Übungen (7)

1) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f und eine beliebige Stelle $a \in \mathbb{D}_f$ den Differenzenquotienten $D(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ als rationale Funktion von x und berechnen Sie dann den Grenzwert $\lim_{x \to a} D(x) = f'(a)$.
   a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^3$, c) $f(x) = x^4$,
   d) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$, e) $f(x) = x^3 - 3x^2$,
   f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, g) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$.

2) a) Formulieren Sie die Ihnen bekannten Ableitungsregeln.
   b) Leiten Sie eine dieser Regeln her.
   c) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen f die Ableitungsfunktionen f':
      i) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1}{2}x - 1$,
      ii) $f(x) = (x^3 - 3x)^2 - 5x^2 + 1$,
      iii) $f(x) = 4x^2 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{x^2}$,
      iv) $f(x) = 6\sqrt{x} + \dfrac{6}{\sqrt{x}}$.

3) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^2$ eine Formel für die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle a (in der Standardform $y = mx + b$). Übersetzen Sie das gefundene Ergebnis in eine Konstruktionsvorschrift zur geometrischen Konstruktion der Tangente an die Normalparabel.

4) Wir betrachten die Sekante durch die Punkte P und S des Graphen der Funktion f. Gesucht sind die Tangenten an den Graphen von f, die zu der Sekante parallel verlaufen. Bestimmen Sie den Berührpunkt.
   a) $f(x) = 2x^2 + 5x - 4$, $P = (1, ?)$, $S = (3, ?)$,
   b) $f(x) = 4x^2 - 9x + 6$, $P = (-1, ?)$, $S = (0, ?)$,
   c) $f(x) = 3x + 4 + \sqrt{x}$, $P = (0, ?)$, $S = (1, ?)$,
   d) $f(x) = 4x + 2 - \sqrt{x}$, $P = (4, y)$, $S = (9, ?)$.

5) Gegeben $f(x) = 12x^5 + 15x^4 - 40x^3 + 4$.
   a) Bestimmen Sie Gleichungen für die Tangenten an den Graphen von f mit dem Berührpunkt $P_1 = (-1, ?)$ bzw. $P_2 = (2, ?)$. Wo schneiden sich die beiden Tangenten?
   b) An welchen Stellen hat der Graph von f waagerechte Tangenten? Bestimmen Sie die zugehörigen Punkte des Graphen.

6) a) Bestimmen Sie die Berührpunkte all der Tangenten an die Normalparabel, die durch den Punkt $Q = (0, -1)$ verlaufen.
   b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe für $Q = (-1, -3)$ bzw. $Q = (1, 2)$.

7) Untersuchen Sie, ob sich die Graphen der Funktionen $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x + 20$ und $g(x) = x^3 - 6x^2 + 18x - 24$ berühren. Bestimmen Sie ggf. die Berührpunkte.

Übungen (7) — Lösungen

1) Der Differenzenquotient zur Funktion f und Stelle a ist gegeben durch

$$D(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

und der Ableitungswert von f an der Stelle a ist der Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

a) Für $f(x) = x^2$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$D(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = x + a = \tilde{D}(x) \quad (x \neq a)\,,$$

also nach den Grenzwertsätzen

$$f'(a) = \lim_{x \to a} D(x) = \lim_{x \to a}(x + a) = 2a\,.$$

b) Für $f(x) = x^3$ und beliebiges a gilt

$$D(x) = \frac{x^3 - a^3}{x - a}\,.$$

a ist eine Lücke von D, aber auch eine Nullstelle des Zählers. Also kann man im Zähler $x^3 - a^3$ den Linearfaktor $x - a$ abspalten und dann kürzen. Dies geschieht mittels Polynomdivision. Man erhält

$$D(x) = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2 \quad (x \neq a)\,.$$

Also folgt

$$f'(a) = \lim_{x \to a} D(x) = \lim_{x \to a}(x^2 + ax + a^2) = a^2 + aa + a^2 = 3a^2\,.$$

c) Für $f(x) = x^4$ ergibt sich bei beliebigem a $f'(a) = 4a^3$.
d) Für $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ und beliebiges a ergibt sich

$$D(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1 - (2a^2 - 4a + 1)}{x - a} = \frac{2x^2 - 4x - 2a^2 + 4a}{x - a}\,.$$

Durch Polynomdivision erhält man $D(x) = 2x + 2a - 4$ und damit $f'(a) = \lim_{x \to a} D(x)$ $= 2a + 2a - 4 = 4a - 4$. (Man beachte bei der Polynomdivision, dass $D(x)$ ein Polynomterm in der Variablen x ist und der Parameter a wie eine Zahlkonstante behandelt werden muss.)

