## Übungen (8)

1) Berechnen Sie die Ableitungsfunktionen aller rationalen Funktionen von Übungsblatt (6).
2) Bestimmen Sie alle stationären Stellen der nachfolgenden Funktionen. Entscheiden Sie, welche davon Extremstellen sind und welcher Art diese sind.
   a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3$,
   b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x - 1$,
   c) $f(x) = x^4 - 4x^2 - 16x + 17$,
   d) $f(x) = 3x^5 - 10x^3 - 45x + \frac{4}{7}$,
   e) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{x}$,
   f) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.
3) Es sei $f(x) = x^3 - x + 1$.
   a) Bestimmen Sie die Monotonieintervalle und Extrema von $f$.
   b) Zeigen Sie damit, dass $f$ nur eine Nullstelle hat.
   c) Bestimmen Sie den größten und kleinsten Funktionswert von $f$ über dem Intervall $I = [-\frac{1}{2}, 1]$.
   d) Bestimmen Sie alle Werte, die $f$ über dem Intervall $I = [-\frac{1}{2}, 1]$ annimmt.
4) a) Zeigen Sie am Beispiel $f(x) = \dfrac{1}{x}$, dass der schwache Monotoniesatz nur über einem *Intervall* gültig ist.
   b) Die Funktion $f$ sei über dem offenen Intervall $I = ]a, b[$ streng monoton wachsend. Ist $f$ an den Randstellen $a, b$ stetig, so ist $f$ auch über dem geschlossenen Intervall $\bar{I} = [a, b]$ streng monoton wachsend.
   [Tip: $f(b) = \lim_{n\to\infty} f(b - \frac{1}{n})$.]
   c) Begründen Sie damit, dass die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$ über ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wächst. (Und dennoch an der Stelle $+2$ den Ableitungswert 0 hat.)
5) Untersuchen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen und skizzieren Sie ihre Graphen.
   a) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$
   b) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$
   c) $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 27$
   d) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3$
   e) $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 90x$

**Übungen (8) — Lösungen**

1) 1.a) Berechnet man die Ableitung ohne Analyse der Lücken, so ergibt sich folgendes (beachten Sie insbesondere das mehrmalige Kürzen):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-1}{(x+1)^2} \\ \Longrightarrow\quad f'(x) &= \frac{2x(x+1)^2-(x^2-1)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{2x(x+1)-2(x^2-1)}{(x+1)^3} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^2}\,. \end{aligned}$$

Benutzt man jedoch die Kenntnisse aus der Bearbeitung der Aufgabe 1.a) von Übung (6) und arbeitet mit dem gekürzten Funktionsterm, so ergibt sich einfacher

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}\,.$$

Fazit: Erst Kürzen, dann ableiten, nicht umgekehrt.

1.b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

1.c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1} \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = \dfrac{2x(x^2-1)-(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{6x}{(x^2-1)^2}$.

3.a) Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^3-x^2-3x+3}$ hat eine hebbare Lücke bei $+1$ und die fortgesetzte Funktion ist $\tilde{f}(x) = \dfrac{x+3}{x^2-3}$. Wir berechnen deren Ableitung:

$$\tilde{f}'(x) = \frac{(x^2-3)-(x+3)\cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{-x^2-9}{(x^2-3)^2}$$

Für alle $x \neq 1$ gilt $f(x) = \tilde{f}(x)$, also folgt für diese $x$ auch $f'(x) = \tilde{f}'(x)$. Der Wert $\tilde{f}'(1)$ gibt den Anstieg der fortgesetzten Funktion an der Definitionslücke $+1$ an, während $f$ an dieser Stelle $+1$ nicht definiert und folglich dort auch nicht differenzierbar ist.

