

Übungen (V7)

- 1) Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC .
- a) Bestimmen Sie allgemein den Schnittpunkt zweier Seitenhalbierender.
[Ergebnis: Der Schnittpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2 : 1$, wobei die längere Seite beim Eckpunkt liegt.]
- b) Folgern Sie, dass sich in einem beliebigen Dreieck alle *drei* Seitenhalbierenden in demselben Punkt schneiden. Dies ist der sog. *Schwerpunkt* S des Dreiecks.
- c) Zeigen Sie, dass für den Schwerpunkt S (und jeden beliebigen Punkt O) die folgende Berechnungsformel gilt

$$\vec{OS} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

- 2) a) Zeigen Sie, dass ein Viereck $ABCD$ mit 2 Paaren paralleler Seiten ein Parallelogramm ist (Definition siehe Übung (V2), Aufgabe 5).
- b) Zeigen Sie, dass sich die Diagonalen eines beliebigen Parallelogramms gegenseitig halbieren.
- c) Zeigen Sie, dass ein Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen sich gegenseitig halbieren, ein Parallelogramm sein muss.
- 3) Ein *Trapez* ist ein ebenes Viereck mit *einem* Paar paralleler Seiten. Sei $ABCD$ ein solches Trapez, wobei $\vec{DC} = k \cdot \vec{AB}$ sei. (Welche geometrische Bedeutung hat k ?)
- a) In welchem Verhältnis teilt der Diagonalenschnittpunkt die beiden Diagonalen?
- b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis am Spezialfall $k = 1$. (Was bedeutet dieser geometrisch?)
- 4) Gegeben sei ein beliebiges Tetraeder $ABCD$. Unter einer *Schwerelinie* eines Tetraeders versteht man eine Gerade durch eine Ecke und den Schwerpunkt des gegenüberliegenden Dreiecks.
- a) Bestimmen Sie allgemein den Schnittpunkt zweier Schwerelinien.
[Ergebnis: Der Schnittpunkt zweier Schwerelinien teilt diese im Verhältnis $3 : 1$.]
- b) Folgern Sie, dass sich alle vier Schwerelinien in einem einzigen Punkt schneiden, dem sog. *Schwerpunkt* S des Tetraeders.
- c) Zeigen Sie, dass für diesen Schwerpunkt S (und jeden beliebigen Punkt O) gilt:

$$\vec{OS} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}).$$

- 5) Gegeben ist ein beliebiges Tetraeder $ABCD$.
- a) Verbindet man die Mittelpunkte einander *gegenüberliegender* (d. h. sich nicht schneidender) Kanten (also M_{AB} mit M_{CD} , M_{AC} mit M_{BD} und M_{AD} mit M_{BC}), so schneiden sich diese Geraden in einem einzigen Punkt. Welcher ist es?
- b) Zeigen Sie, dass die *benachbarten* Kantenmittelpunkte M_{AB} , M_{BC} , M_{CD} , M_{DA} ein Parallelogramm bilden und daher in einer Ebene liegen. Für welche anderen 4 benachbarten Kantenmittelpunkte gilt dies ebenso?

Übungen (V7) — Lösungen

- 1) Da ABC ein Dreieck ist, sind die drei Punkte nicht *kollinear* (d. h. sie liegen nicht alle auf einer Geraden). Dies bedeutet, dass die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ linear unabhängig sind. Wir wählen als affines Koordinatensystem der Ebene, in der ABC (und alle gesuchten Punkte) liegen, den *Ausgangspunkt* A und die linear unabhängigen *Richtungsvektoren* \vec{u}, \vec{v} .
- a) Wir untersuchen die Seitenhalbierenden $g(A, M_{BC})$ und $g(B, M_{AC})$. Dazu stellen wir zunächst Bedingungen dafür auf, dass ein Punkt X zu diesen Geraden gehört:

$$\begin{aligned} X \in g(A, M_{BC}) &\iff \overrightarrow{AX} = r \cdot \overrightarrow{AM_{BC}} \quad (r \in \mathbb{R}). \\ X \in g(B, M_{AC}) &\iff \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BM_{AC}} \quad (s \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Als nächsten Schritt stelle man in diesen Parameterdarstellungen die rechten Seiten als *Linearkombinationen* der zugrundegelegten linear unabhängigen Vektoren \vec{u}, \vec{v} dar. Dabei orientiere man sich an einer kleinen Skizze.

