## Übung für Interessierte – Reihen

1) Gegeben ist eine beliebige Folge $(a_n)_{n\geq 0}$. Wir definieren dazu eine neue Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ durch

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{für } n \geq 0\,.$$

Man nennt $(s_n)$ die *Reihe* der $(a_n)$.
a) Geben Sie eine verbale Beschreibung und eine rekursive Definition für $(s_n)$.
b) Unter welchen Bedingungen an $a_n$ ist die Reihe $(s_n)$ monoton?
c) Zeigen Sie unter der Voraussetzung $a_n \geq 0$ für alle $n$:
$(s_n)$ ist genau dann konvergent, wenn $(s_n)$ (nach oben) beschränkt ist.
d) Ist $(s_n)$ konvergent, so ist $(a_n)$ eine Nullfolge.
[Tip: $a_n = s_n - s_{n-1}$.]
e) Vorsicht: Selbst wenn $(a_n)$ eine Nullfolge ist, kann $(s_n)$ *unbeschränkt* sein! Beispiel für diese Situation ist die Reihe $(s_n)$ zur Folge $a_n = \frac{1}{n}$, die sog. *harmonische* Reihe. Begründen Sie die Unbeschränktheit der harmonischen Reihe mit Hilfe des folgenden Gedanken:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{\geq 8\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \ldots$$

2) Wir betrachten eine *geometrische* Folge $a_n = q^n$ mit Anfangsglied $a_0 = 1$ und Quotient $q$.
a) Wiederholen Sie kurz, dass für $q \neq 1$ die zugehörige *geometrische Reihe*

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

folgende explizite Darstellung hat:

$$s_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\,.$$

b) Zeigen Sie, dass diese geometrische Reihe $(s_n)$ für $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$ konvergiert:

$$|q| < 1 \implies \sum_{k=0}^{\infty} q^k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}\,.$$

c) Zeigen Sie, dass die Reihe $(s_n)$ für $|q| \geq 1$ *nicht* konvergieren kann.

3) (Majorantenkriterium)
Es sei $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ mit $a_n \geq 0$.
a) Zeigen Sie: $(s_n)$ konvergiert genau dann, wenn $(s_n)$ nach oben beschränkt ist. (Wiederholung.)
b) Es gelte $0 \leq a_n \leq a'_n$ für alle $n$ und die Reihe $s'_n = a'_0 + a'_1 + \ldots + a'_n$ der $a'_n$ sei konvergent. (Man sagt: $s'_n$ ist eine *konvergente Majorante* für $s_n$.)
Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe $(s_n)$ konvergent ist.

4) (Quotientenkriterium)
Es sei $(s_n)$ eine Reihe mit *positiven* Gliedern $a_n$. Wir setzen zusätzlich voraus, dass alle Quotienten aufeinanderfolgender Glieder unterhalb einer festen Zahl $q < 1$ liegen:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad \text{für alle } n\,. \tag{$*$}$$

a) Zeigen Sie

$$a_n \leq a_0 q^n\,.$$

b) Folgern Sie nun mit Hilfe des Majorantenkriteriums:

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \quad \text{ist konvergent.}$$

c) Beweisen Sie damit die Konvergenz der Reihe ($0! = 1$ gesetzt):

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\,.$$

[Ihren Grenzwert nennt man $e$, die *Euler*'sche Zahl.]

5) (Wurzelkriterium)
Es sei $(s_n)$ eine Reihe mit *positiven* Gliedern $a_n$. Wir setzen jetzt zusätzlich voraus, dass alle Wurzeln $\sqrt[n]{a_n}$ unterhalb einer Zahl $q < 1$ liegen:

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \text{für alle } n\,. \tag{$**$}$$

Folgern Sie ähnlich wie in der vorangehenden Aufgabe

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{ist konvergent.}$$

6) Überlegen Sie sich:
a) Im Majorantenkriterium (siehe Aufgabe 3) gilt die Konvergenzaussage für $s_n$ auch dann, wenn die vorausgesetzte Abschätzung $0 \leq a_n \leq a'_n$ nur *schließlich* (d. h. ab einer Nummer $n_0$) gilt.
b) In den beiden vorangehenden Aufgaben bleiben die Konvergenzaussagen gültig, auch wenn die vorausgesetzten Abschätzungen ($*$) bzw. ($**$) nur *schließlich* gelten.
c) Die Bedingungen ($*$) bzw. ($**$) sind schließlich erfüllt, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1\,.$$

**Reihen — Lösungen**

1) a) $s_n$ ist die Summe der ersten $n$ Glieder der Folge $(a_n)$. Es ist $s_1 = a_1$ und $s_n = s_{n-1} + a_n$.
b) Es ist für $n \geq 2$ $s_n - s_{n-1} = a_n$, also ist $s_n$ genau dann monoton wachsend, wenn $a_n \geq 0$ ist für alle $n \geq 2$. Entsprechend für monoton fallend.
c) Wenn $a_n \geq 0$ ist, ist $s_n$ monoton wachsend. Also ist nach dem Monotoniekriterium $s_n$ konvergent, wenn $s_n$ (nach oben) beschränkt ist. Da eine konvergente Folge *immer* beschränkt ist, ist c) bewiesen.
d) Es sei $s$ der Grenzwert von $s_n$, also auch von $s_{n-1}$. Dann hat $a_n = s_n - s_{n-1}$ gemäß den Grenzwertsätzen den Grenzwert $s - s = 0$: $(a_n)$ ist eine Nullfolge.
e) Nach der angegebenen Idee erhalten wir die folgende Abschätzung

$$s_{2^k} \geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}\,.$$

Man kann nun zu jeder möglichen Schranke $S$ ein $k$ so wählen, dass $1+k/2 > S$ ist, nämlich $k > 2(S-1)$. Für solch ein $k$ gilt dann $s_{2^k} > S$, so dass die harmonische Reihe $(s_n)$ nicht beschränkt ist.
Dieses Beispiel sollte vor Trugschlüssen warnen:
**Warnung:** Ist eine Folge $s_n$ monoton steigend und wird der Zuwachs $s_n - s_{n-1} = a_n$ beliebig klein, so braucht $s_n$ keineswegs zu konvergieren, vielmehr kann $s_n$ dennoch über alle Schranken wachsen!

2) a) Es ist $s_n$ genau die in Übungen (2) 3)c) definierte Folge.
b) Für $|q| < 1$ ist die geometrische *Folge* $q^n$ eine Nullfolge, also folgt mit den Grenzwertsätzen aus a) die Konvergenz von $s_n$ gegen den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}\,.$$

c) Ist $q = 1$, so ist $s_n = n$ unbeschränkt, also nicht konvergent. Ist $q = -1$, so hat $s_n$ abwechselnd die Werte 1 und 0, ist also wiederum nicht konvergent. Ist schließlich $|q| > 1$, so ist die Folge $q^n$ unbeschränkt. Dann kann aber nach Aufgabe 3) d) die Folge $s_n$ nicht konvergieren.

**Zusatz:** Hat die geometrische Reihe nicht das Anfangsglied 1, sondern $a_0$, ist also

$$s_n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \ldots + a_0 q^n = a_0 \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^n)\,,$$

so erhält man im Falle $|q| < 1$ als Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \big(a_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\big) = a_0 \cdot \frac{-1}{q-1} = \frac{a_0}{1-q}\,.$$

3) a) Ist $s_n$ konvergent, so auch beschränkt (Bemerkung (2.2), c)). Umgekehrt: Die Folge $s_n$ ist wegen $s_n - s_{n-1} = a_n \geq 0$ monoton wachsend. Nach dem Monotoniekriterium ist sie dann bereits konvergent, sobald sie (nach oben) beschränkt ist. (Nach unten ist sie ohnehin beschränkt.)

b) Aus $a_n \leq a'_n$ folgt unmittelbar $s_n \leq s'_n$. Da $s'_n$ als konvergente Folge beschränkt ist, ist dann auch $s_n$ nach oben beschränkt, also nach a) konvergent.

6) a) Man argumentiert etwa so: Man ändere die *endlich* vielen Folgenglieder der $s'_n$, für die die Abschätzung *nicht* gilt, so ab, dass die Abschätzung *immer* richtig ist. (Man ersetze etwa die $a'_n$ durch $a_n$.) Da nur *endlich* viele Glieder verändert werden, bleibt die Reihe $s'_n$ beschränkt! Also ist auch $s_n(\leq s'_n)$ beschränkt und folglich konvergent.