Übungen

Aufgabe 1:

Es sei $c > 0$ und $f_c(x) = x\ln(1 + \frac{c}{x})$ für $x > 0$.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der l'Hospitalschen Regeln:

$$\lim_{x\to 0} f_c(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to\infty} f_c(x) = c\,.$$

Begründen Sie die Anwendbarkeit der jeweiligen Regel genau.

b) Zeigen Sie

$$f_c'(x) = \ln(1 + \frac{c}{x}) - \frac{c}{x+c}\,,$$

und folgern Sie:

$$\lim_{x\to 0} f_c'(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to\infty} f_c'(x) = 0\,.$$

c) Zeigen Sie, dass f_c' (die Ableitung!) streng monoton fällt, und folgern Sie dann aus b), dass f_c' keine Nullstellen hat und f_c streng monoton steigt.

d) Skizzieren Sie den Graphen von f_c und seine Asymptote unter Beachtung aller oben geannten Resultate.

e) Folgern Sie mit Hilfe von a):

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{c}{n})^n = e^c\,.$$

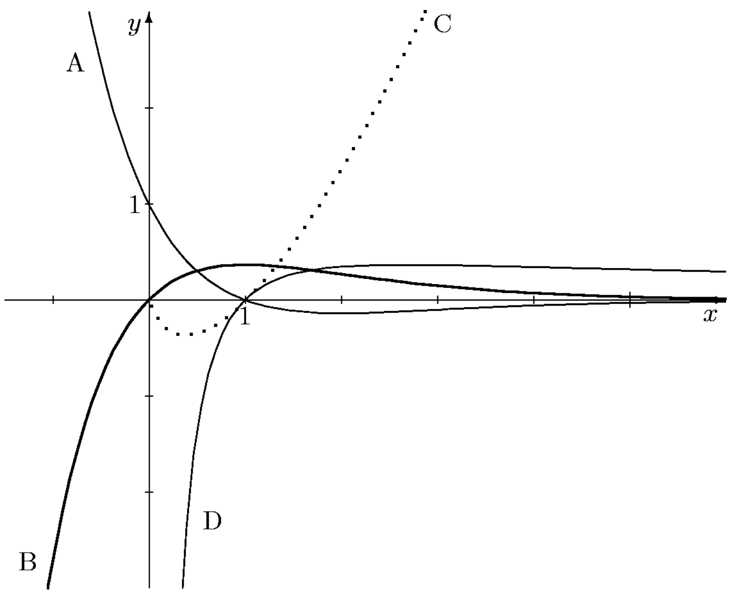
Begründen Sie Ihre Gedankengänge genau.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen Null-, Extremstellen und Grenzwerte an den Definitionsrändern.

a) $f(x) = x \cdot \ln x$, b) $g(x) = \dfrac{x}{e^x}$, c) $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Die Graphen dieser Funktionen sind in nachfolgender Skizze enthalten. Ordnen Sie jeder Funktion ihren Graphen zu.



d) Ein Graph gehört zu keiner der obigen Funktionen. Geben Sie einen möglichen Term dafür an.

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (e^{-x} - 1)(e^x - 2)$.

a) Untersuchen Sie f auf Null-, Extrem- und Wendestellen sowie Grenzwerte an den Definitionsrändern und fertigen Sie auf der Basis Ihrer Ergebnisse eine Skizze des Graphen an.

b) Zeigen Sie, dass die Tangenten an den Graphen von f in den beiden Nullstellen zusammen mit der Tangente im Hochpunkt ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck bilden. Bestimmen Sie dessen Flächeninhalt.