$$\begin{aligned} X \in g(A, M_{BC}) &\iff \overrightarrow{AX} = r \overrightarrow{AM_{BC}} = r(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) \\ &= r(\vec{u} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})) = r(\vec{u} + \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{v})) \\ &= \frac{r}{2} \cdot \vec{u} + \frac{r}{2} \cdot \vec{v}. \\ X \in g(B, M_{AC}) &\iff \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BM_{AC}} = \vec{u} + s(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}) \\ &= \vec{u} + s(-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) = (1-s) \cdot \vec{u} + \frac{s}{2} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Nun ist der gesuchte Schnittpunkt dadurch charakterisiert, dass er zu *beiden* Geraden gehört, also *beide* obigen Darstellungen für \overrightarrow{AX} gelten. Dies ergibt die folgende Vektorgleichung:

$$X \in g(A, M_{BC}) \cap g(B, M_{AC}) \iff \overrightarrow{AX} = \frac{r}{2} \cdot \vec{u} + \frac{r}{2} \cdot \vec{v} = (1-s) \cdot \vec{u} + \frac{s}{2} \cdot \vec{v} \quad (r, s \in \mathbb{R}).$$

Da \vec{u}, \vec{v} linear unabhängig sind, kann man in dieser Vektorgleichung nun *Koeffizientenvergleich* durchführen und erhält das folgende lineare Gleichungssystem für r, s :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{r}{2} = 1-s \\ \frac{r}{2} = \frac{s}{2} \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} r = s \\ \frac{r}{2} = 1-r \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} r = s \\ r = \frac{2}{3} \end{array} \right] \iff r = s = \frac{2}{3}.$$

Dies bedeutet, dass sich die beiden Seitenhalbierenden in einem Punkt S schneiden, und dass dieser beide Seitenhalbierende im Verhältnis $\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$ teilt. Der größere Abschnitt liegt dabei auf Seiten der jeweiligen Ecke.

b) Da die Überlegungen von a) für *jedes* beliebige Dreieck und je zwei ebenfalls beliebige Seitenhalbierende darin gelten, muss auch die dritte Seitenhalbierende die anderen im genannten Verhältnis teilen, also in demselben Punkt S schneiden: Alle *drei* Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt.

c) Den Schnittpunkt S erhält man, indem man einen der gefundenen Parameterwerte in die zugehörige Parameterdarstellung einsetzt:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2/3}{2} \cdot \vec{u} + \frac{2/3}{2} \cdot \vec{v} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Dies formt man wie folgt zum gewünschten Ergebnis um:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(3 \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).\end{aligned}$$

- 2) a) Da $ABCD$ ein Viereck bilden, können keine drei Punkte auf einer Geraden liegen, also müssen die Vektoren $u = \overrightarrow{AB}$ und $v = \overrightarrow{AC}$ unterschiedliche Richtung haben: sie sind linear unabhängig.

Wegen der Parallelität der Seiten gilt $\overrightarrow{DC} = r \cdot \overrightarrow{AB} = r \cdot u$ und $\overrightarrow{BC} = s \cdot \overrightarrow{AD} = s \cdot v$ mit geeigneten Koeffizienten $r, s \in \mathbb{R}$. Wir erhalten daraus 2 verschiedene Darstellungen für eine der Diagonalen:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = u + s \cdot v, \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = v + r \cdot u = r \cdot u + v.\end{aligned}$$

Da u, v linear unabhängig sind, folgt daraus durch Koeffizientenvergleich $1 = r$ (Koeffizienten von u) und $s = 1$ (Koeffizienten von v). Dies bedeutet aber gerade $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$: $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

b) Sei $ABCD$ das Parallelogramm. Das bedeutet, dass die vier Punkte nicht auf einer Geraden liegen und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ist. Wir wählen als affines Koordinatensystem den Punkt A und die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Diese Vektoren sind linear unabhängig, denn andernfalls lägen die Punkte A, B, D auf einer Geraden. Wegen $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ läge dann auch C auf dieser Geraden, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wir stellen zunächst Parameterdarstellungen für die beiden Diagonalen auf:

$$\begin{aligned}X \in g(A, C) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = r \cdot \overrightarrow{AC} && \text{für ein } r \in \mathbb{R}, \\ X \in g(B, D) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD} && \text{für ein } s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Wir stellen die rechten Seiten als Linearkombinationen von u, v dar:

$$\begin{aligned}X \in g(A, C) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = r \cdot \overrightarrow{AC} = r \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = r \cdot u + r \cdot v, \\ X \in g(B, D) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD} = u + s \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= u + s \cdot (-u + v) = (1 - s) \cdot u + s \cdot v.\end{aligned}$$

