Übung (4) – Warnende Beispiele

Die folgenden Beispiele sollen davor warnen, zu schnell nach dem ersten Anschein zu urteilen. Wir betrachten die folgenden 5 Folgen:

$$a_n = \frac{10^n}{n!}\,, \qquad b_n = \frac{n^{10}}{n!}\,, \qquad c_n = \sqrt[n]{n^{10}}\,,$$

sowie

$$d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\,,$$

$$e_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}\,.$$

In der nachfolgenden Tabelle sind die ersten 5 Folgenglieder näherungsweise berechnet:

n	1	2	3	4	5
a_n	10	50	166.67	416.67	833.33
b_n	1	512	9841.5	43690.67	81380.21
c_n	1	32	38.94	32	25
d_n	1	1.5	1.83	2.08	2.28
e_n	1	1.25	1.36	1.42	1.46

Entgegen dem ersten Anschein haben diese Folgen die nachfolgend aufgelisteten Eigenschaften:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 1\,,$$
$$(d_n) \text{ ist unbeschränkt}\,, \qquad (e_n) \text{ konvergiert}\,.$$

Bei der Folge d_n ist der Abstand zweier aufeinander folgender Glieder eine Nullfolge; dennoch ist d_n *nicht konvergent!*

Die folgende Tabelle gibt einige Folgenglieder mit höherem Index an, die diese Phänomene ein wenig beleuchten. Dabei ist die Berechnung von d_n und e_n für höheres n mit einem Taschenrechner schon recht mühselig; hier wurde ein Computer benutzt.

n	10	50	100	1000	5000	10000
a_n	2755.731922	$3.29 \cdot 10^{-15}$	$1.07 \cdot 10^{-58}$			
b_n	2755.731922	$3.21 \cdot 10^{-48}$	$1.07 \cdot 10^{-138}$			
c_n	10	2.186724147	1.584893192	1.071519305	1.017180298	1.009252886
d_n	2.928968253	4.499205338	5.187377517	7.485470860	9.094508853	9.787606036
e_n	1.549767731	1.625132733	1.634983900	1.643934566	1.644734086	1.644834071

Die Behauptungen über die 5 Folgen kann man mit Mitteln der Schulmathematik beweisen. Für die ersten vier Folgen sind die Behauptungen bereits jetzt für uns im Bereich des Möglichen; für die Konvergenz von e_n benötigt man die Beschränktheit, die üblicherweise mit Mitteln der Integralrechnung bewiesen wird. Man kann sie aber direkt nachweisen, wenn man die richtige Beschränktheitsaussage behauptet. (Die Bestimmung des Grenzwertes $\pi^2/6$ sprengt allerdings völlig den Rahmen der Schulmathematik.)

Folgen a_n und b_n:

Beide Folgen haben nur positive Glieder. Wir betrachten die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \frac{10}{n+1}\,,$$
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{10}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{10}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} \cdot \frac{1}{n+1} = (1+\frac{1}{n})^{10} \cdot \frac{1}{n+1}\,.$$

Wir erkennen mit Hilfe der Grenzwertsätze, dass diese Quotientenfolgen in beiden Fällen *Nullfolgen* sind; die Quotienten liegen also *schließlich* unterhalb etwa von $\frac{1}{2}$. Also gibt es eine Nummer n_0 mit

$$a_{n+1} \leq \frac{a_n}{2} \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} \leq \frac{b_n}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_0\,.$$

Dies zeigt, dass beide Folgen Nullfolgen sein müssen.

Folge c_n:

Wegen $\sqrt[n]{n^{10}} = (\sqrt[n]{n})^{10}$ genügt es zu zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

Beweistip: Man setzt $x_n = a_n - 1$ und beweist unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes $n = (1+x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}x_n^2$. Folgern Sie dann $x_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$.

Folge d_n:

Die Unbeschränktheit von $d_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ ergibt sich mit Hilfe des folgenden Gedankens:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}_{\geq 8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + \ldots$$

Es ergibt sich so $d_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$; die Folge ist unbeschränkt. Wir halten fest:

Warnung: Ist eine Folge d_n monoton steigend und wird der Zuwachs $d_n - d_{n-1}$ beliebig klein ($d_n - d_{n-1} \to 0$), so braucht d_n keineswegs zu konvergieren, vielmehr kann d_n dennoch über alle Schranken wachsen!

Folge e_n:

Wir zeigen mittels vollständiger Induktion $e_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ für alle n. Daraus folgt insbesondere, dass e_n nach oben beschränkt ist (durch 2). Da e_n monoton wächst, ist e_n konvergent.