Übungen (3)

1) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf evtl. Monotonie und Beschränktheit:

a) $a_n = \dfrac{n+5}{n^2+1}$, b) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+5}$, c) $a_n = \dfrac{2n^2}{n^2-10}$,

d) $a_n = \dfrac{4n+3}{2n-5}$, e) $a_n = \dfrac{4\sqrt{n}+1}{5\sqrt{n}+4}$, f) $a_n = \dfrac{1+\sqrt{n}}{3+\sqrt{n}}$,

g) $a_n = \dfrac{2-3^n}{2+3^n}$.

2) Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = \dfrac{3n+5}{4n-2}$. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n)

a) monoton fällt,
b) nach unten durch $\frac{3}{4}$ beschränkt ist, und
c) gegen $\frac{3}{4}$ konvergiert.
d) Von welcher Nummer n_0 ab sind alle weiteren Folgenglieder a_n weniger als $\frac{1}{10}$ vom Grenzwert $\frac{3}{4}$ entfernt?

3) Geben Sie an, welche der nachfolgenden Folgen konvergent sind, und ggf. welchen Grenzwert sie haben.

a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, b) $a_n = 5 + 3n$, c) $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2}$

d) $a_n = 4 - \dfrac{1}{2^n}$ e) $a_n = 1 + (-1)^n$

4) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?
(Begründungen sind nicht erforderlich.)
a) Eine alternierende Folge ist nicht monoton.
b) Eine monoton wachsende Folge ist nach unten beschränkt.
c) Eine monotone Folge ist beschränkt.
d) Eine unbeschränkte Folge ist nicht konvergent.
e) Beschränkte Folgen sind konvergent.
f) Eine monotone Folge ist konvergent.

5) Geben Sie wenn möglich Beispiele für Folgen mit nachfolgenden Eigenschaften:
a) konvergent mit Grenzwert 7,
b) nach unten beschränkt durch 7,
c) monoton wachsend und nach oben durch 4 beschränkt,
d) alternierend mit Grenzwert 5,
e) monoton wachsend und konvergent gegen 4,
f) betraglich beschränkt durch 4 und nicht konvergent.

6) Begründen Sie die Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert nachfolgender Folgen mit Hilfe der Grenzwertsätze:

a) $a_n = \dfrac{n^3+n}{n^4}$ b) $a_n = \dfrac{3+\frac{1}{n}}{4-\frac{(-1)^n}{n}}$ c) $a_n = \dfrac{\frac{1}{n}+n}{n}$

d) $a_n = \dfrac{4n^2+7n+8}{2n^2+3n+7}$ e) $a_n = \dfrac{n+5}{n^2+1}$ f) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+5}$

g) $a_n = \dfrac{2n}{n^2-4{,}5}$ h) $a_n = \dfrac{1-\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n^2}}$ i) $a_n = \dfrac{2n^2}{n^2-10}$

j) $a_n = \dfrac{4n+3}{2n-5}$ k) $a_n = \dfrac{2n-1}{n^2-2}$ l) $a_n = \dfrac{n-\frac{1}{n}}{n^2-\frac{1}{n}}$

m) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^4+n^3}$ n) $a_n = \dfrac{4\sqrt{n}+1}{5\sqrt{n}+4}$ o) $a_n = \dfrac{1+\sqrt{n}}{3+\sqrt{n}}$

p) $a_n = \dfrac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}}$ q) $a_n = \dfrac{2^n-1}{2^n}$ r) $a_n = \dfrac{2-3^n}{2+3^n}$

7) Bestimmen Sie die möglichen Grenzwerte folgender rekursiv definierter Folgen:

a) $a_1 = 2$; $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$
b) $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 2 + 0{,}7a_n$
c) $a_1 = 1$; $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n})$
d) $a_0 = 0$; $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$
e) $a_1 = \sqrt{2}$; $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$,
f) $a_1 = \sqrt{2}$; $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 1}$
[Beachten Sie bei den letzten drei Aufgabenteilen den Grenzwertsatz für die Wurzelfunktion (siehe nachfolgende Aufgabe).]