Aufgabe 4:

Gegeben ist ein Tetraeder mit den Eckpunkten $A = (2, 3, -1)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (0, -1, -1)$ und $D = (4, -9, 6)$. Wir betrachten die Ebene $e(A, B, C)$ als 'Boden' und D als Spitze.

a) Bestimen Sie den Höhenfußpunkt H des Tetraeders.

b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt S dieses Tetraeders sowie die Lage des Lotfußpunktes F von S in der 'Bodenebene' $e(A, B, C)$. Kann das Tetraeder auf der Seitenfläche ABC stabil stehen?

c) Zeigen Sie, dass F auf der Strecke zwischen H und dem Schwerpunkt S_{ABC} des Dreiecks ABC liegt. In welchem Verhältnis teilt F diese Strecke?

d) Fertigen Sie eine *maßstabsgetreue* (!) Zeichnung des Bodendreiecks ABC an und markieren Sie darin die genaue Position des Höhenfußpunktes H, des Lotfußpunktes F und des Schwerpunktes S_{ABC}. Erläutern Sie, wie Sie Ihre Zeichnung erstellt haben.

Übungen — Lösungen

1) a) Grenzübergang $x \to 0$: Durch die Umformung

$$f_c(x) = \frac{\ln(1 + \frac{c}{x})}{\frac{1}{x}}$$

kann man die de l'Hospitalsche Regel für Grenzwerte vom Typ "$\frac{\infty}{\infty}$" anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\frac{c}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x+c}\cdot(-\frac{c}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{cx}{x+c} = 0\,.$$

Grenzübergang $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{c}{x}) = 1 \implies \lim_{x\to\infty}\ln(1+\frac{c}{x}) = \ln 1 = 0\,.$$

Daher kann man jetzt auf

$$f_c(x) = \frac{\ln(1 + \frac{c}{x})}{\frac{1}{x}}$$

die l'Hospitalsche Regel für Grenzwerte vom Typ "$\frac{0}{0}$" anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{c}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{cx}{x+c} = c\,.$$

b) Es gilt

$$f_c'(x) = \ln(1+\frac{c}{x}) + x\cdot\frac{x}{x+c}\cdot(-\frac{c}{x^2}) = \ln(1+\frac{c}{x}) - \frac{c}{x+c}$$

Grenzübergänge:

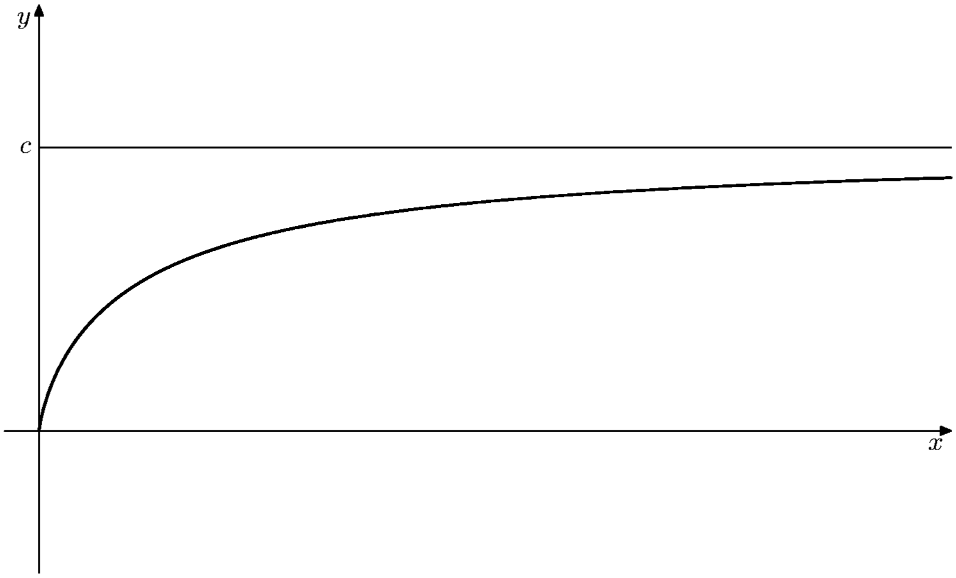
$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\ln(1+\frac{c}{x})}_{\to\infty} - \underbrace{\frac{c}{x+c}}_{\to 1} = \infty\,,$$

