Übungen (V3)

1) Gegeben ist ein Dreieck ABC. Wir definieren die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$.
a) Stellen Sie die Verbindungsvektoren von den Eckpunkten zu den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkten als Linearkombination $r.\vec{a} + s.\vec{b} + t.\vec{c}$ $(r, s, t \in \mathbb{R})$ der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dar.
b) Stellen Sie auch die Verbindungsvektoren der Seitenmittelpunkte so dar.

2) Gegeben ist ein beliebiges Viereck $ABCD$.
a) Stellen Sie die Verbindungsvektoren der Seitenmittelpunkte M_{AB}, M_{BC}, M_{CD}, M_{DA} als Linearkombinationen der Seitenvektoren des Vierecks dar.
b) Zeigen Sie, dass die Seitenmittelpunkte ein Parallelogramm bilden.

3) Gegeben ist ein Dreieck ABC. Es sei M_{BC} der Mittelpunkt zwischen B, C. Der Punkt P teile die Strecke $\overline{AC}$ von C aus gesehen im Verhältnis $3:1$ und der Punkt Q sei der Mittelpunkt zwischen M und P. Berechnen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{AQ}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

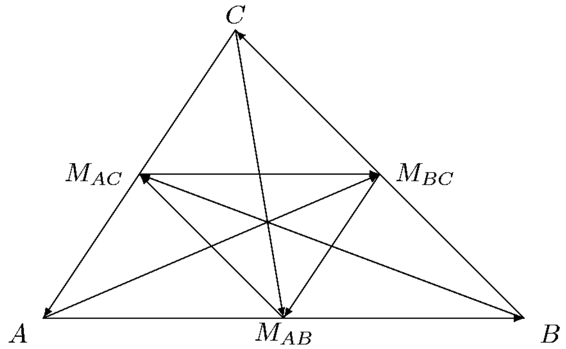
4) Gegeben ist der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
a) Stellen Sie u in einem Koordinatensystem als Pfeil mit Anfangspunkt $O = (0, 0)$ dar.
b) Stellen Sie die Vektoren $2\vec{u}$, $3\vec{u}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$, $-\vec{u}$, $-2\vec{u}$, $-2{,}5\,\vec{u}$, $0\vec{u}$ ebenso dar. Wo liegen die Endpunkte?
c) Wo liegen die Endpunkte, wenn man als Anfangspunkt $A = (-1, 1)$ wählt?
d) Gehören die Punkte $X = (2, \frac{5}{2})$ und $Y = (25, 13)$ zu dem in c) gefundenen geometrischen Gebilde?

5) Wir betrachten nun die Gerade g durch den Punkt $A = (-2, 2, 0)$ mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Punkte auf der Geraden g liegen: $P = (32, 19, -17)$, $Q = (-18, -7, 9)$, $R = (8, 7, -5)$.

Übungen (V3) — Lösungen

1) a) Ist M_{BC} der Mittelpunkt zwischen B, C, also $\overrightarrow{BM_{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, so ergibt sich

$$\overrightarrow{AM_{BC}} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_{BC}} = \vec{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\,.$$



Man kann aber auch die Ergebnisse der vorangehenden Übung (2), Aufg. 6 nutzen:

$$\overrightarrow{AM_{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\,.$$

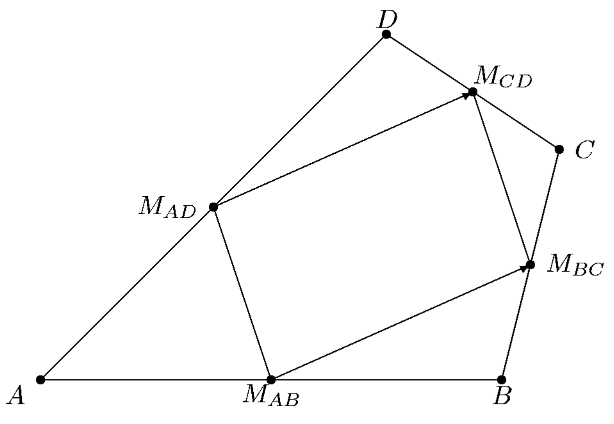
Man erkennt: Es sind mehrere Darstellungen dieser Art möglich!
Für die anderen Seitenmittenvektoren erhält man entsprechend:

$$\overrightarrow{BM_{AC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\,,$$
$$\overrightarrow{CM_{AB}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\,.$$

b) Wir berechnen (unterstützt von einer kleinen Skizze):

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{AB}B} + \overrightarrow{BM_{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\,,$$
$$\overrightarrow{M_{BC}M_{AC}} = \overrightarrow{M_{BC}C} + \overrightarrow{CM_{AC}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\,,$$
$$\overrightarrow{M_{AC}M_{AB}} = \overrightarrow{M_{AC}A} + \overrightarrow{AM_{AB}} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\,.$$

2) Skizze:



Wir berechnen den Vektor $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}}$:

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{AB}B} + \overrightarrow{BM_{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,. \tag{$*$}$$

Der Verbindungsvektor zweier Seitenmittelpunkte ist damit parallel zu und halb so lang wie eine der Diagonalen des Ausgangsvierecks.
Diese Berechnung ist gültig für beliebige Punkte A, B, C. Dabei ist das Ergebnis offenbar nicht abhängig vom Punkt B. Wendet man $(*)$ nun an auf die Punkte A, D, C, so erhält man dasselbe Ergebnis

