Übungen (V4)

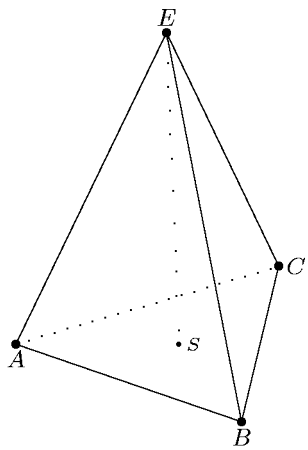
Gegeben ist das in Übung (V2), Aufgabe 5.c) bestimmte Parallelogramm $ABCD$ mit $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$, $C = (4, 1, 2)$, $D = (3, 2, 3)$.

1) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Diagonalen dieses Parallelogramms und bestätigen Sie, dass er die Diagonalen halbiert.
2) Die *Seitenhalbierenden* eines Dreiecks sind die Geraden durch eine Ecke und den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt. Bestimmen Sie Parameterdarstellungen für die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.
3) Bestätigen Sie an diesem Dreieck, dass sich die drei Seitenhalbierenden in einem einzigen Punkt schneiden. Dies ist der *Schwerpunkt* S des Dreiecks ABC. Zeigen Sie, dass sein Ortsvektor gegeben ist durch

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) .$$

4) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt des Dreiecks ABC auf einer der Diagonalen des Parallelogramms $ABCD$ liegt.
5) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene $e(A, B, C)$ durch die Punkte A, B, C an. Stellen Sie fest, welche der Punkte D, $E = (-1, 2, 1)$, $F = (0, 1, 2)$ in der Ebene e liegen.

Wir betrachten das Tetraeder $ABCE$. (Warum bilden diese 4 Punkte ein Tetraeder?)



6) Berechnen Sie die Schwerpunkte aller Begrenzungsflächen des Tetraeders $ABCE$.
7) Stellen Sie Parameterdarstellungen auf für die *Schwerelinien* des Tetraeders, d. h. für die Verbindungsgeraden der Ecken des Tetraeders mit den Schwerpunkten der gegenüberliegenden Begrenzungsflächen.
8) Zeigen Sie, dass sich alle 4 Schwerelinien in einem einzigen Punkt schneiden. Dies ist der sog. *Schwerpunkt* des Tetraeders.

Übungen (V4) — Lösungen

1) Parameterdarstellungen für die beiden Diagonalen sind

$$X \in g(A,C) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } r \in \mathbb{R},$$

$$X \in g(B,D) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } s \in \mathbb{R},$$

Schnitt $g(A,C) \cap g(B,D)$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2r \\ -2s \\ 2r-4s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff r = \frac{1}{2}, \ s = \frac{1}{2}, \ 1-2 = -1 \iff r = s = \frac{1}{2}.$$

Damit schneiden sich beide Diagonalen in einem Punkt; der zugehörige Parameterwert ist jeweils $1/2$, so dass der Schnittpunkt der Mittelpunkt M_{AC} zwischen A und C bzw. M_{BD} zwischen B und D ist.
Dieser Mittelpunkt M_{AC} zwischen den beiden Punkten A, C hat den Ortsvektor

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_{AC}} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}). \end{aligned}$$

Damit hat der Mittelpunkt zwischen zwei Punkten als Ortsvektor gerade das *arithmetische Mittel* der Ortsvektoren der beiden Punkte. Aus Übung (1), Aufgabe 6 wissen wir:

Diese Formel für den Mittelpunkt zweier Punkte gilt allgemein!

Im vorliegenden Beispiel ergibt sich explizit $M_{AC} = (3,1,1) = M_{BD}$.

2) Wir bestimmen zunächst die Seitenmittelpunkte

$$\begin{aligned} A' &= M_{BC} = (\tfrac{7}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), \\ B' &= M_{AC} = (3,1,1), \\ C' &= M_{AB} = (\tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Als Parameterdarstellungen erhält man dann

$$X \in g(A,A') \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } r \in \mathbb{R},$$

$$X \in g(B,B') \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } s \in \mathbb{R},$$

$$X \in g(C,C') \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } t \in \mathbb{R}.$$

3) Schnitt $g(A, A') \cap g(B, B')$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix} \frac{3}{2} r & & = & 1 \\ -\frac{1}{2} r & - \quad s & = & -1 \\ \frac{1}{2} r & - \quad 2s & = & -1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} r & & = & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & + \quad s & = & 1 \\ \frac{1}{3} & - \quad 2s & = & -1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} & r & = & \frac{2}{3} \\ & s & = & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} & & = & -1 \end{bmatrix} \iff r = s = \frac{2}{3}\,.$$

Die beiden Seitenhalbierenden $g(A, A')$ und $g(B, B')$ schneiden sich also und der Schnittpunkt $S = S_{ABC}$ hat den Ortsvektor

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}\,.$$

Man kann zwei andere Seitenhalbierende zum Schnitt bringen und feststellen, dass diese denselben Schnittpunkt haben. Es ist jedoch einfacher, zu überprüfen, dass der gefundene Punkt S auch auf der dritten Seitenhalbierenden liegt:

$$\begin{aligned} S \in g(C, C') &\iff \overrightarrow{CS} = t \cdot \overrightarrow{CC'} \text{ für ein } t \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 \\ -1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} \text{ für ein } t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Als Lösung lässt sich unschwer $t = 2/3$ erkennen.
Berechnet man nun das arithmetische Mittel der Ortsvektoren von A, B und C, so ergibt sich wie behauptet

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OS}\,.$$

In Übung (V5), Aufgabe 1 c) werden wir zeigen:

Diese Formel für den Schwerpunkt gilt in jedem Dreieck!