Zur Berechnung des Schnittpunkts beider Diagonalen lösen wir die durch Vergleich beider Parameterdarstellungen entstehende Vektorgleichung mittels Koeffizientenvergleich (u, v sind linear unabhängig!):

$$\begin{aligned}r \cdot u + r \cdot v &= (1 - s) \cdot u + s \cdot v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} r & = & 1 - s \\ r & = & s \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} r & = & s \\ r & = & 1 - r \end{bmatrix} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} r & = & s \\ 2r & = & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow r = s = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass sich beide Diagonalen schneiden, und zwar im (gemeinsamen) Mittelpunkt beider Diagonalen.

c) Sei $ABCD$ das Viereck und S der Diagonalschnittpunkt. Nach Voraussetzung ist er der Mittelpunkt beider Diagonalen, d. h. $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Letzteres ergibt $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Vergleicht man beide Darstellungen für \overrightarrow{AS} so erhält man

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Damit gilt $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ und dies ist nach Übung (V2), Aufgabe 5 eine der Charakterisierungen von Parallelogrammen.

- 3) Die Gleichung $\overrightarrow{DC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ zeigt zunächst an, dass das Paar paralleler Seiten durch die Vektoren \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{DC} gegeben ist. k gibt dabei das Längenverhältnis von \overrightarrow{DC} zu \overrightarrow{AB} an.
 a) Wir wählen als affines Koordinatensystem den Punkt A mit den linear unabhängigen Richtungsvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Als Parameterdarstellungen der beiden Diagonalen erhalten wir

$$\begin{aligned} g(A, C) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AC} & (r \in \mathbb{R}), \\ g(B, D) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD} & (s \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Wir stellen die rechten Seiten als Linearkombinationen von \vec{u}, \vec{v} dar:

$$\begin{aligned} g(A, C) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AC} = r \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \\ &= r(\vec{v} + k \cdot \vec{u}) = kr \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v}, \\ g(B, D) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{u} + s \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \vec{u} + s \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = (1 - s) \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Schnittpunkts beider Diagonalen lösen wir die durch Vergleich beider Parameterdarstellungen entstehende Vektorgleichung mittels Koeffizientenvergleich (\vec{u}, \vec{v} sind linear unabhängig!):

$$\begin{aligned} kr \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v} &= (1 - s) \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \iff \begin{bmatrix} kr &= & 1 - s \\ r &= & s \end{bmatrix} \\ \iff \begin{bmatrix} kr &= & 1 - r \\ r &= & s \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} (k + 1)r &= & 1 \\ r &= & s \end{bmatrix} \iff r = s = \frac{1}{k + 1}. \end{aligned}$$

Die Diagonalen schneiden sich also in einem Punkt, der beide Diagonalen in demselben Verhältnis teilt, nämlich im Verhältnis $\frac{1}{k+1} : \frac{k}{k+1} = 1 : k$. Dies ist dasselbe Verhältnis wie das der parallelen Trapezseiten zueinander!

- In einem Trapez teilt der Diagonalschnittpunkt die Diagonalen in dem Verhältnis, in dem auch die angrenzenden parallelen Seiten zueinander stehen.

- b) Im Spezialfall $k = 1$ ist das Trapez ein Parallelogramm und die Diagonalen teilen sich im Verhältnis $1 : k = 1 : 1$, d. h. sie halbieren sich.
 4) Die vier Punkte $ABCD$ bilden ein Tetraeder, d. h. sie liegen nicht in einer Ebene. Also sind die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}, \vec{w} = \overrightarrow{AD}$ linear unabhängig. Wir wählen als affines Koordinatensystem für diese (räumliche) Problemstellung den Punkt A mit diesen drei Vektoren.