3.b) Man kann die gegebene Funktion einfach mit der Quotientenregel ableiten, aber man erhält dann einen unnötig komplizierten Term:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+x-6}{-x^2+6x-9} \\ \Longrightarrow\quad f'(x) &= \frac{(2x+1)(-x^2+6x-9)-(x^2+x-6)(-2x+6)}{(-x^2+6x-9)^2} \\ &= \frac{7x^2-30x+27}{(-x^2+6x-9)^2}\,. \end{aligned}$$

Wenn man jedoch die Ergebnisse aus der Analyse der Lücken beachtet, erhält man einfacher

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{(x-3)^2} \implies f'(x) = \frac{(2x+1)\cdot(x-3)^2-(x^2+x-6)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}\,.$$

Man erkennt, dass man Kürzen kann, und erhält

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-3)-2x^2-2x+12}{(x-3)^3} = \frac{7x-9}{(x-3)^3}\,.$$

Beachten Sie die erheblich einfachere Form, die bei einer Vorzeichenuntersuchung von $f'$ von großem Vorteil ist. Beachten Sie aber auch, dass in diesem Falle die Vereinfachung nicht darauf beruht, dass man den Funktionsterm $f(x)$ kürzt, sondern allein auf der Tatsache, dass der Nenner von $f(x)$ einen Linearfaktor mehrfach enthält, also ein mehrfacher Pol vorliegt. Dies führte dann dazu, dass der entsprechende Linearfaktor in der Ableitung gekürzt werden konnte. Dies gilt allgemein, (siehe später, Null-/Polstellenordnung und Ableitung).

3.c) Die gegebene Funktion hat bei $+1$ eine hebbare Lücke. Wir untersuchen die fortgesetzte Funktion:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \frac{3x^2+6x-9}{x^2-3}\\ \implies \tilde{f}'(x) &= \frac{(6x+6)(x^2-3)-(3x^2+6x-9)\cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{-6x^2-18}{(x^2-3)^2}\,.\end{aligned}$$

Wieder gilt für $x \neq 1$ $f'(x) = \tilde{f}'(x)$. $\tilde{f}'(1)$ ist der Anstieg der fortgesetzten Funktion an der hebbaren Lücke, während $f$ dort nicht definiert (und folglich auch nicht differenzierbar) ist.

3.d) Alle Lücken von $f$ sind Pole, aber $f$ lässt sich durch Kürzen vereinfachen und wir erhalten

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^3-6x^2+4x+8}{x^4-4x^3-x^2+20x-20} = \frac{x^2-4x-4}{x^3-2x^2-5x+10}\\ \implies f'(x) &= \frac{(2x-4)(x^3-2x^2-5x+10)-(x^2-4x-4)(3x^2-4x-5)}{(x^3-2x^2-5x+10)^2}\\ &= \frac{-x^4+8x^3-x^2+4x-60}{(x^3-2x^2-5x+10)^2}\,.\end{aligned}$$

4.a) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+1}{3x^3+4x-1} \implies f'(x) = \dfrac{-3x^4+24x^3-5x^2-2x}{(3x^3+4x-1)^2}$.

4.b) Leitet man den gegebenen Funktionsterm $f(x) = \dfrac{3x^3+4x-4}{2x^2-x-1}$ wie üblich ab, erhält man den komplizierten Term $f'(x) = \dfrac{6x^4-6x^3-17x^2+16x-8}{(2x^2-x-1)^2}$. Günstiger ist es jedoch, die Asymptotenform des Funktionsterms, die man durch Polynomdivision erhält, für die Berechnung der Ableitung zu benutzen:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{4x^4-2x^2+1}{7x^4-5x-3} = \frac{3}{2}x+\frac{3}{4}+\frac{25x-13}{4(2x^2-x-1)}\\ \implies f'(x) &= \frac{3}{2}-\frac{25x^2-26x+19}{2(2x^2-x-1)^2}\end{aligned}$$

4.c) Auch hier kann man die Asympotenform nutzen:

$$f(x) = \frac{4x^4 - 2x^2 + 1}{7x^4 - 5x - 3} = 1 + \frac{-14x^2 + 20x + 19}{7(7x^4 - 5x - 3)}$$
$$\Longrightarrow\ f'(x) = \frac{28x^5 - 60x^4 - 76x^3 + 10x^2 + 12x + 5}{(7x^4 - 5x - 3)^2}$$