8) Beweisen Sie den

Grenzwertsatz für die Wurzelfunktion:
Ist a_n eine konvergente Folge von Zahlen $a_n \geq 0$ und a der Grenzwert, so ist die Folge $\sqrt{a_n}$ ebenfalls konvergent, und zwar mit Grenzwert $\sqrt{a}$:

$$a_n \geq 0 \ \wedge \ a_n \to a \implies \sqrt{a_n} \to \sqrt{a}\,.$$

Tip: Beweisen Sie die Behauptung im Falle $a = 0$ direkt auf der Basis der Definition von Nullfolgen und benutzen Sie für $a \neq 0$ die Identität (Nachweis?)

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \cdot (a_n - a)$$

sowie Schritt 4. im Beweis der Grenzwertsätze.

Übungen (3) — Lösungen

1) a) Alle Folgenglieder sind positiv, also ist 0 eine untere Schranke.
Die Berechnung der ersten Folgenglieder lässt vermuten, dass a_n monoton fällt. Wir untersuchen daher

$$
\begin{aligned}
a_n \geq a_{n+1} &\iff \frac{n+5}{n^2+1} \geq \frac{(n+1)+5}{(n+1)^2+1} \\
&\iff \frac{n+5}{n^2+1} \geq \frac{n+6}{n^2+2n+2} \qquad | \cdot (n^2+1)(n^2+2n+2) > 0 \\
&\iff (n+5)(n^2+2n+2) \geq (n+6)(n^2+1) \\
&\iff n^3+7n^2+12n+10 \geq n^3+6n^2+n+6 \iff n^2+11n+4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Da $n \in I\!N$ stets positiv ist, ist die letzte Ungleichung über $I\!N$ allgemeingültig, die Folge (a_n) also monoton fallend. Damit ist dann auch gezeigt, dass $a_1 = 3$ eine (sogar die kleinste) obere Schranke ist.
b) Die Folgenglieder sind die Kehrwerte der Folgenglieder aus a), also ebenfalls positiv und daher durch 0 nach unten beschränkt. Außerdem ist diese Folge monoton steigend (ähnliche Rechnung wie unter a) nur mit umgekehrter Abschätzung). Um eine evtl. obere Schranke zu finden, muss man die folgende Ungleichung untersuchen.

$$
a_n \leq S \iff \frac{n^2+1}{n+5} \leq S \iff n^2+1 \leq Sn+5S \iff n^2 - S \cdot n + (1-5S) \leq 0\,.
$$

Die Umformungen haben auf eine *quadratische* Ungleichung geführt. Diese haben wir im Einführungssemester nicht systematisch behandelt. Dennoch können wir hier feststellen: Die letzte Ungleichung kann nicht allgemeingültig sein!
Begründung: Der Term auf der linken Seite ist quadratisch. Lässt man für n beliebige reelle Zahlen zu, so ist der Graph eine nach *oben* geöffnete Parabel. Diese kann nicht ständig unterhalb der x-Achse verlaufen.
Damit ist für kein S die Abschätzung $a_n \leq S$ allgemeingültig, die Folge also nach oben unbeschränkt!
c) Die ersten Folgenglieder von $a_n = \dfrac{2n^2}{n^2-10}$ sind $-\frac{2}{9}\,,\ -\frac{4}{3}\,,\ -18\,,\ \frac{16}{3}\,,\ \frac{10}{3}\ \ldots$. Die Folge (a_n) ist also nicht monoton, denn $a_3 < a_4 > a_5$. Man kann aber vermuten, dass sie von $n = 4$ ab monoton fällt. Da für $n \geq 4$ die Nenner stets positiv sind, gelten für $n \geq 4$ die folgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
a_n \geq a_{n+1} &\iff \frac{2n^2}{n^2-10} \geq \frac{2(n+1)^2}{(n+1)^2-10} \qquad | \cdot (n^2-10)((n+1)^2-10) > 0 \\
&\iff 2n^2(n^2+2n-9) \geq (2n^2+4n+2)(n^2-10) \\
&\iff 2n^4+4n^3-18n^2 \geq 2n^4+4n^3-18n^2-40n-20 \iff 40n+20 \geq 0
\end{aligned}
$$

