Übungen (V6)

1) Sind die folgenden Systeme von Vektoren linear ab- oder linear unabhängig? Stellen Sie wenn möglich einen der Vektoren als Linearkombination der übrigen dar.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Begründen Sie, dass diese linear unabhängig sind.
b) Welche der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

sind Linearkombinationen von $\vec{u}$, $\vec{v}$?
c) Untersuchen Sie nun allgemein, unter welcher Bedingung ein beliebiger Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

eine Linearkombination von $\vec{u}$, $\vec{v}$ ist. Überprüfen Sie Ihre Bedingung an den Beispielen von b).

3) Gegeben sind die Punkte $O = (0, 0, 0)$, $P = (2, -1, 1)$, $Q = (-1, 0, 3)$.
a) Zeigen Sie, dass diese drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.
b) Es sei $e = e(O, P, Q)$ die Ebene durch diese drei Punkte. Welche der Punkte

$$A = (7, -3, 0)\,,\ B = (3, -2, 2)\,,\ C = (-5, 2, 1)\,,\ D = (2, -2, 8)\,,\ E = (-1, 2, 9)$$

liegen in der Ebene e? Überprüfen Sie Ihre Bedingung an den Beispielen von a).
c) Welche Bedingung muss ein beliebiger Punkt $X = (x_1, x_2, x_3)$ erfüllen, damit er zur Ebene e gehört?
d) Was fällt Ihnen beim Vergleich Ihrer Rechnungen zu dieser und der vorangehenden Aufgabe auf? Erläutern Sie die Zusammenhänge.

Übungen (V6) — Lösungen

1) Wir bilden aus den gegebenen Vektoren jeweils eine Matrix und bestimmen durch Gauß-Elimination den Rang. Ist dieser gleich der Zahl der Vektoren, so sind diese linear unabhängig, andernfalls sind sie linear abhängig.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

$r = 3 = n$, die Vektoren sind linear unabhängig.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & 13 & 13 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$r = 2 < n = 3$, die Vektoren sind linear abhängig.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$r = 2 < n = 3$, die Vektoren sind linear abhängig.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

$r = 3 = n$, die Vektoren sind linear unabhängig.

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 19 & -9 \\ 0 & 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 19 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -91 \end{pmatrix}$.

$r = 4 = n$, die Vektoren sind linear unabhängig.

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$r = 3 < n = 4$, die Vektoren sind linear abhängig.

Um im Falle der linearen Abhängigkeit einen der Vektoren als Linearkombination der übrigen darzustellen, löst man das homogene lineare Gleichungssystem mit der umgeformten Koeffizientenmatrix von unten nach oben auf.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$: $-8r_2 - 8r_3 = 0 \iff r_2 = -r_3$; $r_1 = -4(-r_3) - 2r_3 = 2r_3$. Mit $r_3 = 1$ erhält man $r_2 = -1$ und $r_1 = 2$ als eine nichttriviale Lösung (von unendlich vielen):

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ergibt: $r_2 = -r_3$ und $r_1 = -3(-r_3) + r_3 = 4r_3$ und damit

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

f) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ergibt von unten nach oben aufgelöst: $r_3 = r_4$; $2r_2 = r_4 - 3r_4 = -2r_4 \iff r_2 = -r_4$ und $r_1 = r_4$. Mit $r_4 = 1$ erhält man so

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) a) Wir müssen den Rang der Matrix bestimmen, die aus den beiden Vektoren gebildet wird. Dies ist in den Rechnungen zu b) enthalten.
b) Wir müssen untersuchen, ob das lineare Gleichungssystem

$$r\vec{u} + s\vec{v} = \vec{a}$$

lösbar ist (und dasselbe mit allen anderen Vektoren $\vec{b}, \ldots, \vec{e}$ als rechten Seiten). Dazu führen wir Gauß-Elimination durch. Da die dazu notwendigen Umformungen allein von der linken Seite (den Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$) bestimmt werden, kann man diese 5 Rechnungen kombiniert durchführen. Dazu behandelt man alle fünf rechten Seiten nebeneinander in einer Matrix und führt Gauß-Elimination durch:

$$\left(\begin{array}{rr|r|r|r|r|r} 2 & -1 & 7 & 3 & -5 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 8 & 9 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r|r|r|r|r} 2 & -1 & 7 & 3 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -7 & 1 & 7 & 14 & 19 \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r|r|r|r|r} 2 & -1 & 7 & 3 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & -40 \end{array}\right)$$

Man erkennt zunächst, dass die Koeffizientenmatrix den Rang 2 hat: Die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ sind also linear unabhängig. Die letzte Nullzeile der Koeffizientenmatrix bestimmt jeweils eine Lösbarkeitsbedingung. Man erkennt, dass bei den rechten Seiten $\vec{b}$ und $\vec{e}$ die Lösbarkeitsbedingung *nicht* erfüllt ist, diese Vektoren also *keine* Linearkombination von $\vec{u}, \vec{v}$ sind. Alle anderen Vektoren sind dagegen Linearkombinationen von $\vec{u}, \vec{v}$.
c) Durch diese kombinierte Rechnung ist der Aufwand schon etwas reduziert worden. Wir wollen nun *allgemein* die Frage untersuchen. Dazu müssen wir Gauß-Elimination an der erweiterten Matrix mit *beliebiger* rechter Seite durchführen:

$$\left(\begin{array}{rr|c} 2 & -1 & x_1 \\ -1 & 0 & x_2 \\ 1 & 3 & x_3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|c} 2 & -1 & x_1 \\ 0 & -1 & x_1 + 2x_2 \\ 0 & 7 & 2x_3 - x_1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|c} 2 & -1 & x_1 \\ 0 & -1 & x_1 + 2x_2 \\ 0 & 0 & -6x_1 - 14x_2 - 2x_3 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn in der letzten Zeile auf der rechten Seite 0 steht, wenn also gilt: $-6x_1 - 14x_2 - 2x_3 = 0 \iff 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 0$. Also gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ist Linearkombination von } \vec{u}, \vec{v} \iff 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 0\,.$$

Dies kann man nun für jeden beliebigen Vektor (auch die 5 oben genannten) überprüfen.

3) a) Die drei Punkte liegen nicht auf einer Geraden, wenn die Vektoren

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u}\,,\ \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

linear unabhängig sind. Antwort: Ja, Rechnung siehe 2).

b) Auch dieser Aufgabenteil ist identisch mit 2):

$$A \in e(O,P,Q) \iff \overrightarrow{OA} = r\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OQ} \iff \vec{a} = r\vec{u} + s\vec{v}\,.$$

Genauso für die anderen Punkte. Die Antwort (gemäß den Rechnungen in 2)) lautet:

$$A, C, D \in e\,,\ \ B, E \notin e\,.$$

c) Wieder wie in 2):

$$X = (x_1, x_2, x_3) \in e \iff \vec{x} = r\vec{u} + s\vec{v} \iff 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 0\,.$$

d) Aufgabe 3 ist identisch mit 2), nur in anderer geometrischer Formulierung. Die Zusammenhänge sind dabei:

1. A, B, C Dreieck $\iff$ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ linear unabhängig $\iff$ $\operatorname{rg}\left(\overrightarrow{AB} \,\middle|\, \overrightarrow{AC} \right) = 2\,.$

2. $X \in e(A,B,C) \iff \overrightarrow{AX}$ Linearkombination von $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \iff$
   Gleichungssystem mit der erweiterten Matrix $\left(\overrightarrow{AB} \,\middle|\, \overrightarrow{AC} \,\middle\|\, \overrightarrow{AX} \right)$ ist lösbar.