Übungen (9)

1) Untersuchen Sie die rationalen Funktionen von Übung (6), Aufgabe 1) a–c sowie Aufgabe 3 b,c auf Monotonie und Krümmungsverhalten. Bestimmen Sie alle Extrem- und Wendepunkte und entscheiden Sie, welcher Art die Extrempunkte sind.
2) Begründen Sie für beliebige differenzierbare Funktionen f und eine Stelle a im Definitionsbereich von f:
a ist Sattelstelle von f genau dann, wenn a eine Wendestelle von f ist, an der die Tangente waagerecht verläuft:

$$\boxed{\text{Sattelstelle '=' stationäre Wendestelle}}$$

3) Zeigen Sie: Eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist genau dann punktsymmetrisch, wenn $(0, 0)$ Wendepunkt ist.
4) Gegeben sind die Funktionen f_k durch $f_k(x) = x^3 - 3x^2 + kx$ $(k \in \mathbb{R})$.
a) Zeigen Sie, dass es genau einen Punkt gibt, den alle Funktionsgraphen gemeinsam haben. Bestimmen Sie ihn.
b) Zeigen Sie, dass alle Funktionen dieselbe Wendestelle haben, und bestimmen Sie diese. Bestimmen Sie auch die Wendepunkte der f_k.
c) In welcher Weise hängen Existenz und Lage der Extremstellen von k ab? Entscheiden Sie, welcher Art die Extremstellen sind.
5) Gegeben ist die Funktionenschar f_k $(k \in \mathbb{R})$ durch $f_k(x) = x^3 + kx$.
a) Untersuchen Sie die Funktionen f_k und skizzieren Sie die Graphen von f_1, f_0, f_{-1}, f_{-3} in demselben Koordinatensystem.
b) Welchen Wert muss k haben, damit f_k bei 1 ein Extremum hat? Welcher Art ist dieses dann?
c) Welchen Wert muss k haben, damit bei 0 ein Wendepunkt vorliegt?
d) Für welchen Wert von k hat f_k bei -2 ein Minimum?
6) Gesucht sind die Funktionen dritten Grades, deren Graph durch den Koordinatenursprung $O = (0, 0)$ verläuft, $W = (2, 4)$ als Wendepunkt hat, dessen zugehörige *Wendetangente* (= Tangente im Wendepunkt) den Anstieg -3 hat.

Übungen (9) — Lösungen

1) Die in Übung (6) bereits gefundenen Ergebnisse (Definitionsbereich, Pole, Vorzeichenverteilung von f, evtl. Asymptote) werden im Folgenden selbstverständlich benutzt.
Ü6, 1a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x+1)^2}$:
Da bereits die Lücken bestimmt sind, gehen wir von dem gekürzten Funktionsterm aus

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}\,.$$

Zur Berechnung der beiden Ableitungen benutzen wir den Funktionsterm in Asymptotenform, die wir durch Polynomdivision bestimmen:

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x+1} = 1 - 2(x+1)^{-1}\,.$$

Damit erhalten wir die beiden Ableitungen

$$f'(x) = -2\cdot(-1)\cdot(x+1)^{-2} = \frac{2}{(x+1)^2}\,, \qquad f''(x) = 2\cdot(-2)\cdot(x+1)^{-3} = \frac{-4}{(x+1)^3}\,.$$