4.d) Hier hat der Funktionsterm $f(x) = 2x - 1 - \frac{3x+4}{x^2-4}$ bereits die Asympotenform. Als Ableitung erhält man

$$f'(x) = 2 - \frac{3x^2 + 8x + 12}{(x^2 - 4)^2}\,.$$

4.e) Hier erleichtert die Benutzung der Asymptotenform die Ableitungsberechnung besonders:

$$f(x) = x + \frac{x-3}{x+4} = x + 1 - \frac{7}{x+4} = x + 1 - 7(x+4)^{-1}$$
$$\Longrightarrow\ f'(x) = 1 + 7(x+4)^{-2} = 1 + \frac{7}{(x+4)^2}\,.$$

2) a) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ hat die Nullstellen 0 und +2. Damit sind 0 und +2 die beiden einzigen stationären Stellen von $f$. Da beide Nullstellen von $f'$ einfach sind, also dort jeweils ein VZW von $f'$ vorliegt, sind beide Stellen Extremstellen von $f$. Da $f'(x)$ (wie $f(x)$) einen positiven führenden Koeffizienten hat, ist $f'(x)$ schließlich positiv, also $f$ schließlich monoton steigend. Damit muss die letzte Extremstelle +2 eine Minimalstelle sein und 0 eine Maximumstelle.
b) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12 = 3(x^2 + 4x + 4) = 3(x+2)^2$ hat nur die Nullstelle $-2$. Dies ist die einzige stationäre Stelle von $f$. Wegen $f'(x) = 3(x+2)^2 \geq 0$ für alle $x$ ist $f$ stets monoton steigend, $f$ besitzt also kein Extremum: $-2$ ist stationäre Stelle, aber nicht Extremstelle von $f$.
c) $f'(x) = 4x^3 - 8x - 16 = 4(x^3 - 2x - 4)$. Einzig mögliche *rationale* Nullstellen von $f'$ sind die Teiler von 4; es ist $f(2) = 0$. Polynomdivision durch $x - 2$ ergibt $f'(x) = 4(x-2)(x^2 + 2x + 2)$. Da $x^2 + 2x + 2$ keine Nullstellen mehr hat, folgt: +2 ist einzige und einfache Nullstelle von $f'$, also einzige stationäre Stelle und Extremstelle von $f$. Wie bei a) begründet man, dass +2 Minimalstelle von $f$ ist.
d) Es ist $f'(x) = 15x^4 - 30x^2 - 45 = 15(x^4 - 2x^2 - 3)$. Die Nullstellen bestimmt man mittels Substitution: $z^2 - 2z - 3 = 0$ hat die Lösungen $z_1 = -1$ und $z_2 = 3$ und $f'(x)$ damit nur die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{3}$: Dies sind die beiden einzigen stationären Stellen von $f$. Beides sind Extremstellen, da $\pm\sqrt{3}$ *einfache* Nullstellen von $f'$ sind (warum?). $+\sqrt{3}$ ist Minimum- und $-\sqrt{3}$ Maximumstelle von $f$.
e) $f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist definiert für $x > 0$. Dafür gelten folgende Äquivalenzen:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \iff x\sqrt{x} - 1 = 0 \iff x^{3/2} = 1 \iff x = 1\,.$$

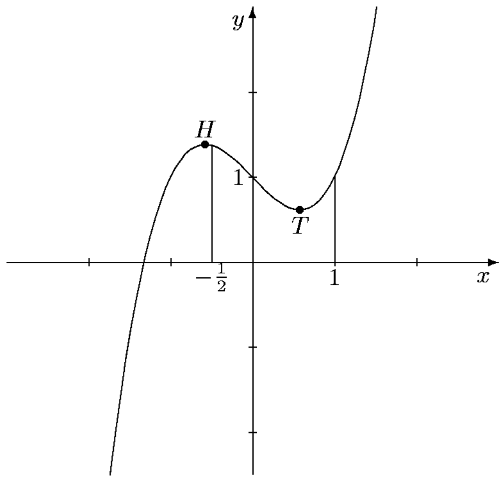
+1 ist die einzige Nullstelle von $f'$ und $f'(x)$ wechselt dort das Vorzeichen von '−' zu '+', also hat $f$ bei +1 ein Minimum.

f) $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = 0 \iff 2x^3 - 2 = 0 \iff x^3 = 1 \iff x = 1$. Wieder ist $+1$ einzige stationäre Stelle von $f$, und zwar ebenfalls eine Minimalstelle.

