhe.

liegt P auf der Mittelsenkrechten.

b) Da M auf einer der Mittelsenkrechten liegt, etwa der zu A und B, hat M von beiden Punkten denselben Abstand (siehe a)). Dasselbe gilt etwa auch für B und C. Also hat M von allen *drei* Ecken denselben Abstand. Wenn aber der Abstand von A und C übereinstimmt, muss M auch auf der dritten Mittelsenkrechten zu A und C liegen: Alle drei Mittelsenkrechten verlaufen durch den Punkt M, schneiden sich also in einem einzigen Punkt.

c) Der Kreis ist die Ortslinie aller Punkte, die von einem festen Punkt (genannt *Mittelpunkt*) einen festen Abstand (genannt *Radius*) haben. Da alle drei Eckpunkte des Dreiecks von M denselben Abstand haben, liegen sie auf einem Kreis mit Mittelpunkt M. Diesen Kreis durch die drei Eckpunkte nennt man den *Umkreis* des Dreiecks.

4) a) Sei $ABCD$ das Viereck und S der Diagonalenschnittpunkt. Die beiden Diagonalen unterteilen das Viereck in vier Dreiecke (Skizze anfertigen!). Wir behaupten, dass die einander gegenüberliegenden Dreiecke ABS und CDS bzw. ASD und BCS kongruent sind.
Begründung: Die beiden Dreiecke ABS und CDS haben bei S denselben Winkel (Gegenwinkel). Außerdem sind nach Voraussetzung die angrenzenden Stücke auf den Diagonalen gleich lang, also sind beide Dreiecke nach dem Kongruenzsatz (SWS) kongruent. Dasselbe gilt dann auch für die beiden anderen Teildreiecke.
Aufgrund der Kongruenz sind insbesondere auch entsprechende Winkel gleich groß. So stimmen etwa die Winkel $\angle ACD$ und $\angle CAB$ überein. Dies bedeutet, dass die Diagonale AC die Vierecksseiten AB und DC unter denselben (Wechsel-)winkeln schneidet; die Vierecksseiten sind also *parallel.* Genauso argumentiert man für das andere Seitenpaar. Damit liegt ein Parallelogramm vor.

b) Hier wird *zusätzlich* vorausgesetzt, dass sich die Diagonalen rechtwinklig schneiden. Das bedeutet, dass bei S alle 4 Winkel gleich groß sind. Damit werden von den oben betrachteten 4 Teildreiecken auch die *benachbarten* kongruent (eine halbe Diagonale als gemeinsame Seite, jeweils rechter Winkel bei S und zwei gleich lange Hälften der anderen Diagonale, Kongruenzsatz (SWS)). Wenn aber alle vier Teildreiecke kongruent sind, sind alle vier Seiten des Parallelogramms gleich lang: Das Viereck ist also eine Raute.

5) Schneiden sich die Diagonalen eines Vierecks rechtwinklig und wird eine halbiert, so liegt ein Drachenviereck vor.
Begründung: Aufgrund der Voraussetzung ist eine der Diagonalen die Mittelsenkrechte der anderen. Sei etwa die Diagonale AC die Mittelsenkrechte zur Diagonalen BD. Dann hat der Punkt A von B und C denselben Abstand (siehe Aufgabe 3)), also sind die von A ausgehenden benachbarten Vierecksseiten gleich lang.
Dasselbe gilt für den ebenfalls auf der Mittelsenkrechten von BD liegenden Punkt C, so dass auch die von C ausgehenden Vierecksseiten gleich lang sind: Das Viereck ist folglich ein Drachenviereck.
Von der hier bewiesenen Aussage gilt auch die Umkehrung: In einem Drachenviereck schneiden sich die Diagonalen rechtwinklig und eine wird halbiert. Siehe dazu die nächste Aufgabe.