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{\ln(1+\frac{c}{x})}_{\to 1} - \underbrace{\frac{c}{x+c}}_{\to 0} = \ln 1 = 0\,,$$

c) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f_c''(x) &= \frac{x}{x+c}\cdot(-\frac{c}{x^2}) + \frac{c}{(x+c)^2} \\ &= -\frac{c}{x(x+c)} + \frac{c}{(x+c)^2} = \frac{-c(x+c)+cx}{x(x+c)^2} = -\frac{c^2}{x(x+c)^2} < 0\,. \end{aligned}$$

Damit ist f_c' streng monoton fallend und wegen $\lim_{x\to\infty} f_c' = 0$ hat f_c' nur positive Werte: f_c ist streng monoton wachsend.



2) a) $f(x) = x \cdot \ln x$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f =]0, \infty[$, da ln nur für positive Argumente definiert ist. Für $x > 0$ gilt dann aber

$$f(x) = 0 \iff x \ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1\,.$$

Einzige Nullstelle liegt bei $x = 1$.
Mit der Produktregel erhalten wir $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$. Es gilt

$$f'(x) = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}\,.$$

Die Stelle $x = \frac{1}{e}$ ist eine Extremstelle, da $f'(x) = 1 + \ln x$ wegen seiner Montonie dort das Vorzeichen wechseln muss.
Grenzwerte an den Definitionsrändern 0 und ∞:
Wegen $\ln x \to \infty$ für $x \to \infty$ erhält man erst recht

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln x = \infty\,.$$

Für den Grenzübergang $x \to 0$ wenden wir die Regel von de l'Hospital an:

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0\,.$$

Der Graph von f ist C.
b) $g(x) = \frac{x}{e^x} = xe^{-x}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat die einzige Nullstelle $x = 0$.
$g'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$ hat die einzige Nullstelle $x = 1$. Diese ist Extremstelle von g, da g' hier sein Vorzeichen wechselt (Linearfaktor $1 - x$).
Wegen $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$ folgt sofort $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$, während der andere Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

eine bekannte Folgerung aus der Regel von de l'Hospital war (e^x dominiert jede ganzrationale Funktion).

Der Graph ist B.

c) $h(x) = \dfrac{\ln x}{x} = x^{-1} \ln x$ hat (wie a) den Definitionsbereich $]0, \infty[$.
Es gilt $h(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$.

$$h'(x) = -x^{-2} \ln x + x^{-1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-\ln x + 1}{x^2} = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e\,.$$

Wegen der Monotonie von $-\ln x + 1$ ändert der Zähler von h' an der Nullstelle sein Vorzeichen, während der Nenner immer positiv ist: e ist eine Extremstelle von h.
Der Graph ist D.

d) Graph A gehört zu keiner der Funktionen. A hat eine Nullstelle bei $+1$ mit Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$, also muss ein Faktor $1-x$ im Funktionsterm auftreten. Außerdem wächst die gesuchte Funktion für $x \to -\infty$ sehr stark an, während sie für $x \to \infty$ gegen 0 strebt: daher der Faktor e^{-x}. Ein möglicher Term ist $(1-x)e^{-x}$.

3) a) $f(x) = 0 \iff e^{-x} = 1 \vee e^x = 2 \iff x = 0 \vee x = \ln 2$. An beiden Nullstellen liegen Vorzeichenwechsel vor, da die beiden Faktoren streng monoton sind.

Randgrenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} (\underbrace{e^{-x} - 1}_{\to -1})(\underbrace{e^x - 2}_{\to\infty}) = -\infty\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} (\underbrace{e^{-x} - 2}_{\to\infty})(\underbrace{e^x - 2}_{\to -2}) = -\infty\,,$$

Ableitungen:

$$f(x) = 3 - e^x - 2e^{-x} \implies f'(x) = -e^x + 2e^{-x} \implies f''(x) = -e^x - 2e^{-x}\,.$$

Man erkennt sofort: $f''(x) < 0$ für alle x, f ist überall rechtsgekrümmt.