3) a) Es ist $f'(x) = 3x^2 - 1$ und $f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Die beiden stationären Stellen $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ sind Extremstellen von $f$, da sie *einfache* Nullstellen von $f'$ sind und $f'$ daher dort einen Vorzeichenwechsel hat. Da der führende Koeffizient von $f'$ positiv ist, ist $f'(x)$ schließlich positiv, $f$ also schließlich, d. h. für $x > \sqrt{\frac{1}{3}}$, streng monoton wachsend. Im Bereich $-\sqrt{\frac{1}{3}} < x < \sqrt{\frac{1}{3}}$ ist $f$ streng monoton fallend und für $x < -\sqrt{\frac{1}{3}}$ streng monton steigend. Mithin ist die Extremstelle $\sqrt{\frac{1}{3}}$ eine Minimalstelle. Genauso begründet man, dass $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ eine Maximumstelle von $f$ ist. Die Extrempunkte sind

$$T = (\sqrt{\frac{1}{3}}\,, 1 - \frac{2}{9}\sqrt{3}) \approx (0{,}577\,; 0{,}615)\,,\ H = (-\sqrt{\frac{1}{3}}\,, 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}) \approx (-0{,}577\,; 1{,}385)\,.$$

b) Da $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ist, hat die stetige Funktion $f$ *mindestens* eine Nullstelle. Als ganz-rationale Funktion dritten Grades hat sie *höchstens* drei Nullstellen. Da Hoch- und Tiefpunkt von $f$ *beide* oberhalb der $x$-Achse liegen, kann der Graph von $f$ die $x$-Achse nur einmal schneiden, und zwar im Bereich $x < -\sqrt{\frac{1}{3}}$.




c) Wir ermitteln zunächst die lokalen Extremstellen im Innern des Intervalls $I$. Nach a) liegt nur ein Tiefpunkt $T \approx (0{,}577\,; 0{,}615)$ in $I$. Dann vergleichen wir mit den *Randwerten* von $f$ über $I$: $f(-\frac{1}{2}) = \frac{11}{8} = 1{,}375$ und $f(1) = 1$. Damit ist der kleinste Wert von $f$ über $I$ der Wert an der Minimalstelle, also $\approx 0{,}615$ und der größte Wert ist der Wert am linken Rand: 1,375.

d) Als stetige Funktion nimmt $f$ über dem Intervall $I$ *alle* Werte zwischen dem Maximalwert 1,375 und dem Minimalwert $\approx 0{,}615$ an.

4) a) Es ist $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ stets negativ. Würde der Monotoniesatz uneingeschränkt gelten, müsste die Funktion $f$ streng monoton fallen. Aber für $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$ gilt $x_1 < x_2$ und $f(x_1) = -1 < f(x_2) = +1$. Hier gilt also die Aussage des Monotoniesatzes nicht. Der Grund liegt darin, dass der Definitionsbereich von $f$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *kein* Intervall ist: $\pm 1$ sind Definitionsstellen, aber die dazwischen liegende Stelle 0 nicht!

b) Man muss zeigen $f(x) < f(b)$ für alle $x < b$ und entsprechend $f(x) > f(a)$ für alle $x > a$. Wir führen den Beweis für $b$. Da die Folge $b - \frac{1}{n}$ wächst und $f$ über $]a, b[$ streng monoton wächst, muss auch die Folge der Funktionswerte $f(b - \frac{1}{n})$ streng monoton wachsen und der Grenzwert größer sein als jedes Folgenglied:

$$f(b) = \lim_{n\to\infty} f(b - \frac{1}{n}) > f(b - \frac{1}{n}) \quad \text{für alle } n\,. \tag{$*$}$$