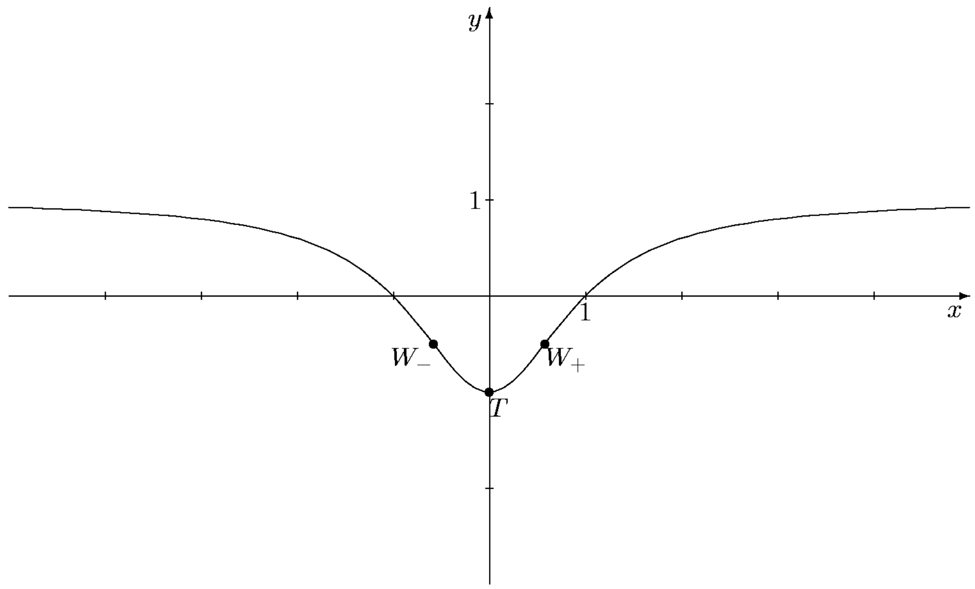
Wir erkennen unmittelbar, dass weder f' noch f'' eine Nullstelle hat, so dass f weder Extrem- noch Wendestellen besitzt.
Ebenso einfach erkennt man, dass f' nur positive Werte hat, so dass der Graph von f über jedem Intervall des Definitionsbereiches monoton wächst (aber nicht über $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$!). Anders formuliert: Die beiden zusammenhängenden Teilstücke des Graphen von f sind jeweils monoton wachsend, nicht aber der Graph als Ganzes.

Da f'' an dem (dreifachen) Pol bei -1 sein Vorzeichen ändert, ändert sich dort die Krümmung von f, ohne dass f dort eine Wendestelle hat! Über dem Intervall $]-\infty,-1[$ hat f'' nur positive Werte und f ist dort linksgekrümmt, während über $]-1,\infty[$ f umgekehrt rechtsgekrümmt ist.
Damit erweist sich der bereits in Übung (6) als *möglich* skizzierte Graph auch hinsichtlich Monotonie und Krümmungsverhalten als korrekt.
Ü6, 1b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$:
Wir berechnen die ersten beiden Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}\,,$$
$$f''(x) = \frac{4(x^2+1)^2 - 4x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4(x^2+1)-16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}\,.$$

Die erste Ableitung hat nur eine einfache Nullstelle bei 0, also ist 0 die einzige Extremstelle von f. Da der Nenner von f' immer positiv ist, hat f' bei 0 einen VZW von $-$ zu $+$, so dass f dort eine Minimalstelle hat. Der Tiefpunkt ist $T = (0, f(0)) = (0,-1)$.

f'' hat die beiden Nullstellen $\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Diese sind einfach, da der Zählerterm quadratisch ist. Damit hat f an beiden Stellen einen Wendepunkt. Die Wendepunkte sind $W_\pm = (\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}, f(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3})) = (\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}) \approx (\pm 0{,}58, -\frac{1}{2})$.
Da der Nenner von f'' stets positiv ist, können wir die Vorzeichenverteilung von f'' allein am Zähler ablesen. Im Bereich $]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ ist $f''(x) > 0$ und f linksgekrümmt, während in den anderen Bereichen f rechtsgekrümmt ist.
Skizze:



Ü6, 1c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$: Die ersten beiden Ableitungen:

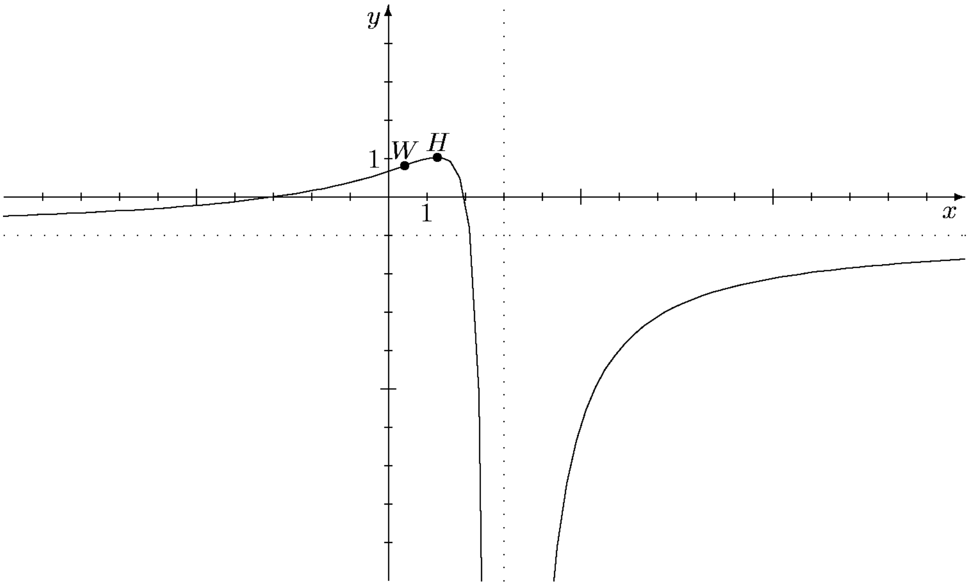
$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1)-(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x}{(x^2-1)^2},$$
$$f''(x) = \frac{6(x^2-1)^2 - 6x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{6(x^2-1)-24x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

Wieder hat f' nur eine einfache Nullstelle bei 0, f also nur die Extremstelle 0. Da der Nenner von f' stets positiv ist, bestimmt allein der Zähler $6x$ das Vorzeichen von f': f' wechselt bei 0 das Vorzeichen von $-$ zu $+$. Damit ist das Extremum ein Minimum und der Tiefpunkt ist $T = (0, 4)$.
f'' dagegen hat keine Nullstelle, f also keinen Wendepunkt. f'' wechselt sein Vorzeichen nur an den beiden Polen ± 1. Der Zähler von f'' ist immer negativ, der Nenner ist negativ genau im Bereich $]-1, +1[$. Damit ist f'' positiv in diesem Bereich und sonst negativ. Also ist f im Bereich $]-1, +1[$ linksgekrümmt, sonst rechtsgekrümmt.
Der Verlauf des Graphen ist der bereits bei Übung 6, 1c) skizzierte.
Ü6, 3 b) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{-x^2+6x-9}$:
Der Funktionsterm ist nicht kürzbar, aber der Nenner ist ein vollständiges Quadrat. Dies kann man sich bei der Berechnung der Ableitung zunutze machen:

$$f(x) = -\frac{x^2+x-6}{(x-3)^2},$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{(2x+1)(x-3)^2 - (x^2+x-6)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} \\
&= -\frac{(2x+1)(x-3) - 2(x^2+x-6)}{(x-3)^3} = \frac{7x-9}{(x-3)^3}\,, \\
f''(x) &= \frac{7(x-3)^3 - (7x-9)\cdot 3(x-3)^2}{(x-3)^6} = \frac{7(x-3)-3(7x-9)}{(x-3)^4} = \frac{-14x+6}{(x-3)^4}\,. \quad \text{Korrektur!}
\end{aligned}
$$