Da die letzte Ungleichung in $I\!N$ immer wahr ist, ist die Folge (a_n) für $n \geq 4$ (!) monoton fallend. Außerdem sind von $n = 4$ ab alle Folgenglieder positiv (da dann

Zähler *und* Nenner positiv sind), so dass gilt: Die eingeschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 4}$ ist monoton fallend, nach unten durch 0 und nach oben durch $a_4 = \frac{16}{3}$ beschränkt. Indem man noch die ersten drei Folgenglieder hinzunimmt, erhält man:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insgesamt ist nach oben durch $\frac{16}{3}$ und nach unten durch -18 beschränkt.
d) Von $n = 3$ ab ist diese Folge monoton fallend, nach unten durch 0 und nach oben durch $a_3 = 15$ beschränkt. Für $n \geq 3$ ist der Nenner stets positiv, daher gilt dann:

$$a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{4n+3}{2n-5} \geq \frac{4(n+1)+3}{2(n+1)-5} \qquad | \cdot (2n-5)(2(n+1)-5) > 0$$
$$\iff (4n+3)(2n-3) \geq (4n+7)(2n-5)$$
$$\iff 8n^2 - 6n - 9 \geq 8n^2 - 6n - 35 \iff -9 \geq -35$$

Da die letzte Ungleichung wahr ist, ist $(a_n)_{n\geq 3}$ monoton fallend und damit $a_3 = 15$ obere Schranke für $(a_n)_{n\geq 3}$. Da für $n \geq 3$ Zähler und Nenner positiv sind, ist $(a_n)_{n\geq 3}$ nach unten durch 0 beschränkt.
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insgesamt ist nicht monoton, aber nach oben durch 15 und nach unten durch $a_2 = -11$ beschränkt.
e) Diese Folge ist nach unten durch 0 beschränkt, da Zähler und Nenner positiv sind. Sie ist monoton steigend, denn es gilt:

$$a_n \leq a_{n+1} \iff \frac{4\sqrt{n}+1}{5\sqrt{n}+4} \leq \frac{4\sqrt{n+1}+1}{5\sqrt{n+1}+4} \qquad | \cdot (5\sqrt{n}+4)(5\sqrt{n+1}+4) > 0$$
$$\Leftrightarrow (4\sqrt{n}+1)(5\sqrt{n+1}+4) \leq (4\sqrt{n+1}+1)(5\sqrt{n}+4)$$
$$\Leftrightarrow 20\sqrt{n(n+1)} + 16\sqrt{n} + 5\sqrt{n+1} + 4 \leq 20\sqrt{n(n+1)} + 16\sqrt{n+1} + 5\sqrt{n} + 4$$
$$\Leftrightarrow 11\sqrt{n} \leq 11\sqrt{n+1} \iff \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$$

Die letzte Ungleichung ist allgemeingültig; die Folge ist monoton steigend.
Wir suchen eine obere Schranke S:

$$a_n \leq S \iff \frac{4\sqrt{n}+1}{5\sqrt{n}+4} \leq S \iff 4\sqrt{n}+1 \leq 5S\sqrt{n}+4S \iff 1-4S \leq (5S-4)\sqrt{n}\,.$$

Wählen wir nun $S = \frac{4}{5}$, so nimmt die letzte Ungleichung die folgende Form an:

$$1 - 4S \leq (5S-4)\sqrt{n} \iff 1 - 4\cdot\frac{4}{5} \leq (5\cdot\frac{4}{5} - 4)\sqrt{n} \iff -\frac{11}{5} \leq 0\,.$$