a) Es bezeichne allgemein S_{ABC} den Schwerpunkt eines Dreiecks ABC . Dann können wir nun zunächst die Parameterdarstellungen zweier Schwerlinien des Tetraeders aufstellen:

$$\begin{aligned} g(A, S_{BCD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AS_{BCD}} & (r \in \mathbb{R}), \\ g(B, S_{ACD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BS_{ACD}} & (s \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Um nun die rechten Seiten als Linearkombinationen der drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ darzustellen, müssen wir die Richtungsvektoren der Geraden $\overrightarrow{AS_{BCD}}$ und $\overrightarrow{BS_{ACD}}$ so darstellen. Wir benutzen dazu das Ergebnis aus Aufgabe 1). Dieses beschreibt den Verbindungsvektor von einem beliebigen Punkt (dort O genannt) zum Schwerpunkt eines beliebigen Dreiecks (dort ABC) als arithmetisches Mittel der Verbindungsvektoren von demselben Punkt zu den drei Eckpunkten. Angewendet auf $\overrightarrow{AS_{BCD}}$ ergibt sich (A als Ausgangspunkt, BCD als Dreieck):

$$\overrightarrow{AS_{BCD}} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}),$$

und entsprechend

$$\overrightarrow{BS_{ACD}} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}).$$

Nun können wir die Parameterdarstellungen mittels der Vektoren des affinen Koordinatensystems ausdrücken:

$$\begin{aligned} g(A, S_{BCD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AS_{BCD}} = r \cdot \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{r}{3} \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \frac{r}{3} \cdot \vec{u} + \frac{r}{3} \cdot \vec{v} + \frac{r}{3} \cdot \vec{w}, \\ g(B, S_{ACD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BS_{ACD}} = \vec{u} + s \cdot \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \vec{u} + \frac{s}{3} \cdot (\overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})) \\ &= \vec{u} + \frac{s}{3} \cdot (-3\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = (1-s) \cdot \vec{u} + \frac{s}{3} \cdot \vec{v} + \frac{s}{3} \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir unmittelbar $r = s$ und

$$\frac{r}{3} = 1 - s = 1 - r \iff \frac{4}{3} \cdot r = 1 \iff r = \frac{3}{4}.$$

Aus $r = s = \frac{3}{4}$ entnehmen wir, dass sich die beiden Schwerlinien in einem Punkt schneiden, und dass dieser *beide* Schwerlinien in demselben Verhältnis $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3 : 1$ teilt. Dabei liegt der längere Abschnitt auf Seiten der Ecke des Tetraeders.

b) Da das Ergebnis von a) unabhängig vom Tetraeder und den Schwerlinien immer dasselbe ist, müssen auch die anderen Schwerlinien die erste in dem genannten Verhältnis teilen, also in *demselben* Punkt S schneiden.

c) Gemäß a) gilt für den Schwerpunkt S des Tetraeders

$$\overrightarrow{AS} = \frac{3/4}{3} \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

Wie in Aufgabe 1) kann man dies äquivalent umformen (man addiere auf beiden Seiten den Vektor \overrightarrow{OA}) zu

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

- *Der Verbindungsvektor von einem beliebigen Punkt O zum Schwerpunkt eines Tetraeders ist das arithmetische Mittel der Verbindungsvektoren von diesem Punkt zu den 4 Eckpunkten des Tetraeders.*

5) Wir wählen als affines Koordinatensystem wieder den Punkt A sowie die drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

a) Wir berechnen den Schnittpunkt zweier dieser Verbindungslinien einander gegenüberliegender Kantenmittelpunkte.

$$\begin{aligned} g(M_{AB}, M_{CD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AM_{AB}} + r \cdot \overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} \quad (r \in \mathbb{R}), \\ g(M_{AC}, M_{BD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AM_{AC}} + s \cdot \overrightarrow{M_{AC}M_{BD}} \quad (s \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst die beiden Verbindungsvektoren der Mittelpunkte als Linearkombinationen von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Wir benutzen dabei die Formel zur Berechnung von Mittelpunkten

$$\overrightarrow{OM_{AB}} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

die für beliebige Punkte O, A, B gilt. (Siehe Übungen (V3), Aufgabe 1. Beachten Sie die Analogie mit der Berechnungsformel für die Schwerpunkte von Dreieck und Tetraeder! Der

Mittelpunkt zwischen zwei Punkten ist im Grunde nichts anderes als der Schwerpunkt der Verbindungsstrecke.)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} &= \overrightarrow{M_{AB}A} + \overrightarrow{AM_{CD}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}. \\ \overrightarrow{M_{AC}M_{BD}} &= \overrightarrow{M_{AC}A} + \overrightarrow{AM_{BD}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}.\end{aligned}$$

Damit lauten die Parameterdarstellungen der beiden Verbindungsgeraden

$$\begin{aligned}g(M_{AB}, M_{CD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AM_{AB}} + r \cdot \overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \vec{u} + r \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \vec{u} + \frac{1}{2} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \cdot \vec{w}\right) \\ &= \frac{1-r}{2} \cdot \vec{u} + \frac{r}{2} \cdot \vec{v} + \frac{r}{2} \cdot \vec{w} \\ g(M_{AC}, M_{BD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AM_{AC}} + s \cdot \overrightarrow{M_{AC}M_{BD}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \vec{v} + s \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \vec{u} - \frac{1}{2} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \cdot \vec{w}\right) \\ &= \frac{s}{2} \cdot \vec{u} + \frac{1-s}{2} \cdot \vec{v} + \frac{s}{2} \cdot \vec{w}\end{aligned}$$

Wir berechnen nun den Schnittpunkt dieser beiden Geraden:

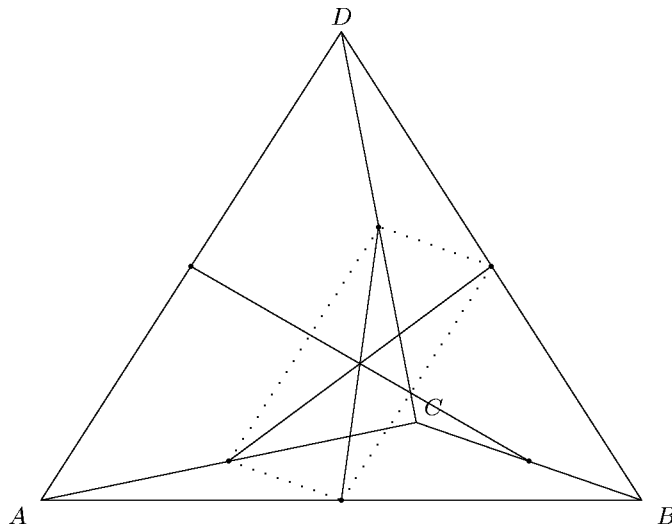
$$\begin{aligned}\frac{1-r}{2} \cdot \vec{u} + \frac{r}{2} \cdot \vec{v} + \frac{r}{2} \cdot \vec{w} &= \frac{s}{2} \cdot \vec{u} + \frac{1-s}{2} \cdot \vec{v} + \frac{s}{2} \cdot \vec{w} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-r & = & s \\ r & = & 1-s \\ r & = & s \end{bmatrix} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-r & = & r \\ r & = & s \end{bmatrix} \Leftrightarrow r = s = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Da diese Werte unabhängig vom Tetraeder und den gewählten gegenüberliegenden Kantenmittelpunkten ist, folgt wieder, dass auch die dritte Verbindungsgerade durch denselben Schnittpunkt S verlaufen muss. Für den Schnittpunkt erhält man aus $r = 1/2$:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1/2}{2} \cdot \vec{u} + \frac{1/2}{2} \cdot \vec{v} + \frac{1/2}{2} \cdot \vec{w} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

Der Vergleich mit der vorangehenden Aufgabe zeigt, dass S der Schwerpunkt des Tetraeders ist.

Skizze:



b) Es ist

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{AB}B} + \overrightarrow{BM_{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Genauso berechnet man $\overrightarrow{M_{DA}M_{CD}} = \overrightarrow{M_{AD}M_{DC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ und stellt die Übereinstimmung fest: $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ ist ein Parallelogramm. Dabei sind die Mittelpunkte der Reihe nach entsprechend der Reihenfolge $ABCD$ gebildet. Die bisherigen Überlegungen gelten für *jede* Reihenfolge der 4 Punkte: $ABDC$, $ACBD$. (Es gibt noch drei weitere Anordnungen der 4 Punkte $ACDB$, $ADBC$ und $ADCB$, die aber zu keinem neuen Parallelogramm führen.) Die in a) betrachteten Verbindungsgeraden *gegenüberliegender* Kantenmitten sind gerade die Diagonalen dieser Parallelogramme, die sich bekanntlich gegenseitig halbieren (daher in a) $r = s = 1/2$). Nach a) ist der Tetraederschwerpunkt der Diagonalschnittpunkte aller drei Parallelogramme.

