Übungen (2)

1) Beweisen Sie die folgenden Formeln durch vollständige Induktion:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$

c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ für alle $x \neq 1$.

2) Beweisen Sie für $a \in \mathbb{R}$ durch vollständige Induktion die beiden folgenden Fassungen der Bernoulli-Ungleichung:
a) $(1+a)^n \geq 1 + na$ für $a \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$,
b) $(1+a)^n > 1 + na$ für $a \geq -1$, $a \neq 0$ und $n \geq 2$.

3) Die Zahlen b_{nk} des Pascalschen Dreiecks ($0 \leq k \leq n$, n der Zeilenindex, k der Spaltenindex) sind rekursiv definiert durch

$$b_{n0} = b_{nn} = 1\,, \quad b_{nk} = b_{n-1,k-1} + b_{n-1,k} \text{ für } 1 < k < n\,.$$

a) Berechnen Sie die ersten 6 (oder auch mehr) Zeilen des Pascalschen Dreiecks, d. h. b_{nk} für alle $0 \leq k \leq n \leq 6$.
b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion die allgemeine binomische Formel

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} x^{n-k} y^k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

4) Man definiert die *Fakultäten*folge $n!$ rekursiv durch

$$0! = 1\,, \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

bzw. als Produktfolge geschrieben durch

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k\,.$$

Darauf aufbauend definiert man die *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ (lies: n über k) für $0 \leq k \leq n$ durch

$$\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\,.$$

a) Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten für alle $0 \leq k \leq n \leq 6$.
b) Zeigen Sie die Übereinstimmung zwischen den Zahlen des Pascalschen Dreiecks und den Binomialkoeffizienten:

$$b_{nk} = \binom{n}{k} \quad \text{für alle } 0 \leq k \leq n$$

Insbesondere sind die Binomialkoeffizienten *natürliche* Zahlen!

Übungen (2) — Lösungen

1) a) Induktionsanfang $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ ist offenbar wahr.

Induktionsschritt $n \to n+1$:

Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte die *Induktionsvoraussetzung:*

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\,.$$

Zu beweisen ist, dass dann auch die *Induktionsbehauptung* gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \underset{\text{Ind.Vor.}}{=} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1) \cdot [2n^2 + n + 6(n+1)] = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)\end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen.

b) Induktionsanfang $n = 1$: $1^3 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot 2^2$ ist offenbar wahr.

Induktionsschritt $n \to n+1$:

Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte die *Induktionsvoraussetzung:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2\,.$$

Zu beweisen ist, dass dann auch die *Induktionsbehauptung* gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \underset{\text{Ind.Vor.}}{=} \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)] = \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4n + 4) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2\end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen.
c) Induktionsanfang $n = 1$:

$$1 + x = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \iff 1 + x = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$$

ist offenbar für alle $x \neq 1$ wahr.
Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte die *Induktionsvoraussetzung:*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\,.$$

Zu beweisen ist, dass dann auch die *Induktionsbehauptung* gilt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \underset{\text{Ind.Vor.}}{=} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1} \\ &= \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}}{x - 1} = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}\end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen.

2) a) Induktionsanfang $n = 0$:
$(1 + a)^0 = 1$ und $1 + 0 \cdot a = 1$, also gilt die Bernoulli-Ungleichung für $n = 0$.
Induktionsschritt $n \to n + 1$:
Es sein $n \geq 0$ beliebig, aber fest. Wir setzen für dieses n die Gültigkeit von $(1+a)^n \geq 1 + na$ voraus und müssen zeigen: $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$.
Beweis:

$$\begin{aligned}(1 + a)^{n+1} &= (1 + a)^n \cdot (1 + a) \\ &\geq (1 + na) \cdot (1 + a) && \text{(wegen Ind.Vor. und } 1 + a \geq 0) \\ &= 1 + na + a + na^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)a && \text{(wegen } n \geq 0 \text{ und } a^2 \geq 0)\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt bewiesen und die Induktion vollständig.
b) Induktionsanfang $n = 2$:
$(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$ wegen $a \neq 0$, also $a^2 > 0$. Damit ist die verschärfte Abschätzung $(1 + a)^n > 1 + na$ für $n = 2$ bewiesen.
Induktionsschritt $n \to n + 1$:
Es sei $n \geq 2$ beliebig, aber fest, und es gelte für dieses n die Induktionsvoraussetzung $(1 + a)^n > 1 + na$. Wir wollen daraus die Induktionsbehauptung $(1 + a)^{n+1} > 1 + (n + 1)a$ folgern.
Beweis:

$$\begin{aligned}(1 + a)^{n+1} &= (1 + a)^n \cdot (1 + a) \\ &\geq (1 + na) \cdot (1 + a) && \text{(wegen Ind.Vor. und } 1 + a \geq 0) \\ &= 1 + na + a + na^2 \\ &> 1 + (n + 1)a && \text{(denn } n > 0 \text{ und } a^2 > 0 \text{ wegen } a \neq 0)\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass bei der Abschätzung in der zweiten Zeile trotz der Induktionsvoraussetzung $(1+a)^n > 1+na$ nur $(1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a)$ gefolgert werden kann, da $1+a=0$ sein kann. Man erhält aber insgesamt doch die gewünschte starke Abschätzung, da in der letzten Abschätzung $>$ gilt.

3) a) Wir berechnen von den gegebenen Werten $b_{n0} = b_{nn} = 1$ ausgehend durch Addition je zweier benachbarter Werte $(b_{n-1,k-1} + b_{n-1,k})$ einer Zeile den darunterstehenden Wert b_{nk}:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&1&&&&\\
&&&1&&3&&3&&1&&&\\
&&1&&4&&6&&4&&1&&\\
&1&&5&&10&&10&&5&&1&\\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1
\end{array}$$

b) Induktionsanfang $n=0$: $(x+y)^0 = 1$ und $\sum_{k=0}^{0} b_{0k} x^{0-k} y^k = b_{00} = 1$.
Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir setzen die Gültigkeit der Behauptung für ein $n \geq 0$ voraus und müssen sie für $n+1$ nachweisen:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \underset{\text{Ind.Vor.}}{=} (x+y)\Big(\sum_{k=0}^{n} b_{nk} x^{n-k} y^k\Big) \\
&= x \sum_{k=0}^{n} b_{nk} x^{n-k} y^k + y \sum_{k=0}^{n} b_{nk} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_{nk} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} b_{nk} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_{nk} x^{n+1-k} y^k + \sum_{l=1}^{n+1} b_{n,l-1} x^{n-(l-1)} y^l && (k = l-1 \text{ gesetzt}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_{nk} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} b_{n,k-1} x^{n-k+1} y^k && (l = k \text{ gesetzt}) \\
&= b_{n0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} b_{nk} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} b_{n,k-1} x^{n+1-k} y^k + b_{n,n} y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (b_{nk} + b_{n,k-1}) x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&= b_{n+1,0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} b_{n+1,k} x^{n+1-k} y^k + b_{n+1,n+1} y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} b_{n+1,k} x^{n+1-k} y^k
\end{aligned}$$

4) a) Man erhält genau dieselben Zahlen wie oben beim Pascalschen Dreieck.
b) Wir müssen lediglich zeigen, dass die so definierten Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ die rekursive Definition der $b_{n,k}$ erfüllen:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1\,, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

und

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\\ &= \frac{(n-1)!\cdot k}{k!(n-k)!}+\frac{(n-1)!\cdot(n-k)}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}\cdot(k+n-k)\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}\end{aligned}$$

Ihrer Definition nach sind die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ rationale Zahlen, während die Zahlen des Pascalschen Dreiecks entsprechend ihrer Definition Summen natürlicher Zahlen sind. Durch die soeben bewiesene Übereinstimmung sind die Binomialkoeffizienten notwendig natürliche Zahlen.