Dies ist offensichtlich eine wahre Aussage: $S = \frac{4}{5}$ ist eine obere Schranke für (a_n).
f) Wieder ist 0 untere Schranke. Die Folge ist monoton wachsend, denn

$$a_n \leq a_{n+1} \iff \frac{1+\sqrt{n}}{3+\sqrt{n}} \leq \frac{1+\sqrt{n+1}}{3+\sqrt{n+1}}$$
$$\iff (1+\sqrt{n})(3+\sqrt{n+1}) \leq (1+\sqrt{n+1})(3+\sqrt{n})$$
$$\iff 3 + 3\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n(n+1)} \leq 3 + 3\sqrt{n+1} + \sqrt{n} + \sqrt{n(n+1)}$$
$$\iff 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1} \iff \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}\,.$$

Aufgrund der Monotonie ist sogar $a_1 = \frac{1}{2}$ eine untere Schranke. Wir bestimmen nun eine obere Schranke S:

$$a_n \le S \iff 1 + \sqrt{n} \le 3S + S\sqrt{n} \iff 1 - 3S \le (S-1)\sqrt{n}\,.$$

Wenn wir nun $S = 1$ setzen, erhalten wir $-2 \le 0 \cdot \sqrt{n} = 0$, eine wahre Aussage: $S = 1$ ist eine obere Schranke.
g) Die Folge $a_n = \frac{2-3^n}{2+3^n}$ ist monoton fallend, denn

$$\begin{aligned}
a_n \ge a_{n+1} &\iff \frac{2-3^n}{2+3^n} \ge \frac{2-3^{n+1}}{2+3^{n+1}} \\
&\iff (2-3^n)(2+3^{n+1}) \ge (2+3^n)(2-3^{n+1}) \\
&\iff 4 - 2\cdot 3^n + 2\cdot 3^{n+1} - 3^{2n+1} \ge 4 + 2\cdot 3^n - 2\cdot 3^{n+1} - 3^{2n+1} \\
&\iff 4\cdot 3^{n+1} \ge 4\cdot 3^n \iff 3^{n+1} \ge 3^n
\end{aligned}$$

$a_1 = -\frac{1}{5}$ ist (die kleinste) obere Schranke. Wir bestimmen eine untere Schranke:

$$a_n \ge S \iff \frac{2-3^n}{2+3^n} \ge S \iff 2 - 3^n \ge 2S + S\cdot 3^n \iff 2 - 2S \ge (1+S)\cdot 3^n\,.$$

Setzt man nun $S = -1$, so nimmt die letzte Ungleichung die Form an: $4 \ge 0$. Dies ist offenbar wahr, $S = -1$ also eine untere Schranke der Folge.

2) a) Wir lösen die Ungleichung $a_{n+1} \le a_n$:

$$\begin{aligned}
& & a_{n+1} &\le a_n \\
&\iff & \frac{3(n+1)+5}{4(n+1)-2} &\le \frac{3n+5}{4n-2} \\
&\iff & \frac{3n+8}{4n+2} &\le \frac{3n+5}{4n-2} && \mid \cdot(4n+2)(4n-2) > 0 \\
&\iff & (3n+8)(4n-2) &\le (3n+5)(4n+2) \\
&\iff & 12n^2 + 26n - 16 &\le 12n^2 + 26n + 10 && \mid -12n^2 - 26n \\
&\iff & -16 &\le 10
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge dieser Ungleichung ist ganz $\mathbb{N}$, also die behauptete Monotonie bewiesen.
b) Wir lösen die Ungleichung $a_n \ge \frac{3}{4}$:

$$\begin{aligned}
& & a_n &\ge \tfrac{3}{4} \\
&\iff & \frac{3n+5}{4n-2} &\ge \frac{3}{4} && \mid \cdot 4(4n-2) > 0 \\
&\iff & 12n + 20 &\ge 12n - 6 \\
&\iff & 20 &\ge -6
\end{aligned}$$

Auch diese Ungleichung ist allgemeingültig und daher $\frac{3}{4}$ eine untere Schranke.
c) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen die Ungleichung $\left|a_n - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$ untersuchen. (Da wir in b) bereits gezeigt haben, dass $a_n - \frac{3}{4} \ge 0$ ist, können wir die Betragstriche

auch weglassen. Zur Übung führen wir den Beweis aber ohne Verwendung von b) durch.) Wir müssen zeigen, dass diese Ungleichung *schließlich* in $\mathbb{N}$ gilt:

$$
\begin{array}{rrcll}
 & \left|\frac{3n+5}{4n-2}-\frac{3}{4}\right| & < & \varepsilon & \\
\iff & \frac{|4(3n+5)-3(4n-2)|}{|4(4n-2)|} & < & \varepsilon & \quad |\cdot|4(4n-2)|>0 \\
\iff & |12n+20-12n+6| & < & 4\varepsilon\cdot|4n-2| & \\
\iff & 26 & < & 4\varepsilon\cdot(4n-2) & (\text{da } 4n-2\geq 0) \\
\iff & 26 & < & 16\varepsilon\cdot n-8\varepsilon & |+8\varepsilon\,,\ :16\varepsilon>0 \\
\iff & \frac{26+8\varepsilon}{16\varepsilon} & < & n &
\end{array}
$$

Die letzte Ungleichung ist in $\mathbb{N}$ *schließlich* gültig, nämlich von der kleinsten natürlichen Zahl ab, die größer als $\frac{26+8\varepsilon}{16\varepsilon}$ ist. Da diese Überlegungen für jedes $\varepsilon > 0$ gelten, ist der Konvergenzbeweis geführt.
d) Wir setzen $\varepsilon = \frac{1}{10}$ und erhalten aus den obigen Äquivalenzumformungen die Bedingung

$$n > \frac{26+0{,}8}{1{,}6} = 16{,}75\,, \quad \text{also} \quad n \geq 17$$

Das 17. und alle weiteren Folgenglieder sind weniger als $\frac{1}{10}$ vom Grenzwert 0,75 entfernt. Nachfolgend zum Vergleich die Folgenglieder a_{15} bis a_{20} (näherungsweise):

n	15	16	17	18	19	20
a_n	0,86206	0,85483	0,84848	0,84285	0,83783	0,83333

3) a) Nullfolge, b) unbeschränkt, also nicht konvergent, c) Nullfolge, d) konvergent gegen 4, e) nicht konvergent, da sich die Werte 0 und 2 abwechseln.
4) a) wahr, b) wahr, c) falsch, d) wahr, e) falsch, f) falsch.
5) Man kann in a), b) die konstante Folge vom Wert 7 und in c), e) die konstante Folge vom Wert 4 angeben. Aber es gibt auch nicht-konstante Folgen mit diesen Eigenschaften:
a),b): $a_n = 7 + 1/n$. c),e): $a_n = 4 - 1/n$, f) $a_n = (-1)^n$.
Zu d) kann man kein Beispiel angeben, da eine alternierende Folge höchstens gegen 0 konvergieren kann, aber nicht gegen einen von 0 verschiedenen Grenzwert: Legt man um 5 die ε-Umgebung mit $\varepsilon = 1$, so können darin keine negativen Zahlen liegen. Da eine alternierende Folge aber immer wieder negative Werte hat, liegen unendlich viele Folgenglieder außerhalb dieser ε-Umgebung: 5 kann nicht Grenzwert sein.
6) a) $a_n = \dfrac{n^3+n}{n^4} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^3} \to 0$ für $n \to \infty$.
b) $a_n = \dfrac{3+\frac{1}{n}}{4-\frac{(-1)^n}{n}} \to \dfrac{3+0}{4-0} = \dfrac{3}{4}$ für $n \to \infty$.
c) $a_n = \dfrac{\frac{1}{n}+n}{n} = \dfrac{1}{n^2} + 1 \to 1$ für $n \to \infty$.
d) $a_n = \dfrac{4n^2+7n+8}{2n^2+3n+7} = \dfrac{4+\frac{7}{n}+\frac{8}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}} \to \dfrac{4}{2} = 2$ für $n \to \infty$.

Mit denselben Methoden (Bruch mit der höchsten auftretenden Potenz von n kürzen und dann Grenzwertsätze anwenden) erhält man bei e), g), k), m) den Grenzwert 0, da im Nenner eine höhere Potenz von n auftritt als im Zähler.
f) (a_n) ist unbeschränkt, da im Zähler eine höhere Potenz von n auftritt als im Nenner (bzw. da die Kehrwertfolge a) gegen 0 konvergiert.)
h) Hier ergibt sich unmittelbar aus den Grenzwertsätzen $a_n \to \dfrac{1}{3}$.
i) $a_n \to \dfrac{2}{1} = 2$ für $n \to \infty$.
j) $a_n \to \dfrac{4}{2} = 2$ für $n \to \infty$.
l) $a_n = \dfrac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{1}{n^3}} \to \dfrac{0}{1} = 0$ für $n \to \infty$.
n) Man kürze mit $\sqrt{n}$ und erhält den Grenzwert $\frac{4}{5}$. Man benutzt dabei, dass $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ eine Nullfolge ist. (Beweis?)
o) Hier erhält man entsprechend Konvergenz gegen 1.
p) $a_n = \dfrac{n^2}{n^3} = \dfrac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$.
q) Man kürze mit 2^n. Da $\dfrac{1}{2^n}$ eine Nullfolge ist, erhält man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
r) Entsprechend mit 3^n! Grenzwert ist -1.

7) a) *Wenn* die Folge (a_n) konvergiert, muss für den Grenzwert a gelten:

$$a = \frac{1}{2} \cdot a \iff 2a = a \iff a = 0\,.$$

b) *Wenn* die Folge (a_n) konvergiert, so muss für den Grenzwert a gelten:

$$a = 2 + 0{,}7 \cdot a \iff 0{,}3 \cdot a = 2 \iff a = \frac{20}{3}\,.$$

c) *Wenn* die Folge a_n konvergiert und *wenn* der Grenzwert $a \neq 0$ ist, dann konvergiert (gemäß den Grenzwertsätzen) die rechte Seite der Rekursionsgleichung wie folgt:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n}) \to \frac{1}{2}(a + \frac{3}{a})\,,$$

während selbstverständlich

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

gilt. Dies ergibt zusammen die folgende Gleichung für den gesuchten Grenzwert a:

$$a = \frac{1}{2}(a + \frac{3}{a}) \iff 2a^2 = a^2 + 3 \iff a^2 = 3 \iff a = \pm\sqrt{3}\,.$$

Damit kommen als Grenzwert für die Folge a_n nur 0, $\sqrt{3}$ oder $-\sqrt{3}$ in Frage. Da die $a_n \geq 0$ sind, scheidet $-\sqrt{3}$ aus. Man kann auch 0 ausschließen, indem man die Folge a_n genauer studiert (siehe Skript, Das Heron'sche Verfahren.)
Damit kann man die weiteren Teilaufgaben von Aufgabe 7 bearbeiten:

d) Die Folge ist definiert, da die Folgenglieder sämtlich nicht negativ sind (Wurzeln!). Daher kommt als Grenzwert höchstens eine Zahl $a \geq 0$ in Frage. Für diese muss dann nach den Grenzwertsätzen (für Summe und Wurzelziehen) gelten:

$$a = \sqrt{a+2} \implies a^2 = a + 2 \iff a^2 - a - 2 = 0$$
$$\iff (a-2)(a+1) = 0 \iff a = 2 \ \vee \ a = -1\,.$$

Wegen $a \geq 0$ kommt also nur $a = 2$ als Grenzwert in Frage.
e) Wieder gilt $a_n \geq 0$ für alle n. Für einen möglichen Grenzwert a gilt notwendig

$$a = \sqrt{2a} \implies a^2 = 2a \iff a(a-2) = 0 \iff a = 0 \ \vee \ a = 2\,.$$

Durch Zusatzüberlegungen kann man zeigen, dass $a = 0$ nicht in Frage kommt, denn es gilt stets $a_n \geq 1$. Begründung: $a_1 \geq \sqrt{2} \geq 1$, und wenn $a_n \geq 1$ ist, so folgt auch $a_{n+1} \geq \sqrt{2 \cdot 1} \geq 1$.
f) Hier kommt als Grenzwert nur eine Zahl a in Frage mit

$$a = \sqrt{2a+1} \implies a^2 = 2a+1 \iff a^2 - 2a - 1 = 0 \iff a = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}\,.$$

Wegen $a_n \geq 0$ gilt auch $a \geq 0$, und folglich ist $a = 1 + \sqrt{2}$ der einzig *mögliche* Grenzwert.

Ergänzung: Wir wollen uns (über die gestellten Aufgaben hinaus) mit der Frage befassen, ob die in Aufgabe 7 genannten Folgen denn tatsächlich konvergieren. Dazu zeigen wir, dass sie monoton und beschränkt sind. Die Konvergenz folgt dann aus dem Monotoniekriterium (2.5).
a) Diese Folge ist monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt, also konvergent. Wie oben gezeigt, muss der Grenzwert 0 sein.
b) Wir zeigen zunächst, dass $a_n \leq \frac{20}{3}$ gilt, und dann, dass (a_n) monoton wächst.
Die Abschätzung $a_n \leq \frac{20}{3}$ beweisen wir durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang $n = 1$: Es ist $a_1 = 2 \leq \frac{20}{3}$.
Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir setzen voraus: $a_n \leq \frac{20}{3}$ und folgern daraus

$$a_{n+1} = 2 + \frac{7}{10} \cdot a_n \leq 2 + \frac{7}{10} \cdot \frac{20}{3} = 2 + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}\,.$$

Damit ist auch der Induktionsschritt nachgewiesen. Fazit: *Alle* a_n sind nach oben durch $\frac{20}{3}$ beschränkt.
Anmerkung: Diese Argumentation ist nur erfolgreich, weil wir die 'richtige' obere Schranke gewählt haben. Mit einem anderen Wert als $\frac{20}{3}$ wäre diese Argumentation nicht möglich. Dies zeigt, dass hier die obigen Vorüberlegungen hinsichtlich eines *möglichen* Grenzwertes sehr nützlich sind.
Zum Nachweis der Monotonie untersuchen wir die Ungleichung

$$a_n \leq a_{n+1} \iff a_n \leq 2 + 0{,}7 \cdot a_n \iff 0{,}3 \cdot a_n \leq 2 \iff a_n \leq \frac{20}{3}\,.$$

Wie wir bereits gezeigt haben, ist die letzte Ungleichung allgemeingültig, also auch die erste: $a_n \leq a_{n+1}$; (a_n) ist monoton wachsend.
Beachten Sie: Wenn man mit dem Monotoniebeweis beginnt, stößt man zwangsläufig auf die notwendige Abschätzung $a_n \leq \frac{20}{3}$.

Zusatzfrage: Was geschieht, wenn man bei gleicher Rekursion den Anfangswert auf $a_1 = 7$ abändert?
c) war bereits allgemeiner untersucht worden (Heron's Verfahren). Der Grenzwert ist $\sqrt{3}$.
d) Wir zeigen, dass die Folge monoton wächst und beschränkt ist. Bei den nachfolgenden Argumentationen muss man mehrfach beachten, dass $a_n \geq 0$ ist. Wir zeigen, dass 2 eine obere Schranke ist, wieder durch vollständige Induktion. Zunächst ist $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$. *Wenn* nun $a_n \leq 2$ ist, so gilt auch

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \leq \sqrt{2+2} = 2\,.$$

Damit ist auch der Induktionsschritt nachgewiesen und es gilt $a_n \leq 2$ für alle n.
Wir kommen nun zum Monotoniebeweis:

$$\begin{aligned} a_n \leq a_{n+1} &\iff a_n \leq \sqrt{a_n+2} \iff a_n^2 \leq a_n + 2 \\ &\iff a_n^2 - a_n \leq 2 \iff a_n(a_n - 1) \leq 2\,. \end{aligned}$$

Wegen $a_n \leq 2$ gilt $a_n - 1 \leq 1$ und folglich $a_n(a_n - 1) \leq 2 \cdot 1 = 2$ für alle n: Die Folge ist monoton wachsend.
e) Wir zeigen wie bei d), dass 2 eine obere Schranke ist und dass die Folge monoton wächst. Wieder beachte man, dass $a_n \geq 0$ ist. Es ist $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$. *Wenn* nun $a_n \leq 2$ ist, so gilt auch

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2\,.$$

Wie oben folgt damit, dass für alle $n \in I\!\!N$ $a_n \leq 2$ ist. Wir untersuchen die Monotonie und beachten dabei $a_n \geq 0$:

$$a_n \leq a_{n+1} \iff a_n \leq \sqrt{2a_n} \iff a_n^2 \leq 2a_n \iff 0 \leq 2a_n - a_n^2 = (2 - a_n)a_n\,.$$

Wegen $0 \leq a_n \leq 2$ gilt die letzte Ungleichung für alle n (beide Faktoren sind ≥ 0).
f) Wir zeigen, dass $S = \sqrt{2} + 1$ eine obere Schranke für a_n ist, und dass a_n monoton wächst. Zunächst gilt (wegen $a_n \geq 0$) für alle n:

$$\begin{aligned} a_{n+1} \leq 1 + \sqrt{2} &\iff \sqrt{2a_n + 1} \leq 1 + \sqrt{2} \iff 2a_n + 1 \leq (1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} \\ &\iff 2a_n \leq 2 + 2\sqrt{2} \iff a_n \leq 1 + \sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Da $a_1 = \sqrt{2} \leq 1 + \sqrt{2}$ ist, folgt dies auch für a_2, dann für a_3, ...: Die Folge ist nach oben durch $S = 1 + \sqrt{2}$ beschränkt. Für den Monotonienachweis studieren wir

$$a_n \leq a_{n+1} \iff a_n \leq \sqrt{2a_n + 1} \iff a_n^2 \leq 2a_n + 1 \iff a_n(a_n - 2) \leq 1\,.$$

Die letzte Ungleichung ist immer gültig, denn aus $0 \leq a_n \leq 1 + \sqrt{2}$ folgt

$$a_n(a_n - 2) \leq (1 + \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2}) = -1 + 2 = 1\,.$$

8) Ist $a = 0$, so kann man $\sqrt{a_n}$ entsprechend der Konvergenzdefinition als Nullfolge nachweisen: $\sqrt{a_n} < \varepsilon \iff a_n < \varepsilon^2$, und da $\varepsilon^2 > 0$ ist, ist die letzte Abschätzung

bei einer Nullfolge (a_n) *schließlich* wahr.
Sei nun $a \neq 0$, also wegen $a_n \geq 0$ notwendig $a > 0$. Dann gilt folgende Beziehung:

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \cdot (a_n - a)\,.$$

Nach Voraussetzung ist $a_n - a$ eine Nullfolge. Wir zeigen nun, dass der Bruch beschränkt ist:

$$\sqrt{a_n} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a} > 0 \implies \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}\,.$$

Nach Schritt 4. im Beweis der Grenzwertsätze ist das Produkt einer Nullfolge und einer beschränkten Folge selbst eine Nullfolge:

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{a} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{(a_n - a)}_{\text{Nullfolge}} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty\,.$$