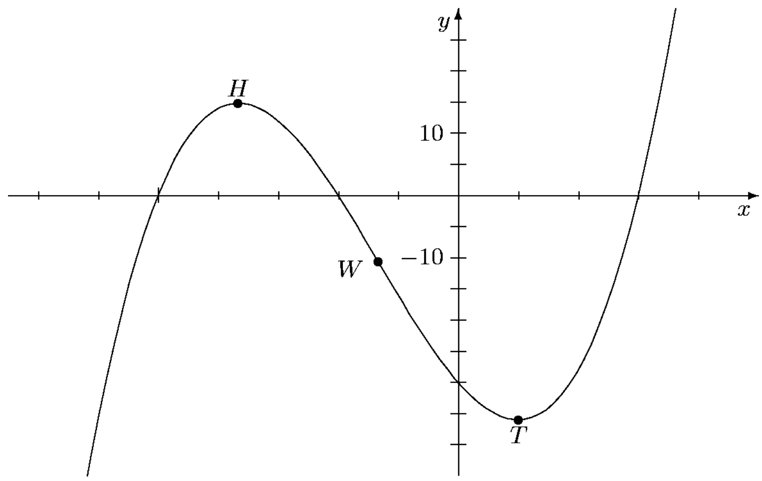
Hier haben wir den angegebenen Tip benutzt. Dieser gilt, weil $f$ an der Stelle $b$ stetig und $b - 1/n$ eine gegen $b$ konvergente Folge ist.

Ist nun $x < b$, so gilt für ein geeignetes (hinreichend großes) $n$ die Abschätzung $x < b - \frac{1}{n}$. Wegen der strengen Monotonie von $f$ in $]a, b[$ folgt dann

$$f(x) < f(b - \frac{1}{n}) \underset{(*)}{<} f(b)\,,$$

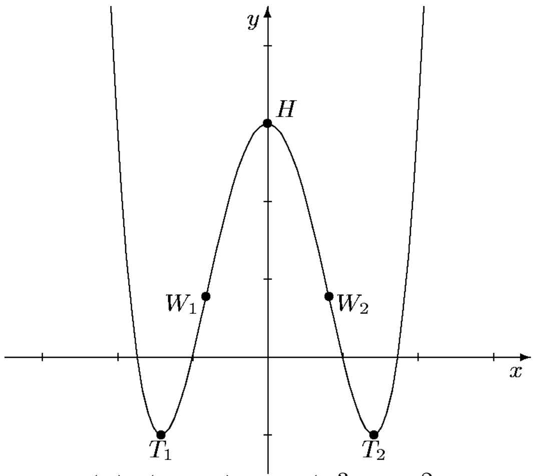
was zu zeigen war. Für die Stelle $a$ argumentiert man genauso.
c) Es ist $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x-2)^2$ immer positiv mit Ausnahme der Stelle 2. Wir unterteilen daher den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ von $f$ in zwei Teilintervalle $]-\infty, 2]$ und $[2, +\infty[$. Auf jedem der beiden offenen Teilintervall $]-\infty, 2[$ und $]2, +\infty[$ hat $f'$ nur positive Werte, $f$ ist also nach dem schwachen Monotoniesatz dort jeweils streng monoton wachsend. Da $f$ als ganzrationale Funktion stetig ist, gilt dann wie eben gezeigt $f(x) < f(2)$ für $x < 2$ und entsprechend $f(2) < f(x)$ für $2 < x$. Damit ist $f$ aber insgesamt *streng* monoton wachsend.

5) a) Es ist $f(-2) = 0$, $f(x) : (x+2) = (x^2+2x-15)$ und $x^2+2x-15 = (x+5)(x-3)$. Damit hat $f$ die drei (einfachen) Nullstellen $-2$, $-5$ und $+3$.
Die Nullstellen von $f'(x) = 3x^2 + 8x - 11$ sind $+1$ und $-\frac{11}{3}$. Beide Nullstellen von $f'$ sind einfach, also Extremstellen von $f$. Da der führende Koeffizient von $f(x)$ (und damit auch der von $f'(x)$) positiv ist, ist $f'(x)$ schließlich positiv, $f(x)$ also schließlich monoton steigend, so dass der 'letzte' Extrempunkt ein Tiefpunkt sein muss: $T = (1, f(1)) = (1, -36)$, während der andere ein Hochpunkt ist: $H = (-11/3, f(-11/3)) = (-11/3, 400/27) \approx (-3{,}67\,;\ 14{,}81)$.
Nullstellen von $f''(x) = 6x + 8$: Die (einfache) Nullstelle bei $-4/3$ ist Wendestelle von $f$. Wendepunkt $W = (-4/3, f(4/3)) = (-4/3, -286/27) \approx (-1{,}33; -10{,}60)$.