4) Der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden, er liegt also insbesondere auf der Seitenhalbierenden AM_{BC}. Nun ist M_{BC} der Mittelpunkt der Diagonalen BC des Parallelogramms[1)], liegt also (nach Aufg. 1) auch auf der Diagonalen AD. Dies bedeutet: Die Seitenhalbierende AM_{BC} ist mit der Diagonalen AD identisch, folglich liegt der Schwerpunkt des Dreiecks auf dieser Diagonalen.

[1)] Hier haben wir den Punkt D des Parallelogramms gegenüber von A gelegt. Für die anderen Fälle argumentiert man entsprechend.

5) Eine Parameterdarstellung für die Ebene $e(A,B,C)$ durch drei gegebene Punkte A, B, C erhält man durch

$$X \in e(A,B,C) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \quad \text{für geeignete } r, s \in \mathbb{R}\,.$$

In unserem konreten Fall also

$$X \in e(A,B,C) \iff \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Bereits ohne Rechnung kann man entscheiden, dass D in der Ebene e liegt, weil $ABCD$ zusammen ein Parallelogramm bilden.

Um zu überprüfen, ob ein Punkt (etwa E) in dieser Ebene liegt, muss man untersuchen, ob sein Ortsvektor sich in der Form $(*)$ darstellen lässt, d. h. ob die Gleichung

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

(mindestens) eine Lösung (r,s) hat. Die Vektorgleichung $(**)$ ist ein lineares Gleichungssystem von 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten (r, s):

$$\left[\begin{array}{rcrcr} r & + & 2\,s & = & -3 \\ -\,r & & & = & 1 \\ -\,r & + & 2\,s & = & 1 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{rcrcr} r & & & = & -1 \\ -\,1 & + & 2\,s & = & -3 \\ 1 & + & 2\,s & = & 1 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{rcr} r & = & -1 \\ 2\,s & = & -2 \\ 2\,s & = & 0 \end{array}\right]$$

Die letzten beiden Gleichungen für s widersprechen einander: Es gibt also keine Lösung! Damit liegt der Punkt E nicht in der Ebene e.

Für F erhält man mit einer entsprechenden Rechnung ebenfalls: F liegt nicht in der Ebene e. Für den Punkt D hätte man eine eindeutige Lösung $r = -1$, $s = 1$ erhalten.

6) Die Punkte $ABCE$ bilden ein Tetraeder, da die 4 Punkte nicht in einer Ebene liegen: E lag nicht in der Ebene durch A, B, C.

Der Schwerpunkt S_{ABC} des Dreiecks ABC ist bereits bestimmt: $S_{ABC} = S = (3, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Mit der Formel aus Aufgabe 3) erhält man ebenso leicht die anderen Schwerpunkte: $S_{ABE} = (\frac{4}{3}, 1, 0)$, $S_{ACE} = (\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1)$, $S_{BCE} = (2, 1, \frac{2}{3})$.

7) Die Schwerelinie durch den Eckpunkt E werde mit s_E bezeichnet; eine Parameterdarstellung für sie ist

$$s_E : x = \overrightarrow{OE} + r \cdot \overrightarrow{ES_{ABC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R})\,.$$

Entsprechend die anderen Parameterdarstellungen

$$s_A : x = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AS_{BCE}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})\,,$$

$$s_B : x = \overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{BS_{ACE}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4/3 \\ 4/3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})\,,$$

$$s_C : x = \overrightarrow{OC} + u \cdot \overrightarrow{CS_{ABE}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -8/3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R})\,.$$

8) Die 4 Schwerelinien schneiden sich in einem einzigen Punkt, dem *Schwerpunkt* $S = S_{ABCE}$ des Tetraeders; dieser hat die Koordinaten

$$S_{ABCE} = (2, 1, \frac{1}{2}) \, .$$

In allen 4 Parameterdarstellungen aus der vorangehenden Aufgabe hat S den Parameterwert

$$r = s = t = u = \frac{3}{4} \, .$$

In Analogie zur Formel aus Aufgabe 3) für den Schwerpunkt eines Dreiecks gilt jetzt für den Schwerpunkt eines Tetraeders:

$$\overrightarrow{OS_{ABCE}} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}) \, .$$

(Prüfen Sie dies nach!) In Übung (V4), Aufgabe 5) werden wir allgemein zeigen:

Diese Formel für den Schwerpunkt gilt in jedem Tetraeder!