

Übungen (1)

Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Eintragungen — soweit dies möglich ist.

	a_1, \dots, a_5	a_{100}	Explizite Definition	Rekursive Definition	Eigenschaften
1)				$a_1 = 10, a_n = -a_{n-1}$	
2)	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$				
3)			$a_n = -2n + 1$		
4)				$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + n$	
5)			$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$		
6)				$a_1 = 2, a_n = 3a_{n-1}$	
7)	$1, 4, 9, 16, 25$				
8)				$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2n - 1$	
9)			$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$		
10)				$a_1 = 1,5, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}})$	
11)			$a_n = 4 \cdot (-\frac{1}{3})^n$		

Was fällt Ihnen auf?

Übungen (1) — Lösungen

	a_1, \dots, a_5	a_{100}	Explizite Definition	Rekursive Definition	Eigenschaften
1)	10, -10, 10, -10, 10	-10	$a_n = (-1)^{n-1} \cdot 10$	$a_1 = 10, a_n = -a_{n-1}$	alternierend, betraglich konstant
2)	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$	$\frac{1}{100}$	$a_n = \frac{1}{n}$		monoton fallend, durch 0 nach unten beschränkt
3)	-1, -3, -5, -7, -9	-199	$a_n = -2n + 1$	$a_1 = -1, a_n = a_{n-1} - 2$	monoton fallend, unbeschränkt, arithmetische Folge mit Differenz -2
4)	1, 3, 6, 10, 15	?	?	$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + n$	monoton steigend, nach oben unbeschränkt
5)	1, 3, 6, 10, 15	5050	$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$		wie 4)
6)	2, 6, 18, 54, 162	$2 \cdot 3^{99}$	$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$	$a_1 = 2, a_n = 3a_{n-1}$	monoton wachsend, nach oben unbeschränkt, geometrische Folge mit Quotient 3
7)	1, 4, 9, 16, 25	10000	$a_n = n^2$		wie 4)
8)	1, 4, 9, 16, 25	?	?	$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2n - 1$	wie 4)
9)	1, 3, 6, 10, 15	?	$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$	$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + n$	wie 4)
10)	1,5; 1,75; 1,73214; 1,73205	?	???	$a_1 = 1,5, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}})$	nicht monoton, beschränkt
11)	$-\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{4}{81}, -\frac{4}{243}$	$\frac{4}{3^{100}}$	$a_n = 4 \cdot (-\frac{1}{3})^n$		alternierend, betraglich monoton fallend, geometrische Folge mit Quotient $-\frac{1}{3}$

Die einfachen Fragezeichen in einigen Feldern bedeuten, dass die Berechnung der entsprechenden Eintragung mit den gegebenen Informationen mühselig ist; sie ist aber im Prinzip möglich. Die Eintragung ??? beim Beispiel 10) soll bedeuten, dass keine explizite Definition bekannt ist.

Die bei 9) gegebene Definition ist unter 'explizit' angegeben, da sie nicht ausdrücklich a_{n-1} enthält. Bei der Berechnung von a_n bemerkt man jedoch, dass man in Wahrheit doch alle vorherigen Folgenglieder berechnen muss. Die Definition der Folge 9) ist daher identisch mit der von 4).

Was fiel auf? Durch Vergleich der jeweils ersten Folgenglieder drängt sich der Verdacht auf, dass die Folgen 4), 5) und 9) sowie die Folgen 7) und 8) übereinstimmen. Für 4) und 9) haben wir es soeben begründet. Um die Übereinstimmung von 4) und 5) bzw. 7) und 8) nachzuweisen, muss man jeweils eine explizite und eine rekursive Definition einer Folge vergleichen. Wie man dabei vorgeht, haben wir im Unterricht besprochen (siehe Skript I, §1, b.).