6) Ein Drachenviereck ist definitionsgemäß aus zwei gleichschenkligen Dreiecken mit gemeinsamer Basis zusammengesetzt. Die gemeinsame Basis ist eine Diagonale des Vierecks (etwa von der Länge a) und wird durch die andere Diagonale (Länge b) halbiert und rechtwinklig geschnitten (im gleichschenkligen Dreieck stimmen Höhe, Winkel- und Seitenhalbierende durch die Spitze und Mittelsenkrechte der Basis

überein).
Die Fläche der beiden gleichschenkligen Dreiecke ist also gleich der halben Basislänge $a/2$ multipliziert mit der jeweiligen Höhe. Da die beiden Höhen zusammen die zweite Diagonale ergeben, ergeben die beiden Flächen zusammen $A = \dfrac{a}{2} \cdot b$.

7) Wir zeichnen die beiden Diagonalen ein (Skizze anfertigen!) und erhalten dadurch eine Strahlensatzfigur: Die beiden Diagonalen als sich schneidende Geraden (Schnittpunkt S) und zwei gegenüberliegende parallele Seiten des Trapezes. Nach dem Strahlensatz ist dann das Verhältnis der Abschnitte auf den Parallelen (nach Voraussetzung $1:2$) gleich dem Verhältnis der von S ausgehenden Abschnitte auf den Geraden (Diagonalen). Damit teilt S die Diagonalen ebenfalls im Verhältnis $1:2$.

8) a) In den Teildreiecken sind die vom Mittelpunkt ausgehenden Seiten alle gleich lang, nämlich gleich dem Kreisradius. Die Länge der dritten Seiten in diesen Dreiecken ist der Abstand je zweier benachbarter Punkte auf dem Kreis und daher gemäß der Voraussetzung auch in allen Dreiecken dieselbe. Damit sind die Teildreiecke gemäß dem Kongruenzsatz (SSS) kongruent. Insbesondere haben damit die Teildreiecke am Mittelpunkt alle denselben Winkel $\varphi = \frac{360^0}{n}$. Außerdem sind die Teildreiecke gleichschenklig, da die vom Mittelpunkt ausgehenden Seiten dieselbe Länge haben (nämlich den Kreisradius). Daher sind die an der Peripherie liegenden Winkel ebenfalls alle gleich groß sind, und zwar nach dem Winkelsummensatz

$$\frac{180^0 - \varphi}{2} = 90^0 - \frac{360^0}{2n} = 90^0 - \frac{180^0}{n}\,.$$

b) Bei $n = 6$ ergibt sich $\varphi = 60^0$ und damit sind die beiden verbleibenden (gleich großen) Winkel ebenfalls 60^0 und das Dreieck gleichseitig (siehe Aufgabe 2b)). Damit ist auch die dritte Seitenlängen gleich dem Radius.
c) Nach b) ist die Seitenlänge des regelmäßigen 6-Ecks gleich dem Radius seines Umkreises. Man zeichnet daher einen Kreis, setzt den Zirkel auf einen beliebigen Peripheriepunkt und schlägt um diesen einen Kreis mit unverändertem Radius. Von den entstehenden zwei Schnittpunkten mit dem Ausgangskreis ausgehend wiederholt man dies und erhält so die Eckpunkte des regelmäßigen 6-Ecks auf dem Kreis.

9) Die skizzierte Figur entsteht, indem man die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks verlängert, und jeweils dasselbe Dreieck um 90^0 gedreht ansetzt. Dies bedeutet, dass das innen liegende Viereck rechte Winkel hat und dort folglich ein Quadrat der Kantenlänge c entsteht. Zusammen mit den 4 angrenzenden rechtwinkligen Dreiecken erhält man eine Gesamtfläche $A = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab$.
Andererseits kann man die Fläche auch über das große Quadrat ermitteln; dieses hat die Kantenlänge $a+b$, so dass die Gesamtfläche auch als $A = (a+b)^2$ berechnet werden kann. Damit folgt:

$$c^2 + 2ab = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\,, \text{ also } \quad c^2 = a^2 + b^2\,.$$