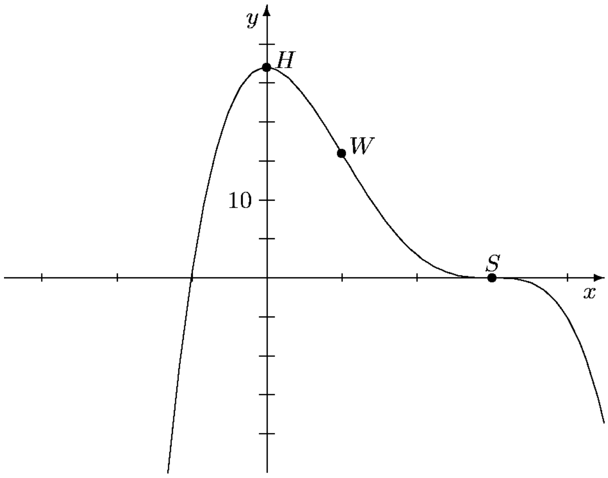



b) Die Funktion ist achsensymmetrisch. Ihre Nullstellen bestimmen wir mittels Substitution: $\pm 1$ und $\pm\sqrt{3}$. Da es 4 verschiedene Nullstellen sind, müssen sie alle einfach sein.
$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2)$ hat die Nullstellen 0 und $\pm\sqrt{2}$, diese sind einfach, also Extremstellen von $f$. Die zugehörigen Extremwerte sind $f(0) = 3$, $f(\pm\sqrt{2}) = -1$. Da der führende Koeffizient von $f$ positiv ist, ist der 'letzte' Extrempunkt ein Tiefpunkt: $T_2 = (\sqrt{2}, -1)$, der davor ein Hochpunkt: $H = (0, 3)$ und schließlich davor wieder ein Tiefpunkt $T_1 = (-\sqrt{2}, -1)$.
$f''(x) = 12x^2 - 8 = 12(x^2 - \frac{2}{3})$ hat die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{2/3} \approx \pm 0.82$; diese sind einfach, also Wendestellen von $f$. Die zugehörigen Wendepunkte sind $W_1 = (-\sqrt{2/3}, 7/9)$ und $W_2 = (\sqrt{2/3}, 7/9)$.

Skizze:

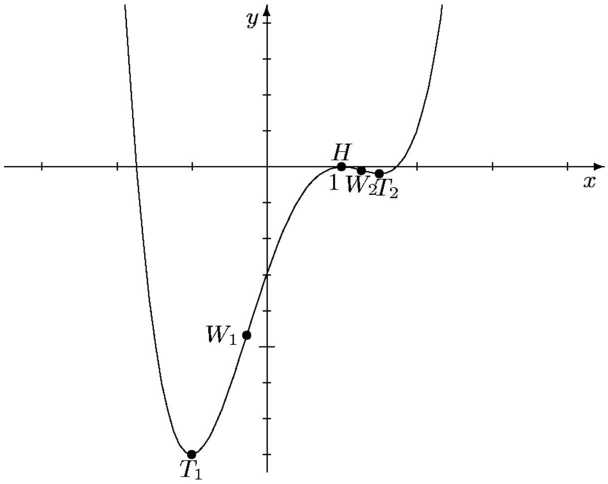



c) Es ist $f(-1) = 0$ und $f(x) : (x+1) = -(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)$. Dieser letzte Term hat $+3$ als Nullstelle und erneute Polynomdivision ergibt dann $f(x) = -(x+1)(x-3)(x^2 - 6x + 9) = -(x+1)(x-3)(x-3)^2$. Damit hat $f$ die Nullstellen $-1$ (einfach) und $+3$ (dreifach).
$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 36x = -4x(x^2 - 6x + 9) = -4x(x-3)^2$ hat die Nullstellen 0 (einfach) und $+3$ (doppelt). Damit ist 0 Extrem- und $+3$ Sattelstelle. Da der führende Koeffizient negativ ist, fällt die Funktion schließlich, d. h. der (einzige) Extrempunkt ist ein Hochpunkt: $H = (0, f(0)) = (0, 27)$. Der Sattelpunkt ist $S = (+3, 0)$.
$f''(x) = -12(x^2 - 4x + 3) = -12(x-3)(x-1)$ hat die beiden (einfachen) Nullstellen $+1$ und $+3$. Damit hat $f$ neben dem schon bestimmten Sattelpunkt $S$ noch einen weiteren Wendepunkt $W = (1, f(1)) = (1, 16)$.