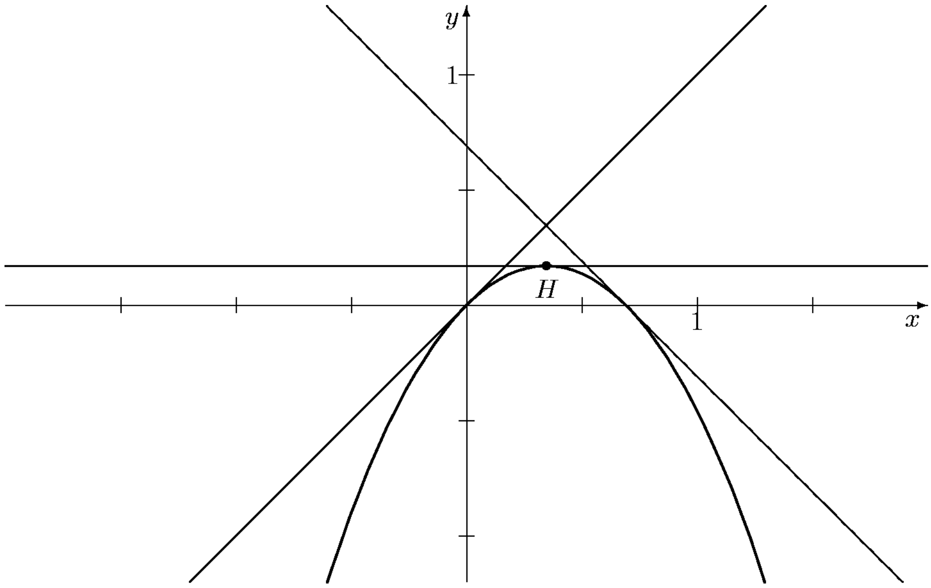
Stationäre Stellen:

$$f'(x) = 0 \iff e^x = 2e^{-x} \iff e^{2x} = 2 \iff 2x = \ln 2 \iff x = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}\,.$$

Da f rechtsgekrümmt ist, liegt bei $\ln \sqrt{2}$ ein Maximum von f vor; der Maximalwert ist

$$f(\ln \sqrt{2}) = 3 - \sqrt{2} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}17\,.$$

Skizze:



b) Die Tangentenanstiege in den Nullstellen sind $f'(0) = 1$ und $f'(\ln 2) = -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -1$. Da das Produkt der Anstiege -1 ist, sind die Tangenten orthogonal und das genannte Dreieck rechtwinklig. Da beide Basiswinkel übereinstimmen (je 45^0), ist das Dreieck symmetrisch und gleichschenklig. Der Schnittpunkt beider Tangenten liegt bei

$$x = -x + \ln 2 \iff x = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}\,, \quad y = x = \ln\sqrt{2}\,.$$

Die Höhe des Dreiecks ist daher

$$\ln\sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2}) = \ln\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3 \approx 0{,}18\,.$$

Wegen der Symmetrie ist die Basislänge doppelt so groß wie die Höhe und die Fläche daher

$$A = (\ln\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3)^2 \approx 0{,}03\,.$$

4) a) Für den Höhenfußpunkt $H \in e(A, B, C)$ gilt

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \quad \text{mit } \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\,.$$

Nun gilt

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AB} \iff \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -55 + 17r + 16s = 0$$

und

$$\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC} \iff \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -44 + 16r + 20s = 0\,.$$

Man erhält

$$\left[\begin{array}{rrcr} 17r & +16s & = & 55 \\ 16r & +20s & = & 44 \end{array}\right] \iff r = \frac{33}{7} \ \wedge\ s = -\frac{11}{7}\,.$$