e) Als Ergebnis ermittelt man $f'(a) = 3a^2 - 6a$.
f) Für $f(x) = 1/x$ und $a \in \mathbb{D}_f$, also $a \neq 0$, ergibt sich als Differenzenquotient

$$D(x) == \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = \frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a} = \frac{(a-x)}{xa \cdot (x-a)} = \frac{-1}{xa}.$$

Wegen $a \neq 0$ erhält man daraus mit den Grenzwertsätzen

$$f'(a) = \lim_{x \to a} D(x) = \lim_{x \to a} (-\frac{1}{xa}) = -\frac{1}{a^2}.$$

g) Wieder bestimmen wir den Differenzenquotienten und stellen ihn als rationale Funktion dar. Sei $a \in \mathbb{D}(f)$, also $2a+1 \neq 0$. Dann gilt für $x \in \mathbb{D}(f)$, $x \neq a$:

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{1}{x-a}(f(x) - f(a)) = \frac{1}{x-a} \cdot (\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2a+1}) \\ &= \frac{1}{x-a} \cdot \frac{(2a+1)-(2x+1)}{(2x+1)(2a+1)} = \frac{2(a-x)}{(x-a)(2x+1)(2a+1)} = \frac{-2}{(2x+1)(2a+1)} \end{aligned}$$

Nun kann man den Grenzwert für $x \to a$ ermitteln:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} D(x) = \lim_{x \to a} (-\frac{2}{(2x+1)(2a+1)}) = -\frac{2}{(2a+1)(2a+1)} = -\frac{2}{(2a+1)^2}.$$

2) a/b) Siehe Skript.
c) i) $f'(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$.
ii) Hier muss man — bei unserem derzeitigen Kenntnisstand — zunächst ausmultiplizieren, um $f(x)$ auf die Standardform eines Polynomterms zu bringen und dann die Ableitungsregel (Satz (6.11)) anwenden zu können.
$f(x) = x^6 - 6x^4 + 4x^2 + 1$, $f'(x) = 6x^5 - 24x^3 + 8x$.
iii) Wir stellen f durch Potenzfunktionen (mit negativen Exponenten) dar, um die allgemeine Potenzregel anwenden zu können:

$$f(x) = 4x^2 + 5x^{-1} - 6x^{-2} \implies f'(x) = 8x - 5x^{-2} + 12x^{-3} = 8x - \frac{5}{x^2} + \frac{12}{x^3}.$$

iv) Hier verfahren wir wie bei iii), nur dass jetzt sogar gebrochene Exponenten auftreten.

$$f(x) = 6x^{1/2} + 6x^{-1/2} \implies f'(x) = 3x^{-1/2} - 3x^{-3/2} = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x^3}}.$$

3) Die allgemeine Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f an einer Stelle a ist gegeben durch

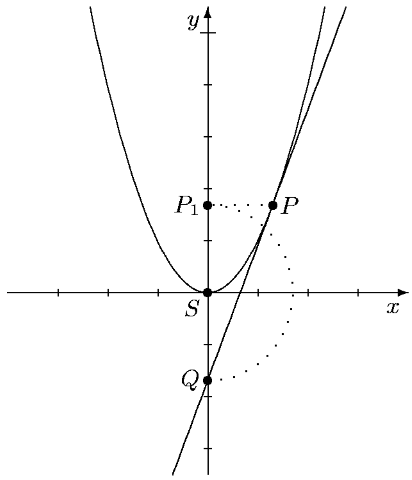
$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

also für $f(x) = x^2$:

$$y = a^2 + 2a(x-a) = a^2 + 2ax - 2a^2 = 2ax - a^2.$$

Der y-Achsenabschnitt der Tangente ist also $-a^2$. Die Tangente verläuft somit durch den Berührpunkt $P = (a, f(a)) = (a, a^2)$ und den Punkt $Q = (0, -a^2)$.

Man konstruiert nun die Tangente, indem man Q konstruiert und mit P verbindet. Die nebenstehende Skizze veranschaulicht die Konstruktion von Q:



Man fälle vom Punkt P aus das Lot auf die Symmetrieachse der Parabel; man erhält einen Lotfußpunkt P_1.
Nun zeichne man einen Kreis um den Scheitelpunkt S durch den Lotfußpunkt P_1. Der zweite Schnittpunkt mit der Symmetrieachse ist der gesuchte Punkt Q.
Die Verbindungsgerade von P und Q ist die Tangente an die Normalparabel im Punkt P.

4) a) Da die Punkte auf dem Graphen liegen sollen, gilt $P = (1, f(1)) = (1, 3)$ und $S = (3, f(3)) = (3, 29)$. Der Anstieg der Sekanten durch P und S ist daher

$$m = \frac{29 - 3}{3 - 1} = 13\,.$$

Gesucht ist jetzt eine parallele Tangente, also mit Tangentenanstieg $f'(x) = 13$. Wegen $f'(x) = 4x + 5$ ergibt sich die einzige Lösung $x = 2$. Der Berührpunkt ist dann der Punkt $B = (2, f(2)) = (2, 14)$.
b) Genauso erhält man in b) die Punkte $P = (-1, 19)$, $S = (0, 6)$, den Sekantenanstieg $m = -13$, die Gleichung $-13 = f'(x) = 8x - 9$ und die einzige Lösung $x = -1/2$. Der gesuchte Berührpunkt ist $B = (-1/2, 23/2)$.
c) $P = (0, 4)$, $S = (1, 8)$, Sekantenanstieg $m = 4$, Gleichung $f'(x) = 4$. Wir berechnen zunächst die Ableitung von $f(x) = 3x + 4 + x^{1/2}$:

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

und lösen nun die Gleichung $f'(x) = 4$: f' ist nur für $x > 0$ definiert. In diesem Bereich gilt

$$4 = f'(x) = 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \iff 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \iff \sqrt{x} = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{4}\,.$$

Der gesuchte Berührpunkt ist $B = (1/4, 21/4)$.
d) Ergebnis $B = (25/4, 49/2)$.

5) a) Die Tangentengleichung zur Berührstelle a lautet für eine beliebige Funktion $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Wir berechnen $f'(x) = 60x^4 + 60x^3 - 120x^2$ und erhalten für die beiden Stellen $a_1 = -1$ und $a_2 = 2$ die Werte $f(-1) = 47$, $f'(-1) = -120$ bzw. $f(2) = 308$, $f'(2) = 960$. Damit lauten die Tangentengleichungen:

$$\begin{aligned}\text{Tangentengleichung für } a = -1: \quad & y = 47 - 120(x + 1) = -120x - 73\,,\\ \text{Tangentengleichung für } a = 2: \quad & y = 308 + 960(x - 2) = 960x - 1612\,.\end{aligned}$$

Die Schnittstelle der beiden Tangenten erhält man als Lösung der Gleichung

$$-120x - 73 = 960x - 1612 \iff 1080x = 1539 \iff x = \frac{57}{40} = 1,425\,.$$

Die y-Koordinate des Schnittpunktes S der beiden Tangenten erhält man, indem man die Schnittstelle $\frac{57}{40}$ in eine der Tangentengleichungen einsetzt:

$$-120 \cdot \frac{57}{40} - 73 = -171 - 73 = -244 \implies S = (\frac{57}{40}\,, -244)\,.$$

b) Waagerechte Tangenten liegen vor, wenn der Tangentenanstieg Null ist. Wir lösen also die Gleichung

$$f'(x) = 0 \iff 60x^4 + 60x^3 - 120x^2 = 0$$
$$\iff x^2(x^2 + x - 2) = 0 \iff x^2(x+2)(x-1) = 0\,.$$

Die Lösungen sind 0, -2 und $+1$. Dies sind *Stellen,* an denen f eine waagerechte Tangente hat. Die zugehörigen Graphenpunkte sind

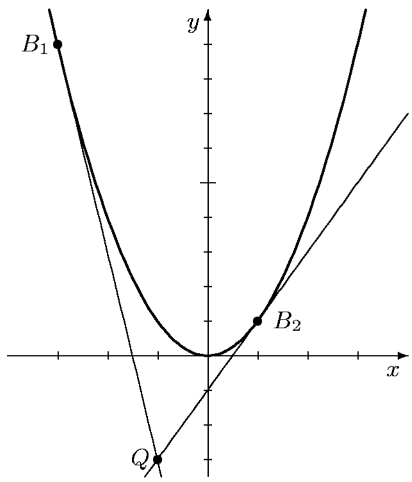
$$P_1 = (-2, f(-2)) = (-2, 180)\,, \quad P_2 = (0, f(0)) = (0, 4)$$
$$\text{und } P_3 = (1, f(1)) = (1, -9)\,.$$

6) a) Die Tangente an die Normalparabel mit Berührstelle a hat die Gleichung $y = f(a) + f'(a)(x-a) = a^2 + 2a(x-a) = a^2 + 2ax - 2a^2 = 2ax - a^2$. Soll die Tangente durch den Punkt $Q = (0, -1)$ verlaufen, so muss $-a^2 = -1$, also $a^2 = 1$ sein. Damit ergeben sich zwei mögliche Berührstellen $a = \pm 1$. Die gesuchten Berühr*punkte* sind $(a, f(a))$, also $B_1 = (-1, 1)$ und $B_2 = (1, 1)$.

b) Wieder gehen wir von der Tangentengleichung $y = 2ax - a^2$ aus. Da der Punkt $Q = (-1, -3)$ auf der Tangente liegen soll, müssen seine Koordinaten die Tangentengleichung erfüllen, es muss also gelten:

$$-3 = 2a \cdot (-1) - a^2\,.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für die gesuchte Größe a ($a^2 + 2a - 3 = 0$); man findet als Lösungen $a = -3$ und $a = +1$. Die zugehörigen Berührpunkte sind $B_1 = (-3, 9)$ und $B_2 = (1, 1)$. Die nebenstehende Skizze veranschaulicht die gefundenen Ergebnisse.



Mit denselben Überlegungen wird man für den Punkt $Q = (1, 2)$ auf die quadratische Gleichung $a^2 - 2a + 2 = 0$ geführt, die keine Lösung besitzt. Damit gibt es auch keine Tangenten an die Normalparabel, die durch diesen Punkt verlaufen.

7) Berührpunkte zweier Funktionsgraphen sind gemeinsame Punkte beider Graphen, an denen die Anstiege identisch sind. Man sucht also *Stellen* x mit den beiden Eigenschaften:

$$f(x) = g(x) \text{ und } f'(x) = g'(x)\,.$$

Dabei handelt es sich um *zwei* Gleichungen mit einer Unbekannten. Diese kann man lösen, indem man zunächst eine der beiden löst, und dann (durch Einsetzen)

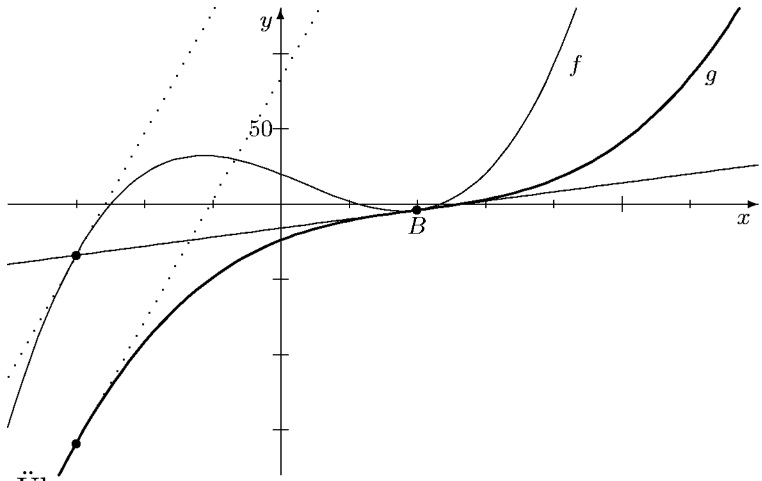
überprüft, ob die gefundenen Lösungen auch die andere Gleichung erfüllen.
Welche Gleichung man zunächst löst, ist dabei vom logischen Standpunkt her beliebig. Vom praktischen Standpunkt aus jedoch nicht, da die Gleichung $f'(a) = g'(a)$ für ganzrationale Funktionen von kleinerem Grad und damit in der Regel von geringerem Schwierigkeitsgrad ist. Im vorliegenden konkreten Fall gilt

$$f'(x) = g'(x) \iff 9x^2 - 6x - 18 = 3x^2 - 12x + 18 \iff 6x^2 + 6x - 36 = 0$$
$$\iff x^2 + x - 6 = 0 \iff (x+3)(x-2) = 0 \iff x = -3 \vee x = 2\,.$$

Damit hat man zwei Stellen gefunden, an denen die beiden Graphen parallele Tangenten haben. Berührpunkte liegen aber nur dann vor, wenn die zugehörigen Punkte auf dem Graphen übereinstimmen. Man berechnet daher zu den gefundenen *Stellen* (=x-Koordinaten) die zugehörigen y-Koordinaten der Punkte auf dem jeweiligen Graphen.

$$f(-3) = -34\,,\ g(-3) = -159 \quad \text{und} \quad f(2) = -4\,,\ g(2) = -4\,.$$

Damit ist nur die Zahl 2 eine Lösung *beider* Gleichungen $f(x) = g(x)\,,\ f'(x) = g'(x)$. Es gibt also nur einen Berührpunkt, dieser ist $B = (2, -4)$.
Nachfolgend eine Skizze beider Funktionen. Eingezeichnet sind die beiden parallelen Tangenten an der Stelle -3 und die gemeinsame Tangente an der Stelle 2.



Ergänzende Übung:
Berechnen Sie alle Schnittstellen der beiden Graphen. Was fällt Ihnen auf?