d) $+1$ ist Nullstelle von $f$. Polynomdivision ergibt $f(x) : (x-1) = x^3 - x^2 - 3x + 3$. Wieder ist $+1$ Nullstelle, erneute Polynomdivision ergibt $f(x) = (x-1)^2(x^2 - 3)$. Damit hat $f$ die Nullstellen $+1$ (doppelt) und $\pm\sqrt{3}$ (einfach).
$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 4x + 6$ hat ebenfalls $+1$ als Nullstelle. Wir erhalten durch Polynomdivision $f'(x) = (x-1)(4x^2 - 2x - 6)$ und daraus die drei (einfachen) Nullstellen $\pm 1$ und $3/2$ von $f'$. Dies sind Extremstellen von $f$. Die zugehörigen Extrempunkte sind ein Tiefpunkt $T_2 = (3/2, f(3/2)) = (3/2, -3/16) = (1.5, -0.1875)$, ein Hochpunkt $H = (1 \mid f(1)) = (1 \mid 0)$ und ein weiterer Tiefpunkt $T_1 = (-1 \mid f(-1)) = (-1 \mid -8)$.
$f''(x) = 12x^2 - 12x - 4$ hat die beiden (einfachen) Nullstellen $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{12}}$. Dies

sind Wendestellen von $f$ und die Wendepunkte sind $W_1 \approx (-0.26 \mid -4.68)$ sowie $W_2 \approx (1.26 \mid -0.10)$.




e) Diese Funktion ist punktsymmetrisch, da nur ungerade Potenzen im Funktionsterm $f(x)$ auftreten.
$f(x) = x(3x^4 - 25x^2 + 90)$ hat die einfache Nullstelle 0. Mittels Substitution und $p, q$-Formel zeigt man, dass $3x^4 - 25x^2 + 90$ keine Nullstellen hat.
Die Gleichung $f'(x) = 15(x^4 - 5x^2 + 6) = 0$ kann man mittels Substitution auf die quadratische Gleichung $z^2 - 5z + 6 = 0$ reduzieren. Letztere löst man mittels $p, q$-Formel oder dem Satz von Vieta. Man erhält $z^2 - 5z + 6 = (z - 2)(z - 3)$ und damit $f'(x) = 15(x^4 - 5x^2 + 6) = 15(x^2 - 2)(x^2 - 3)$. Also hat $f'$ die vier (einfachen) Nullstellen $\pm\sqrt{2}$ und $\pm\sqrt{3}$. Diese sind sämtlich Extremstellen. Man erhält die Extrempunkte $H_1 = (-\sqrt{3} \mid -42\sqrt{3}) \approx (-1.73 \mid -72.75)$, $T_1 = (-\sqrt{2} \mid -52\sqrt{2}) \approx (-1.41 \mid -73.54)$ sowie die dazu symmetrische Punkte $H_2 = (\sqrt{2} \mid 52\sqrt{2}) \approx (1.41 \mid 73.54)$ und $T_2 = (\sqrt{3} \mid 42\sqrt{3}) \approx (1.73 \mid 72.75)$.
$f''(x) = 60x^3 - 150x = 60x(x^2 - \frac{5}{2})$ hat die (einfachen) Nullstellen 0 und $\pm\sqrt{5/2} \approx 1.58$. Diese sind somit Wendestellen und die Wendepunkte sind $W_1 \approx (-1.58 \mid -73.13)$, $W_2 = (0 \mid 0)$ und schließlich $W_3 \approx (1.58 \mid 73.13)$.
In der nachfolgenden Skizze sind die Wendepunkte durch kleine Kreise, die Extrempunkte durch 'massive' Punkte gekennzeichnet. Die Skala ist in $x$-Richtung stark gestreckt, damit die entscheidenden Punkte gut getrennt erkennbar sind. (In Wahrheit ist der Graph wesentlich steiler. Bei 0 ist der Anstieg 90 (!)).
Skizze: