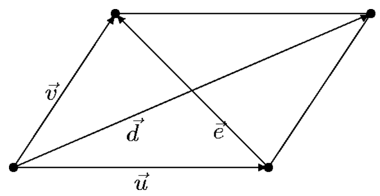
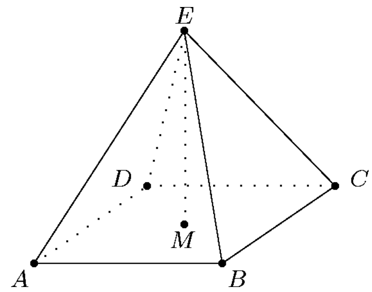
Übungen (V8)

1) Zeigen Sie für ein beliebiges Parallelogramm die Gültigkeit der folgenden *Parallelogrammrelation:*
Die Summe der Längenquadrate beider Diagonalen ist gleich der Summe der Längenquadrate der vier Seiten.
Mit den Bezeichnungen der nebenstehenden Skizze bedeutet dies:

$$|\vec{d}|^2 + |\vec{e}|^2 = 2\,|\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{v}|^2 \ .$$



2) Gegeben sind 5 Punkte $A = (3,-4,-1)$, $B = (5,0,3)$, $C = (9,2,-1)$, $D = (7,-2,-5)$ und $E = (0,5,-4)$.
a) Zeigen Sie, dass $ABCD$ die Ecken eines Rechtecks sind. Wie lang sind die Seiten?
b) Zeigen Sie, dass die 5 Punkte $ABCDE$ eine *senkrechte quadratische Pyramide* bilden. Dies bedeutet: Die Spitze E liegt *orthogonal* über dem Mittelpunkt der *quadratischen* Grundfläche $ABCD$ (siehe Skizze).
c) Wie hoch ist die Pyramide?



3) Gegeben ist das Dreieck mit den Ecken $A = (2,3)$, $B = (6,7)$, $C = (7,11)$. Fertigen Sie parallel zur Lösung der folgenden Aufgabe eine genaue Skizze an und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse daran.
a) Bestimmen Sie für alle drei Höhen die Höhenfußpunkte und die Längen der Höhen.
b) Stellen Sie fest, welche Höhenfußpunkte auf der jeweiligen Dreiecksseite *zwischen* den Ecken liegen, und welche *außerhalb.*

4) Es sei ABC ein Dreieck und $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Es bezeichne H den Schnittpunkt der Höhe durch B mit der Höhe durch C (Skizze).
a) Begründen Sie der Reihe nach:

$$\overrightarrow{BH} \perp \vec{v}\,,\ \overrightarrow{AH} = \vec{u} + \overrightarrow{BH}\ ,\ \overrightarrow{AH} \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet \vec{v}\,,$$
$$\overrightarrow{CH} \perp \vec{u}\,,\ \overrightarrow{AH} = \vec{v} + \overrightarrow{CH}\ ,\ \overrightarrow{AH} \bullet \vec{u} = \vec{v} \bullet \vec{u}\,,$$
$$\overrightarrow{AH} \bullet (\vec{v} - \vec{u}) = 0\,.$$

b) Folgern Sie: H liegt auf der Höhe durch A; die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt.

5) Aus der Physik übernehmen wir: Ein Körper (mit ebenen Begrenzungsflächen) steht stabil auf einer seiner Begrenzungsflächen, wenn das *Lot* vom *Schwerpunkt* des Körpers auf die Bodenebene seinen Fußpunkt im *Innern* der Auflagefläche hat.
a) Wir wollen zunächst ein 2-dimensionales Beispiel betrachten. Dieses ist realitätsferner, dafür aber einfacher! Wir gehen aus von dem in der vorigen Aufgabe gegebenen Dreieck. (Ergänzen Sie Ihre bisherige Skizze!) Stellen Sie fest, auf welcher seiner Seiten das Dreieck stabil stehen kann.
b) Nun ein reales dreidimensionales Beispiel: Wir betrachten ein Tetraeder mit den Ecken $A = (0,1,-2)$, $B = (5,5,6)$, $C = (3,1,-2)$ und $D = (0,5,-2)$. Stellen Sie fest, auf welchen seiner vier Seiten das Tetraeder stabil stehen kann.

Übungen (V8) — Lösungen

1) $\vec{d} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{e} = \vec{v} - \vec{u}$, also

$$\begin{aligned}\left|\vec{d}\right|^2 + |\vec{e}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{v} - \vec{u}) \bullet (\vec{v} - \vec{u}) \\ &= \vec{u} \bullet \vec{u} + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{v} \;+\; \vec{u} \bullet \vec{u} - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{v} \\ &= 2\,|\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{v}|^2\end{aligned}$$

2) a) Wegen $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ ist $ABCD$ ein Parallelogramm. Wegen

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ also } \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = 8 + 8 - 16 = 0$$

sind die Kantenvektoren dieses Parallelogramms orthogonal; es liegt also ein Rechteck vor. Wegen

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6\,, \ |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$$

haben die Rechtecksseiten die *gleiche* Länge 6; es liegt sogar ein Quadrat vor.

b) Wir zeigen zunächst, dass E nicht zu der Ebene gehört, in der $ABCD$ liegen. Dazu überprüfen wir, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, etwa indem wir den Rang der Matrix mit den Spaltenvektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & 9 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & 15 \\ 0 & -12 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$$

Da der Rang 3 ist, sind die drei Spaltenvektoren linear unabhängig und die Punkte $ABCE$ liegen nicht in einer Ebene.

Da die Grundfläche nach dem in a) Bewiesenen ein Quadrat ist, bleibt nur noch zu zeigen, dass der Verbindungsvektor vom Mittelpunkt M des Quadrates zur Spitze E orthogonal ist zur Bodenebene $e = e(A, B, C)$. Das bedeutet, dass der Vektor $\overrightarrow{ME}$ orthogonal ist zu *jedem* Verbindungsvektor $\overrightarrow{XY}$ von Punkten $X, Y \in e$. Wir berechnen M als Mittelpunkt zwischen AC und erhalten $M = (6, -1, -1)$. Da $\vec{u}, \vec{v}$ zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Bodenebene e sind, genügt es zu zeigen, dass $\overrightarrow{ME}$ orthogonal zu $\vec{u}$ *und* $\vec{v}$ ist:

$$\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ \overrightarrow{ME} \bullet \vec{u} = -12 + 24 - 12 = 0\,, \ \overrightarrow{ME} \bullet \vec{v} = -24 + 12 + 12 = 0\,.$$

c) Die Höhe der Pyramide ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$,

also gleich $\sqrt{36 + 36 + 9} = 9$.

3) <u>Höhe durch C</u>: Die C gegenüberliegende Dreiecksseite ist die Gerade $g(A,B)$ durch A, B; sie hat die Parameterdarstellung

$$X \in g(A,B) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Höhenfußpunkt H ist durch zwei Bedingungen gekennzeichnet:
1. H liegt auf der Dreiecksseite $g(A,B)$:

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

2. Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{CH}$ ist orthogonal zu der Geraden $g(A,B)$, d. h. orthogonal zum Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$:

$$0 = \overrightarrow{CH} \bullet \overrightarrow{AB}.$$

Diese zweite Bedingung stellt eine lineare Gleichung für die eine Unbekannte r dar:

$$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+4r \\ -8+4r \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\implies 0 = \overrightarrow{CH} \bullet \overrightarrow{AB} = -20 + 16r - 32 + 16r \iff 32r = 52 \iff r = \frac{13}{8}.$$

Damit erhält man den Höhenfußpunkt durch

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{13}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 19/2 \end{pmatrix}, \ H = (\frac{17}{2}, \frac{19}{2}).$$

Da der Parameterwert r für den Höhenfußpunkt H *größer* als 1 ist, liegt H nicht *zwischen* A und B, sondern *außerhalb* der Strecke AB, und zwar auf der Seite von B. Die Länge h_C der Höhe durch C ist die Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$, also

$$h_C = |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}12.$$

<u>Höhe durch B</u>: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Der gesuchte Höhenfußpunkt H ist nun gekennzeichnet durch

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} &\iff \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right] \perp \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 0 = -20 - 32 + r(25+64) = -52 + 89r \iff r = \frac{52}{89}. \end{aligned}$$

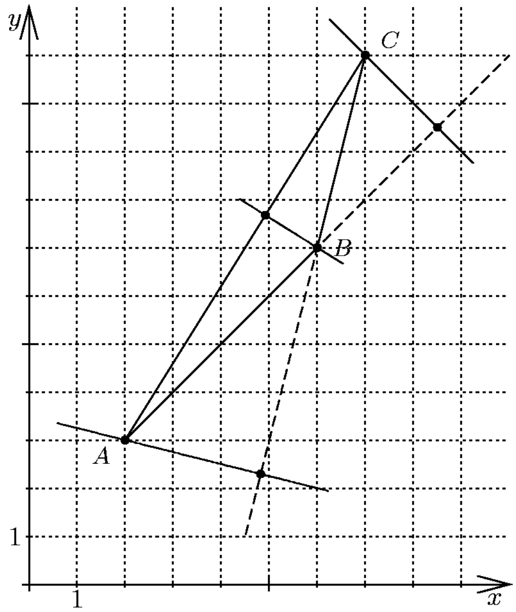
Da der Parameterwert zwischen 0 und 1 liegt, liegt der Höhenfußpunkt auf der Dreiecksseite *zwischen* A und C. Explizit ergibt sich

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{52}{89}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{89}\begin{pmatrix} 438 \\ 683 \end{pmatrix}, \ H = (\frac{438}{89}, \frac{683}{89}) \approx (4{,}92; 7{,}67).$$

Die Länge h_B der Höhe ist

$$|\overrightarrow{BH}| = \left|\begin{pmatrix} -96/89 \\ 60/89 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{12816}{89^2}} = \sqrt{\frac{144}{89}} = \frac{12}{\sqrt{89}} \approx 1,27\,.$$

Die Ergebnisse für die Höhe durch A und Skizze:



$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \iff r = -\frac{20}{17},$$
$$\Longrightarrow H = (\frac{82}{17}, \frac{39}{17}) \approx (4{,}82; 2{,}29)$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 48 \\ -12 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow h_A = \sqrt{\frac{2448}{17^2}} = \sqrt{\frac{144}{17}} = \frac{12}{\sqrt{17}} \approx 2,91\,.$$

Da der Parameterwert r negativ ist, liegt der Höhenfußpunkt nicht *zwischen* B und C, sondern *außerhalb,* und zwar auf der Seite von B.

4) a) $\overrightarrow{BH}$ ist ein Richtungsvektor der Höhe durch B und somit orthogonal zu $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Es ist $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \vec{u} + \overrightarrow{BH}$ und daher $\overrightarrow{AH} \bullet \vec{v} = (\vec{u} + \overrightarrow{BH}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet \vec{v} + \overrightarrow{BH} \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet \vec{v} + 0$, wegen $\overrightarrow{BH} \perp \vec{v}$.
Die zweite Reihe von Behauptungen beweist man ganz genauso (C ersetzt B und $\vec{u}, \vec{v}$ tauschen folglich die Rollen).
Schließlich gilt $\overrightarrow{AH} \bullet (\vec{v} - \vec{u}) = \overrightarrow{AH} \bullet \vec{v} - \overrightarrow{AH} \bullet \vec{u} = 0$ nach den vorangehenden Behauptungen.
b) Es ist $\vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, so dass nach der letzten Behauptung von a) $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ ist. Dies bedeutet aber, dass H auf der Höhe durch A liegt. Damit liegt H auf allen drei Höhen; H ist der gemeinsame Schnittpunkt aller drei Höhen.

5) a) Wir berechnen den Schwerpunkt $S = (5, 7)$ und dann die Fußpunkte der *Lote von S auf die Dreiecksseiten.*
Lot auf $g(A, B)$: Der Lotfußpunkt H soll auf der Geraden $g(A, B)$ liegen, also $\overrightarrow{AH} = r\overrightarrow{AB}$ mit einer (gesuchten) Zahl $r \in \mathbb{R}$. Da H der Lotfußpunkt von S aus ist, muss $\overrightarrow{SH}$ zu $\overrightarrow{AB}$ orthogonal sein:

$$0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AH}) \bullet \overrightarrow{AB} = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\iff 0 = -12 + 16r - 16 + 16r \iff r = \frac{7}{8}\,.$$

Da der Parameterwert r zwischen 0 und 1 liegt, liegt der Lotfußpunkt *zwischen* A und B: Das Dreieck kann auf dieser Dreiecksseite stabil stehen.
Lot auf $g(B, C)$: $\overrightarrow{BH} = +r\overrightarrow{BC}$ und

$$0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{BC} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -1 + r + 16r \iff r = -\frac{1}{17}\,.$$

Da der Parameterwert negativ ist, liegt der Lotfußpunkt nicht zwischen den Eckpunkten (wenn auch sehr dicht bei der Ecke B); auf der Dreiecksseite BC kann das Dreieck nicht stabil stehen. Es kippt zu der Seite, bei der B liegt, (und bleibt dann auf der Dreiecksseite

durch A, B stabil liegen).
Lot auf $g(A,C)$: $\overrightarrow{AH} = r\overrightarrow{AC}$ und

$$0 = \left[\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} = -15 + 25r - 32 + 64r \iff r = \frac{47}{89}\,.$$

Wieder liegt der Lotfußpunkt des Schwerpunktes *zwischen* den Eckpunkten und wieder ist das Dreieck auf dieser Seite standfest.
[In diesem letzten Fall braucht man nichts zu rechnen, wenn man die anschaulich einsichtige Tatsache beweist: Liegt der Höhenfußpunkt zwischen den Ecken, so gilt dies erst recht für den Fußpunkt des Schwerpunktlotes. Wenn man dies zu beweisen versucht, findet man eine allgemeingültige Beziehung zwischen Höhenfußpunkt, Fußpunkt der Schwerpunktlotes und Seitenmittelpunkt: Der Lotfußpunkt liegt *zwischen* Höhenfußpunkt und Seitenmittelpunkt und teilt diese Strecke im Verhältnis 2:1. Für die Parameterwerte r_H des Höhenfußpunktes, r_L des Lotfußpunktes und $r_M = \frac{1}{2}$ des Mittelpunktes bedeutet dies:

$$r_L = r_H + \frac{2}{3}(r_M - r_H) = r_H + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} - \frac{2}{3}r_H = \frac{1}{3}r_H + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(r_H + 1)\,.$$

Vergleichen Sie diese Formel mit den Ergebnissen für r_H aus Aufgabe 3) und für r_L in Aufgabe 4) a).]
b) Wir berechnen den Schwerpunkt S des Tetraeders gemäß $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ und erhalten $S = (2,3,0)$ und bestimmen dann die Lotfußpunkte von S aus auf die vier Begrenzungsflächen des Tetraeders.
Seitenfläche ABC: Der Lotfußpunkt heiße H; er gehört zur Ebene durch ABC, also

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}5\\4\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}.$$

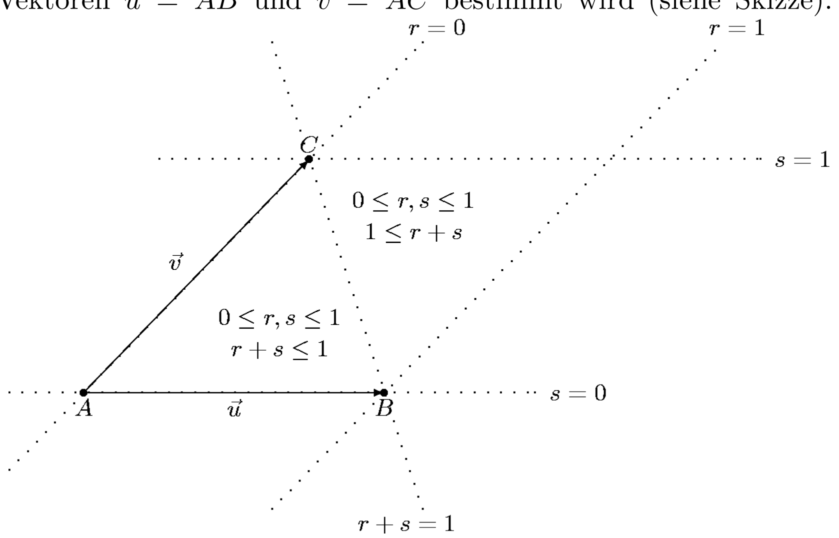
Da $\overrightarrow{SH}$ zur Ebene durch ABC orthogonal sein soll, muss gelten

$$0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{AB} \quad \text{und} \quad 0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{AC}\,.$$

Dies ergibt *zwei* lineare Gleichungen für die beiden unbekannten Parameterwerte r, s:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AB} + r\cdot\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = -34 + 105r + 15s \\ 0 &= \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AC} + r\cdot\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + s\cdot\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} = -6 + 15r + 9s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 3/10$, $s = 1/6$. Beide Parameterwerte liegen zwischen 0 und 1, daher liegt der zugehörige Punkt H innerhalb des *Parallelogramms,* das von den Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ bestimmt wird (siehe Skizze). Die Frage der



Aufgabenstellung ist aber, ob H innerhalb des *Dreiecks* ABC liegt. Dazu muss zusätzlich gelten: $r + s \leq 1$. (Begründung: Auf der Geraden durch B und C liegen die Punkte X, für die die Parameterwerte zusammen genau 1 ergeben; die Punkte mit $r + s < 1$ liegen ganz auf einer Seite der Geraden $g(B, C)$, und zwar bei A.) Insgesamt:

$$H \text{ liegt } \textit{im} \text{ Dreieck } ABC \iff r, s \geq 0 \text{ und } r + s \leq 1\,.$$

Für die oben gefundenen Werte $r = 3/10$ und $s = 1/6$ sind beide Bedingungen erfüllt: Der Lotfußpunkt H liegt *im* Dreieck ABC; das Tetraeder kann auf dieser Seite stabil stehen.
Seitenfläche ABD: Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} = -34 + 105r + 16s \\ 0 &= \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} = -8 + 16r + 16s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 26/89$, $s = 37/178$. Es gilt für diese Werte $r, s \geq 0$ und $r + s \leq 1$, also liegt wieder der Lotfußpunkt H *in* dem entsprechenden Seitendreieck ABD: Auch auf dieser Seite kann das Tetraeder stehen.
Seitenfläche ACD: Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AC} = -6 + 9r \\ 0 &= \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} = -8 + 16s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 2/3$, $s = 1/2$. Es gilt für diese Werte zwar wieder $r, s \geq 0$, aber nun ist $r + s > 1$, also liegt der Lotfußpunkt H *außerhalb* des entsprechenden Seitendreiecks ACD: Auf dieser Seite kann das Tetraeder nicht stabil stehen.
Seitenfläche BCD: Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SB} + r\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SB} \bullet \overrightarrow{BC} + r \cdot \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{BC} = -62 + 84r + 74s \\ 0 &= \overrightarrow{SB} \bullet \overrightarrow{BD} + r \cdot \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BD} + s \cdot \overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{BD} = -63 + 74r + 89s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 107/250$, $s = 44/125$. Wegen $r, s \geq 0$ und $r+s \leq 1$, liegt der Lotfußpunkt H wieder *in* dem entsprechenden Seitendreieck BCD: Auch auf dieser Seite kann das Tetraeder stehen.