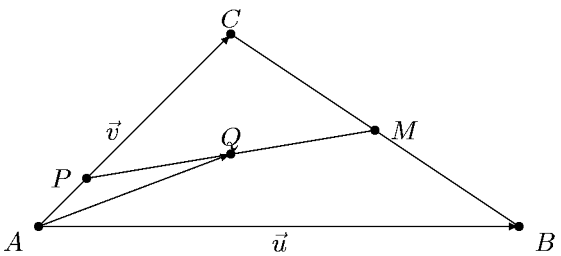
$$\overrightarrow{M_{DA}M_{CD}} = \overrightarrow{M_{AD}M_{DC}} \underset{(*)}{=} \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,.$$

Die Seitenmittelpunkte bilden also ein Parallelogramm.
Genauso folgt aus $(*)$ für die anderen Kanten des Parallelogramms:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{BC}M_{CD}} &\underset{(*)}{=} \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\,, \\ \overrightarrow{M_{AB}M_{AD}} = \overrightarrow{M_{BA}M_{AD}} &\underset{(*)}{=} \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\,. \end{aligned}$$

3) Wir berechnen

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\,.$$



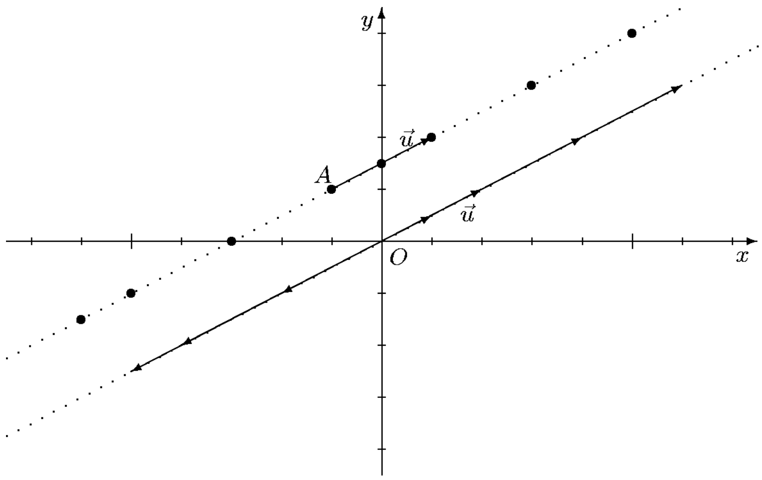
Dasselbe Ergebnis erhalten wir unmittelbar aus Tatsache (Übung (2), Aufg. 6), dass der Ortsvektor eines Mittelpunktes (hier M) das arithmetische Mittel der Ortsvektoren der Endpunkte (hier B, C) ist.
Gemäß Definition von P gilt $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} = -\frac{3}{4}\vec{v}$, also

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4} \cdot \vec{v}$$

und schließlich (diesmal unter Verwendung von Übung (2), Aufg. 6)

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM_{MP}} = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP}\big) = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{4}\vec{v}\big) = \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{3}{8}\vec{v}\,.$$

4) Skizzen zu a) – c):



b) Alle Endpunkte liegen auf einer Geraden g durch den Punkt O. Dabei gibt der Vektor $\vec{u}$ die Richtung dieser Geraden an, man nennt ihn daher *einen Richtungsvektor* von g.
c) Wieder ergibt sich eine Gerade, jetzt jedoch durch A statt O; wieder ist $\vec{u}$ Richtungsvektor der Geraden.
d) Damit X zu der Geraden aus c) gehört, muss der Vektor $\overrightarrow{AX}$ dieselbe Richtung (ohne Orientierung) wie $\vec{u}$ haben. Dies bedeutet, dass $\overrightarrow{AX}$ ein *Vielfaches* $r\vec{u}$ von $\vec{u}$ sein muss ($r \in \mathbb{R}$). Aus der Skizze bzw. der nachfolgenden Rechnung entnimmt man $r = 3/2$: X liegt auf der Geraden aus c).

$$\overrightarrow{AX} = r\vec{u} \iff \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix}.$$

Zwei Spaltenvektoren stimmen genau dann überein, wenn sie in *allen* ihren Koordinaten übereinstimmen. Damit ist die letztgenannte Vektorgleichung nichts anderes als das folgende System aus zwei linearen Gleichungen für r:

$$\begin{aligned} 2r &= 3 \\ \wedge \quad r &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

mit der offensichtlichen Lösung $r = 3/2$.
Genauso geht man für Y vor, wobei man auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2r &= 26 \\ \wedge \quad r &= 12 \end{aligned}$$

geführt wird, welches offensichtlich unlösbar ist. Es gibt also kein derartiges r: Y liegt nicht auf der Geraden.

5)

$$\overrightarrow{AP} = r\vec{v} \iff \begin{pmatrix} 34 \\ 17 \\ -17 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} 34 &= 2r \\ \wedge \quad 17 &= r \\ \wedge \quad -17 &= -r \end{aligned} \iff r = 17,$$

also liegt P auf g. Genauso zeigt man, dass R zu g gehört: $\overrightarrow{AR} = 5\vec{v}$. Für Q hingegen erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -16 &= 2r \\ \wedge \quad -9 &= r \,, \\ \wedge \quad 9 &= -r \end{aligned}$$

welches offenbar unlösbar ist: Q liegt nicht auf der Geraden g.