Einzige Nullstelle von f' ist $\frac{9}{7}$, sie ist einfach und damit Extremstelle von f. Der Zähler von f hat bei $\frac{9}{7}$ einen VZW von $-$ zu $+$, da aber der Nenner bei $\frac{9}{7}$ (und in einer ganzen Umgebung) negative Werte hat, wechselt f' bei $\frac{9}{7}$ sein Vorzeichen umgekehrt von $+$ zu $-$: $\frac{9}{7}$ ist Maximalstelle von f. Der Hochpunkt ist $H = (\frac{9}{7}, f(\frac{9}{7})) = (\frac{9}{7}, \frac{25}{24}) \approx (1{,}29; 1{,}04)$.
f'' hat nur die Nullstelle $\frac{3}{7}$, ebenfalls einfach und somit Wendestelle von f. Der Wendepunkt ist $W = (\frac{3}{7}, f(\frac{3}{7})) = (\frac{3}{7}, \frac{22}{27}) \approx (0{,}43; 0{,}81)$.
Skizze:



Ü 6, 3c) $f(x) = \dfrac{3x^3+3x^2-15x+9}{x^3-x^2-3x+3}$:
Wir kürzen den Funktionsterm und berechnen die Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3(x-1)(x+3)}{x^2-3} = \frac{3x^2+6x-9}{x^2-3}\,, \\
f'(x) &= \frac{(6x+6)(x^2-3) - (3x^2+6x-9)\cdot 2x}{(x^2-3)^2} \\
&= \frac{6x^3+6x^2-18x-18-6x^3-12x^2+18x}{(x^2-3)^2} = \frac{-6x^2-18}{(x^2-3)^2}\,, \\
f''(x) &= \frac{-12x(x^2-3)^2 + (6x^2+18)\cdot 2(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-3)^4} \\
&= \frac{-12x(x^2-3) + (6x^2+18)\cdot 4x}{(x^2-3)^3} \\
&= \frac{12x^3+108x}{(x^2-3)^3} = \frac{12x(x^2+9)}{(x^2-3)^2}
\end{aligned}
$$

Damit erkennen wir, dass $f'(x)$ keine Nullstelle, f also keine Extremstelle hat. Da f' nur negative Werte hat, ist f über jedem Teilintervall des Definitionsbereiches monoton fallend.
f'' hat nur eine einfache Nullstelle bei 0, dort liegt also eine Wendestelle von f vor. Der Wendepunkt ist $W = (0, f(0)) = (0, 3)$.
Diese Ergebnisse bestätigen den Verlauf des in Übung 6 bereits gefundenen Graphen, nur dass jetzt die genaue Lage des Wendepunktes bestimmt ist.

2) Eine Sattelstelle ist definitionsgemäß eine Nullstelle von f' ohne Vorzeichenwechsel. An einer Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel liegt aber notwendig ein Extremum vor. Damit ist a Extremstelle von f' und folglich Wendestelle von f.
Umgekehrt: Ist a eine Wendestelle von f, so ist a Extremstelle von f'. Zugleich soll bei a die Tangente an den Graphen von f waagerecht verlaufen, also $f'(a) = 0$ sein. Damit ist a eine Nullstelle von f', die zugleich Extremstelle von f' ist. Dann kann dort aber kein Vorzeichenwechsel stattfinden: a ist Nullstelle von f' ohne Vorzeichenwechsel, und das heißt, eine Sattelstelle von f.

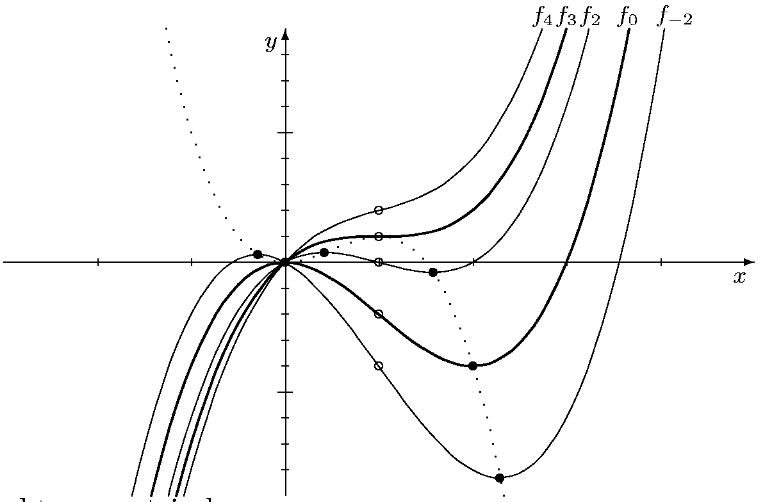
3) Ist eine ganzrationale Funktion f punktsymmetrisch, so kommen nur Potenzen mit ungeraden Exponenten im Funktionsterm $f(x)$ vor, also bei Grad 3 $f(x) = ax^3 + cx$. Dann gilt $f'(x) = 3ax^2 + c$ und $f''(x) = 6ax$. Damit ist $x = 0$ einzige Nullstelle von f'', mit VZW, also Wendestelle von f. Der Wendepunkt ist $W = (0, f(0)) = (0, 0)$.
Interessanter ist die umgekehrte Aussage: Ist $W = (0, 0)$ Wendepunkt von f und $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, so muss f punktsymmetrisch sein, d. h. $b = d = 0$ sein. Es ist $f(0) = 0$, da der Graph durch W verläuft; also folgt $d = 0$. Da 0 Wendestelle von f ist, gilt $f''(0) = 0$. Wegen $f''(x) = 6ax + 2b$ ergibt sich damit $0 = f''(0) = 2b$, also $b = 0$. Insgesamt ist damit gezeigt $f(x) = ax^3 + cx$: f ist punktsymmetrisch.

4) a) Schnittpunkte zweier Graphen f_k und f_l $(k \neq l)$ sind gegeben durch Lösungen der Gleichung

$$f_k(x) = f_l(x) \iff x^3 - 3x^2 + kx = x^3 - 3x^2 + lx \iff kx = lx \iff (k - l)x = 0\,.$$

Für $k \neq l$, also $k - l \neq 0$, hat diese letzte Gleichung nur die Lösung $x = 0$ (unabhängig von k und l). Damit ist $(0, f_k(0)) = (0, 0)$ der gesuchte gemeinsame Punkt aller Graphen f_k.
b) Es ist $f_k'(x) = 3x^2 - 6x + k$ und $f_k''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$. Damit hat f_k'' (unabhängig von k) bei 1 seine einzige Nullstelle, und diese ist einfach. 1 ist also Wendestelle aller f_k.
Der zugehörige Wendepunkt ist $W_k = (1, f_k(1)) = (1, k - 2)$.
c) Gemäß p, q-Formel gilt $f_k'(x) = 3(x^2 - 2x + \frac{k}{3}) = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{k}{3}}$, wobei das Vorzeichen des Radikanden $1 - \frac{k}{3}$ entscheidet, ob und wieviele Lösungen es gibt. Wir unterscheiden 3 Fälle:
<u>$k > 3$</u>: Dann ist $1 - \frac{k}{3} < 0$, also hat f_k' keine Nullstellen, f_k somit keine Extremstellen.
<u>$k = 3$</u>: Dann ist $1 - \frac{k}{3} = 0$ und f_k' hat die einzige (doppelte) Nullstelle 1; diese ist dann eine Wendestelle von f_k (siehe auch a)).
<u>$k < 3$</u>: Dann ist $1 - \frac{k}{3} > 0$ und f_k' hat die beiden (einfachen) Nullstellen $1 \pm \sqrt{1 - \frac{k}{3}}$. Da der führende Koeffizient von f_k' positiv ist, steigt f_k schließlich an, so dass an der letzten Extremstelle $(1 + \sqrt{1 - \frac{k}{3}})$ ein Minimum und an der anderen $(1 - \sqrt{1 - \frac{k}{3}})$ ein Maximum vorliegt.

In nachstehender Skizze sind einige Graphen skizziert (für $k = 4, 3, 2, 0, -2$). Die Wendepunkte an der Stelle 1 sind durch kleine Kreise, die Extrempunkte durch Punkte gekennzeichnet. Die benutzte Strichstärke wechselt von einem Graphen zum benachbarten. In dieser Skizze ist zusätzlich die Kurve eingezeichnet, die von den Extrempunkten (und dem Sattelpunkt), d. h. von den stationären Punkten gebildet wird.



5) a) f_k ist punktsymmetrisch.
$f_k(x) = x(x^2 + k)$ hat 0 als Nullstelle; diese ist einfach, wenn $k \neq 0$, und dreifach, wenn $k = 0$ ist.
Für $k > 0$ existieren keine weiteren Nullstellen; für $k < 0$ gibt es zwei weitere (einfache) Nullstellen $\pm\sqrt{-k}$. Zusammenfassend:

$$\text{Nullstellen von } f_k\text{:} \quad \begin{cases} 0, \pm\sqrt{-k} & \text{einfach} \quad \text{für } k < 0, \\ \quad 0 & \text{dreifach} \quad \text{für } k = 0, \\ \quad 0 & \text{einfach} \quad \text{für } k > 0. \end{cases}$$

$f_k'(x) = 3x^2 + k = 0 \iff x^2 = -\frac{k}{3}$. Wieder unterscheiden wir die drei Fälle und erhalten:

$$\text{Nullstellen von } f_k'\text{:} \quad \begin{cases} \pm\sqrt{-\frac{k}{3}} & \text{einfach} \quad \text{für } k < 0, \\ \quad 0 & \text{doppelt} \quad \text{für } k = 0, \\ \text{keine} & \qquad\qquad \text{für } k > 0. \end{cases}$$

Für $k = 0$ liegt bei 0 eine Sattelstelle vor; der Sattelpunkt von f_0 ist $S = (0, 0)$.
Nur für $k < 0$ hat f_k Extremstellen. Die Extremwerte sind

$$f_k\Big(\sqrt{\frac{-k}{3}}\,\Big) = \Big(\sqrt{\frac{-k}{3}}\,\Big)^3 + k\Big(\sqrt{\frac{-k}{3}}\,\Big) = \frac{-k}{3}\sqrt{\frac{-k}{3}} + k\sqrt{\frac{-k}{3}} = \frac{2}{3}k\sqrt{-\frac{k}{3}}$$

und wegen der Punktsymmetrie von f_k

$$f_k\Big(-\sqrt{-\frac{k}{3}}\,\Big) = -\frac{2}{3}k\sqrt{-\frac{k}{3}}\,.$$

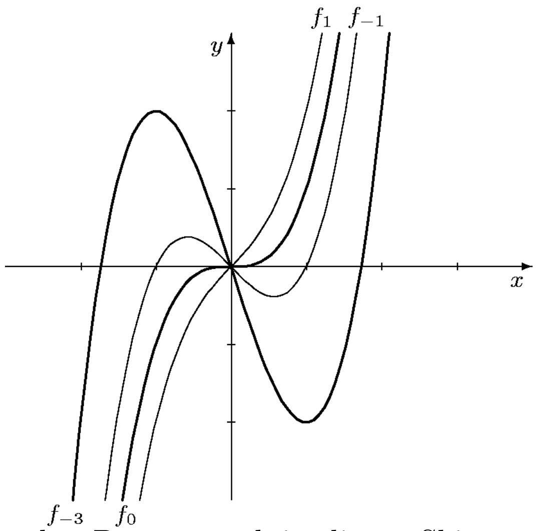
Da der führende Koeffizient von f_k positiv ist, steigt f_k schließlich an, so dass an der 'letzten' Extremstelle $\sqrt{-\frac{k}{3}}$ ein Minimum und an der anderen ein Maximum vorliegt. Damit erhalten wir die Extrempunkte von f_k:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Tiefpunkt} & T_k = \left(\sqrt{-\frac{k}{3}}, \frac{2}{3}k\sqrt{-\frac{k}{3}}\right), \\ \text{Hochpunkt} & H_k = \left(-\sqrt{-\frac{k}{3}}, -\frac{2}{3}k\sqrt{-\frac{k}{3}}\right). \end{array}\right\} \text{ für } k < 0\,.$$

Da $f_k''(x) = 6x$ von k unabhängig ist, ist das Krümmungsverhalten aller f_k einheitlich; 0 ist einzige Wendestelle, $W = (0,0)$ ist gemeinsamer Wendepunkt aller Funktionsgraphen:

$$\text{Wendepunkt:}\quad W = (0,0) \quad \text{für alle } k\,.$$

Skizzen:



Wegen $f_k'(0) = k$ findet man den Parameter k in diesen Skizzen als Anstieg der Kurven im Koordinatenursprung wieder.
b) Wenn bei 1 ein Extremum vorliegen soll, muss $f_k'(1) = 0$ sein:

$$0 = f_k'(1) = 3 + k \iff k = -3\,.$$

Höchstens f_{-3} kann bei $+1$ ein Extremum haben. Dass tatsächlich ein Extremum vorliegt, folgt aus den Überlegungen von a); es ist ein Minimum.
c) Für alle k ist 0 Wendestelle von f_k.
d) Wie bei b) stellen wir fest $f_k'(-2) = 0 \iff 3\cdot(-2)^2 + k = 0 \iff k = -12$. Damit kann nur für f_{-12} bei -2 ein Minimum vorliegen. Aber: Es liegt dort zwar ein Extremum vor, *aber kein Minimum*, sondern ein Maximum (siehe a) bzw. $f_{-12}''(-2) = 6\cdot(-2) < 0$). Folglich gibt es keinen Wert von k mit den in c) geforderten Eigenschaften.

6) Allgemeiner Ansatz: Da die Funktion ganzrational sein und der Grad höchstens 3 betragen soll, kann $f(x)$ in der Form

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

angesetzt werden. Gesucht sind nun die 4 Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Bedingungen: Wir setzen die gestellten Forderungen für f in Bedingungen (meist

Gleichungen) für die gesuchten Koeffizienten a, b, c, d um.
1. $O = (0, 0)$ Punkt des Graphen, d. h. $0 = f(0) = d$. Damit sind nur noch 3 unbekannte Größen zu bestimmen: a, b, c.
2. $W = (2, 4)$ soll Wendepunkt sein. Dies sind 2 Bedingungen! Erstens muss W auf dem Graphen liegen ($f(2) = 4$) und zweitens muss 2 Wendestelle sein. Für Letzteres ist $f''(2) = 0$ notwendig (aber i. a. nicht hinreichend!).
3. Die Tangente an den Graphen im Punkt W hat den Anstieg -3: $f'(2) = -3$.
Mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$ erhalten wir für die drei Unbekannten a, b, c die drei folgenden Bedingungen:

$$\begin{array}{llrcrcrcrcr}
(1) & f(2) & = 4 & \Longleftrightarrow & 8\,a & + & 4\,b & + & 2\,c & = & 4 \\
(2) & f'(2) & = -3 & \Longleftrightarrow & 12\,a & + & 4\,b & + & c & = & -3 \\
(3) & f''(2) & = 0 & \Longleftrightarrow & 12\,a & + & 2\,b & & & = & 0
\end{array}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem, das man mit den üblichen Methoden löst. Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung: $a = 5/4$, $b = -15/2$, $c = 12$. Dies besagt, dass die einzig mögliche Funktion mit den geforderten Eigenschaften gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x\,.$$

Da wir die Wendestellenbedingung abgeschwächt hatten zu der notwendigen Bedingung $f''(2) = 0$, müssen wir nun noch überprüfen, ob bei $+2$ tatsächlich eine Wendestelle vorliegt, d. h. f'' an der Nullstelle 2 *das Vorzeichen wechselt.* Da $f''(x)$ linear ist, ist dies sicher erfüllt:
Die angegebene Funktion ist die einzige Funktion mit den geforderten Eigenschaften.