Übungen (5a)

1) a) Bestimmen Sie eine Nullstelle von $f(x) = x^3 - x - 1$ bis auf 2 Dezimalen hinter dem Komma genau.
b) Ist diese Nullstelle rational oder irrational? Begründen Sie Ihre Antwort genau.
c) Können Sie alle Nullstellen von f approximieren?

2) Begründen Sie, warum das Halbierungsverfahren nicht geeignet ist, doppelte Nullstellen zu finden.

3) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 3x^2 + x + 4$. Zeigen Sie, dass f im Intervall $]1.3, 1.4[$ eine *rationale* und eine *irrationale* Nullstelle hat. Bestimmen Sie die rationale exakt und die irrationale bis auf zwei Stellen hinter dem Komma genau. Erläutern Sie die benutzten mathematischen Fakten möglichst genau.

4) Wir definieren das Vorzeichen (Signum) von x durch

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Graphen von $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ und $g(x) = |\operatorname{sign}(x)|$ und untersuchen Sie beide Funktionen auf Stetigkeit.

5) a) Folgern Sie aus den Grenzwertsätzen: Sind die Funktionen f und g an der Stelle a definiert und stetig, so sind die Summenfunktion $f + g$, die Differenzfunktion $f - g$ und die Produktfunktion $f \cdot g$ stetig an der Stelle a.
b) Welche Probleme treten bei der Quotientenfunktion auf? Wie muss da das entsprechende Resultat formuliert werden?

Übungen (5a) — Lösungen

1) a) Die Funktion f ist ganzrational, also auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und stetig. Hat daher f an zwei Stellen Funktionswerte mit unterschiedlichem Vorzeichen, so muss f dazwischen eine Nullstelle haben (Zwischenwertsatz). Wir berechnen zunächst Funktionswerte an ganzzahligen Stellen und suchen nach Werten mit unterschiedlichem Vorzeichen:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-7	-1	-1	-1	5

Daraus ergibt sich, dass f zwischen 1 und 2 eine Nullstelle haben muss.
Wir untersuchen daher das Intervall $[1, 2]$ in Zehntelschritten: $f(1.3) \approx -0.10$ und $f(1.4) \approx +0.34$ zeigen, dass zwischen 1.3 und 1.4 eine Nullstelle liegt.
Nun untersuchen wir das Intervall $[1.3, 1.4]$ in Hunderstelschritten und erhalten $f(1.32) \approx -0.02$ und $f(1.33) \approx +0.02$. Somit hat f eine Nullstelle im Intervall $[1.32, 1.33]$. Damit ist eine Nullstelle $a = 1,32\ldots$ von f bis auf zwei Dezimalstellen bestimmt.
b) Die möglichen rationalen Nullstellen von $f(x) = x^3 - x - 1$ sind lediglich ± 1. Beide sind jedoch keine Nullstellen von f, also hat f keine *rationalen* Nullstellen. Die in a) approximierte Nullstelle muss also irrational sein.
c) Um evtl. weitere Nullstellen zu bestimmen, braucht man weitere Intervalle, über denen f sein Vorzeichen wechselt. Wenn man diese findet, kann man weitere Nullstellen approximieren; wenn man jedoch keinen weiteren Vorzeichenwechsel findet, so bedeutet dies nicht, dass es keine weiteren Nullstellen gibt. Es können zwei Nullstellen so nahe beieinander liegen, dass ein entsprechender Vorzeichenwechsel noch nicht entdeckt wurde (siehe spätere Aufgabe).

2) Das Halbierungsverfahren benötigt einen Vorzeichenwechsel bei der gesuchten Nullstelle. Bei doppelten Nullstellen liegt jedoch kein Vorzeichenwechsel vor!

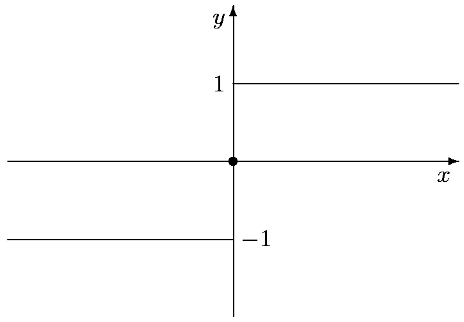
3) Wir bestimmen zunächst die möglichen rationalen Nullstellen. Dies sind ± 1, ± 2, ± 4, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{4}{3}$. Die einzige mögliche rationale Nullstelle im angegebenen Intervall $]1{,}3; 1{,}4[$ ist $\frac{4}{3}$. Mittels Polynomdivision spalten wir den Faktor $x - \frac{4}{3}$ (oder $3x - 4$) ab: $f(x) = (3x - 4)(x^3 - x - 1)$. Wir untersuchen nun den verbleibenden Faktor $g(x) = x^3 - x - 1$ auf Nullstellen in demselben Bereich. Da $x^3 - x - 1$ keine rationale Nullstelle besitzt (vgl. Aufgabe 1), sind alle weiteren Nullstellen von f notwendig irrational. Da $g(x) = x^3 - x - 1$ in dem betrachteten Intervall das Vorzeichen wechselt

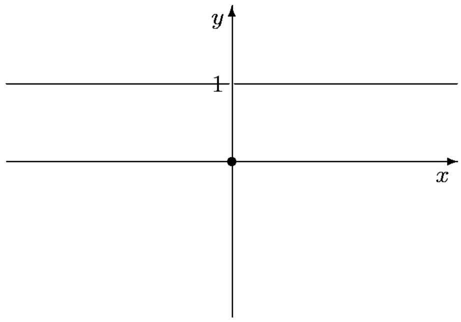
$$g(1{,}3) \approx -0{,}1 < 0\,, \quad g(1{,}4) \approx 0{,}34 > 0\,,$$

muss g in diesem Intervall eine Nullstelle besitzen (Zwischenwertsatz).

4) Die folgenden Skizzen zeigen den Verlauf der Funktionen sign und |sign|. Dabei ist letzterer an der Stelle $x = 0$ unterbrochen und der Funktionswert dort 0 (markierter

Punkt im Koordinatenursprung).





Graph der Funktion sign Graph der Funktion |sign|

Beide Funktionen weisen an der Stelle 0 *Sprünge* auf und sind daher dort *unstetig.* Ein formaler Beweis dieser Tatsache verläuft wie folgt. Man muss eine Folge x_n im Definitionsbereich angeben, die gegen 0 konvergiert, für die aber die Folge der Funktionswerte $f(x_n)$ *nicht* gegen $f(0) = 0$ konvergiert.
Etwa für die typische Nullfolge $x_n = \frac{1}{n}$ erhält man hier

$$\operatorname{sign}(x_n) = \operatorname{sign}(\frac{1}{n}) = +1 \to +1 \quad \text{und} \quad |\operatorname{sign}(x_n)| = |+1| = +1 \to +1\,.$$

In beiden Fällen konvergiert die Folge $f(x_n)$ gegen 1 (sie ist sogar konstant gleich 1), aber der Funktionswert an der Stelle 0 ist $f(0) = 0$, also davon verschieden. Beide Funktionen sind an der Stelle 0 unstetig.
An allen anderen Stellen sind beide Funktionen stetig. Wir führen den Beweis für $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ und eine Stelle $a > 0$. Dazu gehen wir von einer *beliebigen* Folge x_n aus, die gegen a konvergiert. Wir müssen zeigen, dass dann $f(x_n)$ gegen $f(a)$ konvergiert. Da x_n gegen $a > 0$ konvergiert, müssen die Folgenglieder x_n *schließlich* ebenfalls positiv sein, also gilt *schließlich* $f(x_n) = \operatorname{sign}(x_n) = 1$. Nun hat eine Folge, die *schließlich* gleich 1 ist, natürlich den Grenzwert 1:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1\,.$$

Wegen $a > 0$ gilt $f(a) = \operatorname{sign}(a) = 1$, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ bewiesen ist.
Im Kern zeigen diese Überlegungen, dass es bei der Stetigkeit einer Funktion f an einer Stelle a nur darauf ankommt, welche Werte die Funktion in einer (beliebig kleinen) *Umgebung* von a annimmt. Dabei versteht man unter einer Umgebung einer Stelle a ein *offenes* Intervall $]c, d[$, in dem a liegt. Da beide Funktionen in Umgebungen von Stellen $a \neq 0$ konstant sind, sind sie dort auch stetig.

5) a) Wir führen den Beweis für die Summenfunktion $f + g$ mit dem Funktionsterm $f(x) + g(x)$. Seien f und g an der Stelle a definiert und stetig. Dann ist auch $f + g$ bei a definiert. Sei x_n eine beliebige Folge im Definitionsbereich von $f + g$ mit Grenzwert a. Da f bei a stetig ist, konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(a)$. Genauso folgt $g(x_n) \to g(a)$. Nach dem Grenzwertsatz für Summen konvergiert dann die Summenfolge $f(x_n) + g(x_n)$ gegen die Summe $f(a) + g(a)$:

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = f(a) + g(a)\,.$$

Da dies für *jede* Folge x_n mit Grenzwert a gilt, ist damit die Stetigkeit von $f + g$ an der Stelle a bewiesen.

b) Wir betrachten nun die Quotientenfunktion $\frac{f}{g}$ mit dem Funktionsterm $\frac{f(x)}{g(x)}$. Sind f und g bei a definiert und stetig, so braucht $\frac{f}{g}$ bei a *nicht* definiert zu sein. Vielmehr gilt: $\frac{f}{g}$ ist nur dann bei a definiert, wenn $g(a) \neq 0$ ist. Wir setzen dies nun voraus! Ist nämlich eine Funktion an einer Stelle *nicht definiert,* so kann sie dort erst recht nicht *stetig* sein.

Sei also nun $a \in \mathbb{D}(\frac{f}{g})$ und $x_n \in \mathbb{D}(\frac{f}{g})$ eine Folge mit Grenzwert a. Da f und g an der Stelle a stetig sind, konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(a)$ und $g(x_n)$ gegen $g(a)$. Nach dem Grenzwertsatz für Quotienten konvergiert dann der Quotient $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ gegen $\frac{f(a)}{g(a)}$ – *vorausgesetzt* $g(a) \neq 0$. Wegen $a \in \mathbb{D}(\frac{f}{g})$ gilt aber $g(a) \neq 0$. Damit ist für *jede* Folge $x_n \in \mathbb{D}(\frac{f}{g})$ mit $x_n \to a$ gezeigt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(a)}{g(a)} \,.$$

Die Quotientenfunktion $\frac{f}{g}$ ist also an der Stelle a stetig – wenn sie dort definiert ist!