Daraus ergibt sich für H

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \frac{33}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{11}{7}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{33}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{11}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{36}{7} \\ -\frac{67}{7} \\ \frac{26}{7} \end{pmatrix}.$$

b) Der Schwerpunkt ergibt sich durch Mittelung der Ortsvektoren: $S = (2, -2, 1)$. Für den Lotfußpunkt $F \in e(A, B, C)$ von S gilt

$$\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \quad \text{mit } \overrightarrow{SF} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\,.$$

Nun gilt

$$\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\overrightarrow{SF} \perp \overrightarrow{AB} \iff \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -22 + 17r + 16s = 0$$

und

$$\overrightarrow{SF} \perp \overrightarrow{AC} \iff \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -20 + 16r + 20s = 0\,.$$

Man erhält

$$\left[\begin{array}{rrcr} 17r & +16s & = & 22 \\ 16r & +20s & = & 20 \end{array}\right] \iff r = \frac{10}{7} \ \wedge\ s = -\frac{1}{7}\,.$$

Daraus ergibt sich für F

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \frac{10}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{7}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{10}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ -\frac{15}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Da $s < 0$ ist, liegt der Lotfußpunkt *nicht* im Innern des Bodendreiecks. (Ebenso zeigt sich dies an $r > 1$.) Das Tetraeder kann also nicht stabil auf der Seitenfläche

ABC stehen.

d) Es sei $S' = S_{ABC}$ der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, also

$$\overrightarrow{OS'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad S' = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}).$$

Wir berechnen

$$\overrightarrow{S'F} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} - \frac{4}{3} \\ -\frac{15}{7} - \frac{1}{3} \\ \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{21} \\ -\frac{52}{21} \\ \frac{23}{21} \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{S'H} = \begin{pmatrix} \frac{36}{7} - \frac{4}{3} \\ -\frac{67}{7} - \frac{1}{3} \\ \frac{26}{7} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{80}{21} \\ -\frac{208}{21} \\ \frac{92}{21} \end{pmatrix} = 4\overrightarrow{S'F}.$$

Statt mit den kartesischen Koordinaten der Punkte S', F, H hätte man auch mit den Parameterwerten r, s rechnen können:

$$\overrightarrow{AS'}: \ r = \frac{1}{3},\ s = \frac{1}{3}, \quad \overrightarrow{AF}: \ r = \frac{10}{7},\ s = -\frac{1}{7}, \quad \overrightarrow{AH}: \ r = \frac{33}{7},\ s = -\frac{11}{7},$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{S'F}: \quad r = \frac{10}{7} - \frac{1}{3} = \frac{23}{21},\ s = -\frac{1}{7} - \frac{1}{3} = -\frac{10}{21},$$

$$\overrightarrow{S'H}: \quad r = \frac{33}{7} - \frac{1}{3} = \frac{92}{21},\ s = -\frac{11}{7} - \frac{1}{3} = -\frac{40}{21},$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{S'H} = 4\overrightarrow{S'F}.$$

e) Mit Zirkel: Wir bestimmen die drei Seitenlängen des Dreiecks, zeichnen eine Seite (etwa AB) und schlagen mit dem Zirkel Kreise um die Eckpunkte mit den anderen Kantenlängen:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{17} \approx 4{,}12, \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{20} \approx 4{,}47, \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5} \approx 2{,}24,.$$

Mit Geodreieck/Winkelmesser: Wir bestimmen einen Winkel, etwa

$$\cos\alpha = \cos\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{16}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{20}} \approx 0{,}87,$$

$$\alpha = \arccos\frac{16}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{20}} \approx 29{,}8^0.$$

Wir zeichnen diesen Winkel und tragen auf den beiden Schenkeln die oben berechneten Abstände $d(A, B)$ und $d(A, C)$ ab.

Aus den Parameterdarstellungen $\overrightarrow{AF} = \frac{10}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AH} = \frac{33}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{11}{7}\overrightarrow{AC}$ kann man dann die Lage von F und H relativ zu ABC bestimmen: